

楕円歯車の研究 (第一報)

森田一弘* 笠原俊郎**

Study of Elliptic Gear (Part 1)

By Kazuhiro Morita and Toshirō Kasahara

Kameari Works, Hitachi, Ltd.

Abstract

Recent indications are that the elliptic gears are getting steadily into favour where the use of the conventional type of crank or other similar complicated mechanism as the speed changing and quick restoring mechanism is not preferred. On the other hand, there are few for which neither the method of machining nor the theory is clearly established.

Urged by the fact that the European manufactures, such as Ickhoff of Germany, already brought this type of gears into practical use so successfully in their products, such as its application to the quick return motion of the Duckbile, the writers set about the study of the elliptic gear with a view to working out a simple and economical method of gear cutting.

Then, using the Fellows type gear shaper and the gear cutting machine on the similar principle on hand, and making them operate in eccentric movement which is resulted from the isochronous cutting and shaping with the revolution ratio of 2:1 between the blank and the cutter side, the writers succeeded to machine out the elliptic gear to any desired specification.

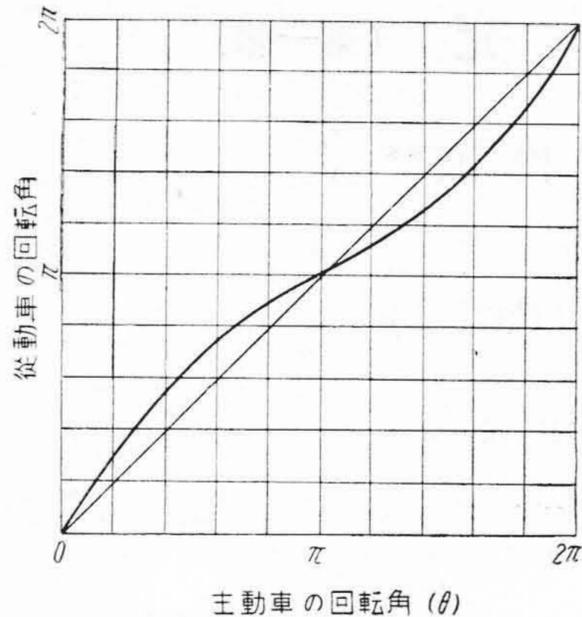
In this paper, the theory and the gear machining and of meshing of elliptic gears as well as the method of elliptic gear shaping is discussed.

〔I〕 緒 言

楕円歯車は一般概念に於ては衆知の事柄である。つまり歯数比が 1:1 なる場合に就て考察すると一般歯車に於ては主動車が一回転する間に従動車も一回転しその間に於ける角速度の関係は常に 1:1 で一定である。これは第 1 図に示す如く主動車の回転角を x 座標に従動車の回転角を y 座標に取つた時両者の関係は丁度正方形の対角線に相当する。一方楕円歯車に於ては主動車一回転に対しては従動車は同じく一回転するがその間に於ける各瞬時の角速度比は絶えず変化し第 1 図の波形曲線で示す如く 180° で完全対称となる如く変化する。この特性は

* 日立製作所亀有工場

機構上便利な特性で早戻り運動 (Quick-return-motion) はこの一組の楕円歯車に依り簡易に達成される。またスプライン、ラチェット等の創成時に生ずる隅肉もこの楕円歯車を利用した変運動切削に依り簡単に除去し得る。然るにこの楕円歯車の工作法に関しては殆ど知られておらず偶々特許公報等に見られる切削法は非常に複雑なる機構を必要とし、また切削に要する時間も相当長時間に及び工作上の困難性は免れ得ない。そこで著者等はこの種楕円歯車の切削に現用フェロー式ギヤシエーパーを用い、これに何等の改造を加える事なく一般平歯車を切削すると同様に短時間に工作する方法を発明* した。しかしてその切削原理を究明し、切削法の実施、その切削理論及び嚙合理論の研究を行つた。(*昭和27年6月特許出願)



第 1 図 楕円歯車に於ける主動車回転角と従動車回転角の関係
Fig. 1. Relation of the Roll Angle between Driver and Follower of Elliptical Gear

〔II〕 工作法の原理に関する詳細なる説明

(1) 第 2 図に示すように長半径が a 短半径が b なる楕円の周の $1/2$ を円周とする転り円 M が滑らないで転る時その転り円内の一点 P (P と転り円 M の中心 C と距離は $\frac{a-b}{2}$) の画く軌跡の形状を求めて見る。もしこの軌跡が円になるとすると逆にこの転り円内の点 P をこの円上に沿つて転り接触をさせた時相手の転り底曲線として楕円が得られる筈である。第 2 図より

$$\overline{OA} = a \quad \overline{OB} = b$$

$$\text{楕円の長径} = 2a$$

$$\text{楕円の短径} = 2b$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e \quad \text{とおく}$$

転り円と楕円との接触点 Q の座標は $a \sin \phi, b \cos \phi$ となる。従つて楕円周の始点 B から接触点 Q までの長さを s とすると

$$s = a \int_0^\phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} \cdot a \phi = aE(e \cdot \phi) \dots (1)$$

転り円の円周は楕円の周の $1/2$ であるから転り円の半径 \overline{CQ} は

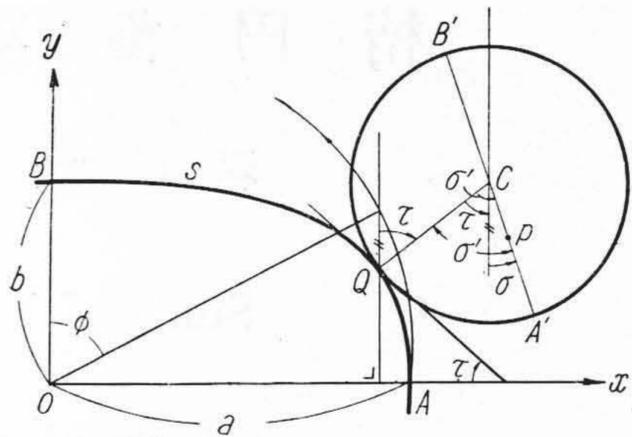
$$4\pi \overline{CQ} = 4aE(e \cdot 90^\circ)$$

$$\overline{CQ} = \frac{aE(e \cdot 90^\circ)}{\pi}$$

以下完全楕円積分 $E(e \cdot 90^\circ) = E(e)$ で表わすことにする。

すると $\overline{CP} = \frac{aE(e)}{\pi} \dots (2)$

$$\overline{CP} = \frac{a-b}{2} \dots (3)$$



第 2 図 底楕円と転り円内の一点 P との関係
Fig. 2. Relation between the Base Ellipse and Point P in Rolling Circle that Eccentricity is Equal $\frac{a-b}{2}$ and the Circumference is Ellipse Circumference
 a = Major Diameter of Ellipse
 b = Minor Diameter of Ellipse

$s=0$ の時転り円周上の B' 点は楕円周の始点 B と一致し C 点及び P 点は共に y 軸上にあるものとする。

$$\widehat{B'Q} = \widehat{BQ} = s = aE(e \cdot \phi)$$

$$\sigma' = \angle QCA' = \pi - \frac{\widehat{B'Q}}{CQ}$$

$$= \pi - \frac{aE(e \cdot \phi)}{aE(e)} = \pi - \frac{\pi E(e \cdot \phi)}{E(e)} \dots (4)$$

故に $\sigma = \sigma' - \tau = \pi - \frac{\pi E(e \cdot \phi)}{E(e)} - \tau \dots (5)$

また $\tan \tau = b/a \tan \phi \dots (6)$

点 P の座標を x, y とすると

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \phi + \overline{CQ} \sin \tau + \overline{CP} \sin \sigma \\ y &= b \cos \phi + \overline{CQ} \cos \tau - \overline{CP} \cos \sigma \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi + \overline{CQ}^2 + \overline{CP}^2 \\ &\quad - 2\overline{CQ} \cdot \overline{CP} \cdot \cos(\tau + \sigma) = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \phi \\ &\quad + \frac{a^2 E^2(e)}{\pi^2} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{a(a-b)}{\pi} E(e) \cos \frac{\pi E(e \cdot \phi)}{E(e)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \phi}} \left[(a^2 - b^2)(a-b) \right. \\ &\quad \left. \cos \phi \sin \phi \sin \frac{\pi E(e \cdot \phi)}{E(e)} \right. \\ &\quad \left. + ab(a-b) \cos \frac{\pi E(e \cdot \phi)}{E(e)} + \frac{2a^2 b}{\pi} E(e) \right] \dots (8) \end{aligned}$$

扱て (8) 式にて $a=2, b=1$ の場合について数値計算を行つて見ると

$\phi = 0$	$\sqrt{x^2 + y^2} = 2.2710$
$\phi = 45^\circ$	$\sqrt{x^2 + y^2} = 2.3577$
$\phi = 90^\circ$	$\sqrt{x^2 + y^2} = 2.2710$

これを見ると約4%位純正円との間に誤差が存在している。しかし実用に供する楕円では殆ど純正円と見做して支障ないと考えられる。以上の事を機構的に考察して見るにこれは楕円の周面を円が滑らないで転るための変速回転を必要とする。

(2) 次に問題を変えて(1)の場合の運動条件に一定比率の回転比を与えるという条件を導入すればこれはギヤセーパの Cutter 及びブランクの相対運動と全く同一に取扱い得る事になる。 a, b を楕円の長半径及び短半径とする。今動円 M の半径を一般に R とし表わし動円内の偏心点を P ($PC = \frac{a-b}{2}$) としこの動円 M が第3図の如く $OAPC$ が一直線に並んだ時から出発し、次のような運動を開始したとする。即ち点 P は O を中心として半径 OP なる円周上を一樣なる角速度 w で回転し而して動円 M の中心は P 点の廻りを $2w$ なる角速度で同じ向きに一樣なる回転運動を行うものとする。動円 M の表わす円群の包絡線は如何なる曲線となるかを調べ。第3図より

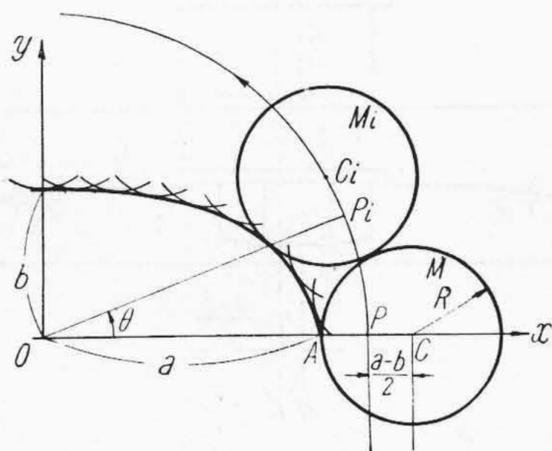
$$\overline{OA} = a \quad \overline{CP} = \frac{a-b}{2} \quad \overline{OP} = a + R - \frac{a-b}{2} \dots (9)$$

点 P が O 点の廻りに θ 角だけ回転すると C 点は P 点の廻りに ϕ だけ回転する。第4図より

$$\phi = \theta + \phi$$

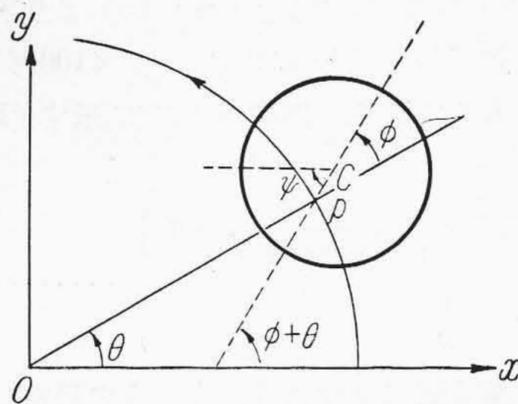
然るに前述の如く動円 M の P の廻りの角速度は O の周りを公転する角速度の2倍であるから $\phi = 2\theta$ なる関係が成立する故に

$$\phi = \theta + \phi = \theta + 2\theta = 3\theta \dots (10)$$



第3図 偏心率 $\frac{a-b}{2}$, 楕円と転り動円の回転比が 1:2 とゆう一定関係運動に於ける動円の包絡線

Fig. 3. The Envelope of Rolling Circle in Constant Related Motion that Eccentricity is Equal $\frac{(a-b)}{2}$ and Rolling Ratio is Equal 1:2 between Ellipse and Rolling Circle
 a = Major Diameter of Ellipse
 b = Minor Diameter of Ellipse



第4図 θ と ϕ との関係
 Fig. 4. Relation between θ and ϕ

動円 M の中心 C の座標 (x_c, y_c) は第4図より次の如く与えられる

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \overline{OP} \cos \theta + \overline{CP} \cos \phi = \overline{OP} \cos \theta + \overline{CP} \cos 3\theta \\ y_c &= \overline{OP} \sin \theta + \overline{CP} \sin \phi = \overline{OP} \sin \theta + \overline{CP} \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

又動円の方程式は

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \dots (12)$$

(12) の両辺を θ で微分すると

$$\dot{x}_c (x - x_c) + \dot{y}_c (y - y_c) = 0$$

(\cdot は微分した事を表わす)

書き変えて

$$\dot{x}_c^2 (x - x_c)^2 - \dot{y}_c^2 (y - y_c)^2 = 0 \dots (13)$$

(12), (13) 式より包絡線の方程式として次式が得られる

$$\left. \begin{aligned} x &= x_c \pm \frac{\dot{y}_c}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}} R \\ y &= y_c \pm \frac{\dot{x}_c}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}} R \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

又(6)式に $\overline{OP}, \overline{CP}$ の値をそれぞれ代入すると

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \left\{ a + R - \left(\frac{a-b}{2} \right) \right\} \cos \theta + \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 3\theta \\ y_c &= \left\{ a + R - \left(\frac{a-b}{2} \right) \right\} \sin \theta + \left(\frac{a-b}{2} \right) \sin 3\theta \\ \dot{x}_c &= - \left\{ a + R - \left(\frac{a-b}{2} \right) \right\} \sin \theta - 3 \left(\frac{a-b}{2} \right) \sin 3\theta \\ \dot{y}_c &= \left\{ a + R - \left(\frac{a-b}{2} \right) \right\} \cos \theta + 3 \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 3\theta \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

(14) 式に於ける複号は2つの包絡線の存在を意味するがこの場合動円の内側に生ずる包絡線を考えるには上式に於ては(-)符号を下式に於ては(+)符号を取ればよろしい。扱今心差率を独乙ダックビルに使用せるものゝ約2倍の値に取り R の値を変えて数値計算を行つて見た。その結果純正楕円に対して近似した楕円を得ている。この近似楕円は楕円歯車用ブランクとして何等差支えない程度の誤差を有するものであり第1表~第3表は

$$a = 100 \quad b = 94 \quad e^2 = 0.1164 \quad CP = \frac{a-b}{2} = 3$$

の場合に就いて x, y の値を (14) (15) より求めこれを純正楕円の動径 ρ と下式に依り $\frac{\delta}{\rho} \times 100\%$ を以て比較表示したものである。誤差 δ は次に示す (16) 式で表われ

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} - \frac{b}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}} = \delta \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

その変化は第 5 図に示すような中膨みの形をたどっている。しかして δ_{max} は $\theta=45^\circ$ 附近に存在し $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ では $\delta=0$ である。これ等の表に示す如く

R=45 第 1 表

θ	x	y	$\rho \sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{\rho' - \rho}{\rho} \times 100\%$
15°	96.185464	25.92682	99.6184	0.05
45°	68.554914	68.742106	97.0979	0.24
75°	24.447306	91.20757	94.4272	0.05
90°	0	94	94	0
0°	100	0	100	0

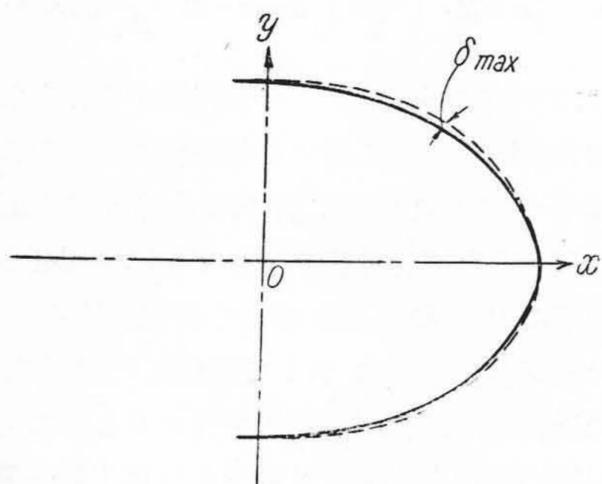
R=50 第 2 表

θ	x	y	$\rho \sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{\rho' - \rho}{\rho} \times 100\%$
15°	96.21257	25.82811	99.6192	0.055
45°	68.69515	68.61667	97.0941	0.23
75°	24.551299	91.18558	94.4329	0.055
90°	0	94	94	0
0°	100	0	100	0

R=55 第 3 表

θ	x	y	$\rho \sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{\rho' - \rho}{\rho} \times 100\%$
15°	96.23687	25.73660	99.61882	0.056
45°	68.83523	68.48045	97.09717	0.22
75°	24.64806	91.18532	94.43421	0.056
90°	0	94	94	0
0°	100	0	100	0

計算例 $a=100 \quad b=94 \quad \frac{a-b}{2}=3 \quad e^2=0.1164$

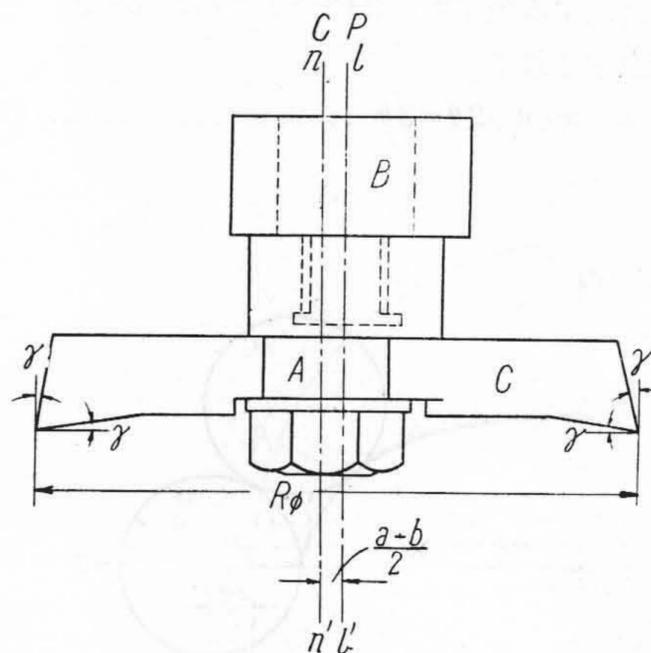


第 5 図 純正楕円よりの偏倚
Fig. 5. Deviation from Pure Ellipse

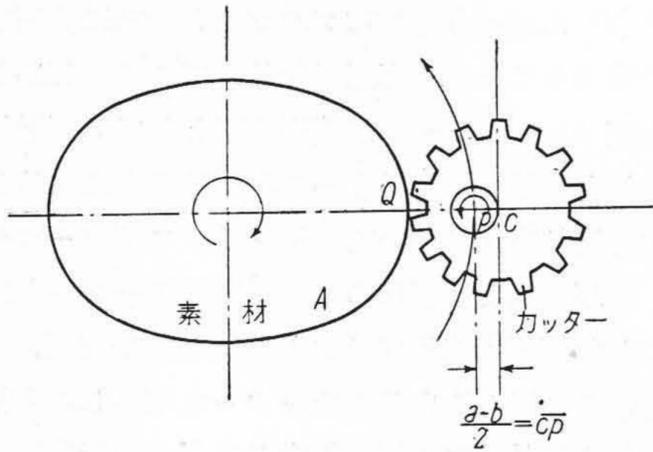
δ_{max} (%で表わしている)の値は動円の半径 R の増加に伴って漸次に極めて微小量づゝ減少している。これは後に示すカッターの工作に都合の良い条件を満足している。

〔III〕 上記原理を応用した楕円歯車用ブランク及び楕円歯車の工作法に就いて

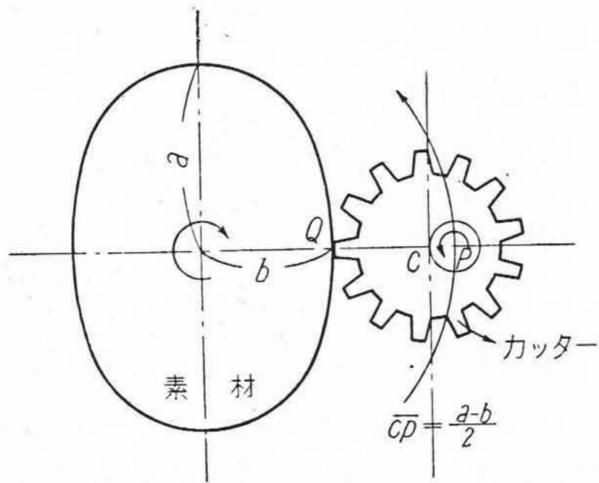
現在楕円歯車用ブランクとしては「ならい旋盤」又はオルダハム機構を有する特殊の旋盤等に依つて切削するか又は直接鑄放しの儘のものを用いている。これ等の場合を考察するに何れも皆相等の誤差は免れ得ぬ現状である。〔II〕(2) に述べた理論はその儘ギヤセーパーを用いて楕円歯車用ブランクの切削に利用し得るであろう。又上述の R の変動に対する緩慢なる δ の変化は後に詳述する丸型カッターの外径寸法が多少変化しても或はカッター使用中の磨滅に依る外径寸法の減少があつても楕円ブランクの形状は殆ど変らない事を意味するものである。これはカッターの作製特にカッターに掬角を普通に取り得る点、又は使用後の研磨を考えるに都合の良い条件を満足している。又動力伝達用楕円歯車の場合には心差率は更に小さく取るのが普通であるからその誤差は殆ど無視して差支えない。扱てギヤセーパー及びこれと同原理の歯切機械テーブル上に半径 $2a$ なる円ブランクを取付



第 6 図 偏 心 丸 型 カ ッ タ ー
A: カッター挿入部分 $\frac{a-b}{2}$ だけ偏心して居る
B: ギヤセーパースピンドルに嵌合される部分
C: 丸型カッター l' : スピンドルの回転中心線
 r : レーキ角 nn' : カッターの自転中心線
Fig. 6. Excentric Circular Type Cutter
A: Cutter Holder Excentricity Value is $\frac{a-b}{2}$
B: Gearshaper Spindle Holder
C: Circular Type Cutter
 l' : Rotating Center Line of Spindle
 nn' : Rotating Center Line of Cutter
 r : Rake Angle of Cutter



第 9 図(b) 長 径 側 谷 合 せ
Fig. 9.(b) Adjusting between the Valley of Pinion Cutter and Major Diameter Side of Elliptical Blank



第 9 図(c) 短 径 側 山 合 せ
Fig. 9.(c) Adjusting between the Mountain of Pinion Cutter and Minor Diameter side of Elliptical Blank

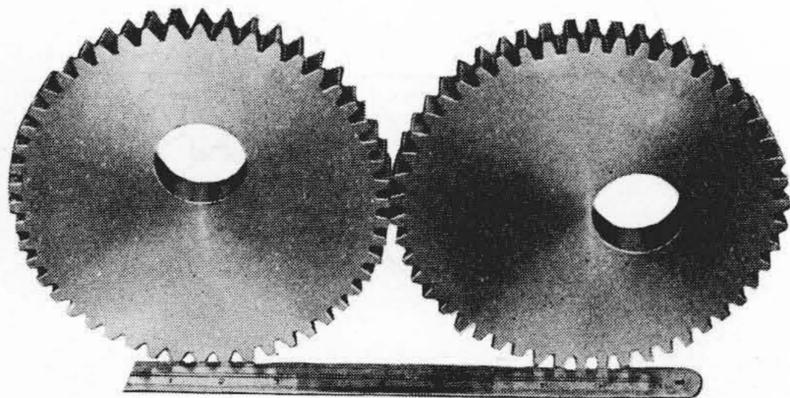
扱て今迄に説明したように楕円歯車を切削するに何等の複雑なる機構を用いずして〔II〕(2)に述べた原理をその儘利用して一般歯車を切削すると同様に定速度比の関係に依り削出し得るのである。

写真は独乙 ICKHOFF-製ダックビル用の楕円歯車の心差率より若干大きい心差率のものを採用して切削したものである。ICKHOFF-製楕円歯車の概要は

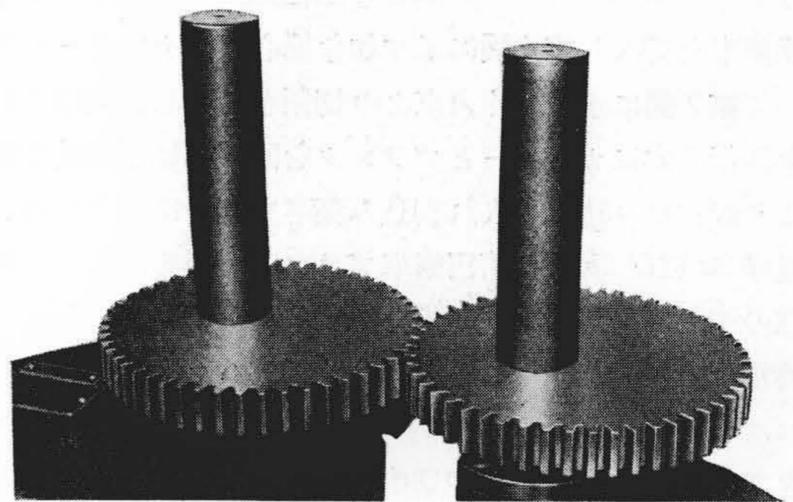
長径 $2a=390$ 短径 $2b=378$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.0635$$

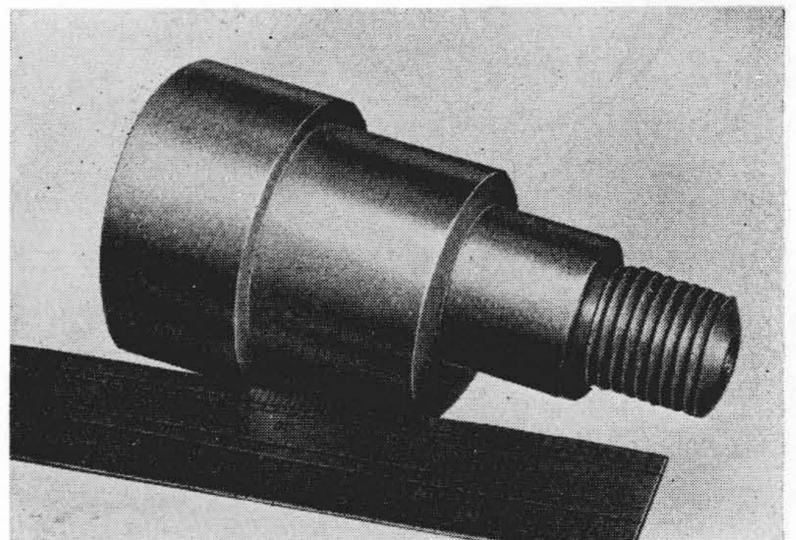
歯の大きさ $\cong 8M$ であり、切削実験例は



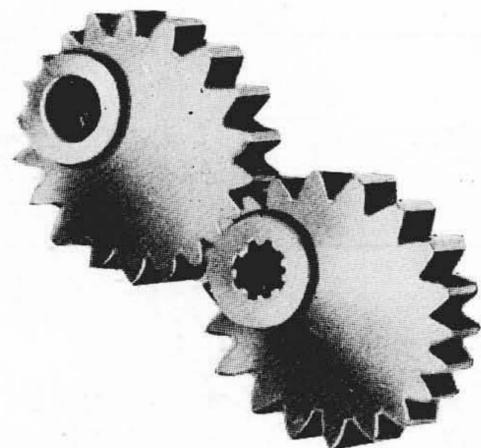
第 10 図 本切削法に依る楕円歯車
 $e^2=0.0711$ 4M $2a=216$ $2b=208$
Fig. 10. The Elliptical Gear, Cut by this Method
 $2a=216$ $2b=208$ $e^2=0.0711$ 4M



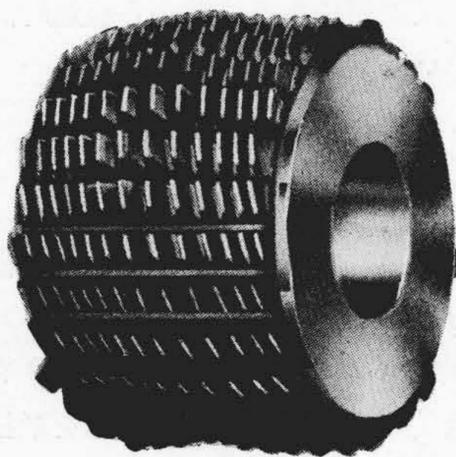
第 11 図 本切削法に依る楕円歯車相互の嚙合
○印は嚙合開始の歯
Fig. 11. The Meshing of Elliptical Gear, Cut by this Method
The Mark Shows the Initial Position of the Teeth for Meshing



第 12 図 カッターを挿入する為の偏心治具
Fig. 12. The Eccentric Cutter Holder



第 13 図(a) バーバークールマン会社の楕円歯車
用ホブ
Fig. 13.(a) The Elliptical Gear Hub made by
Berber Colman Co



第13図(b) 楕円歯車用ホブで切削した楕円歯車
Fig. 13.(b) The Elliptical Gear, Cut by Berbe Colman's Hub

長径 $2a=216$ 短径 $2b=208$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.0711$$

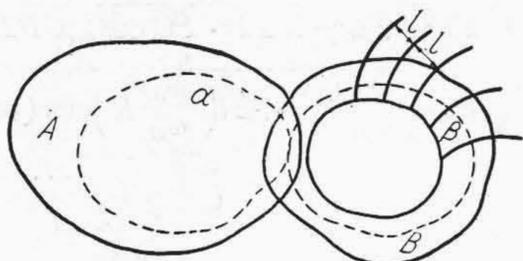
歯の大きさ $4M$

である。写真第10図はこの実験例のもの、第11図はこれが噛合った状況、第12図は偏心治具である。尙第13図(a)(b)は最近米国バーバークールマン会社が報告している楕円歯車用ホブ及びこれに依つて切削した楕円歯車である。

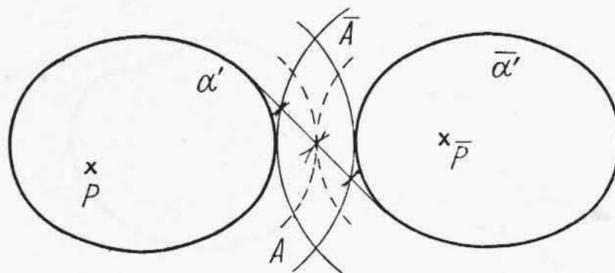
〔IV〕 本切削法に依り得た楕円歯車の機構学的噛合について

2つの平面図形A及びBが一つの平面内にあつて共に運動しているものとする。この時の図形BのAに対する運動を考えて見る。BのAに対する運動に於てその回転の一時中心の軌跡はAとBの双方に考えられる、Aの上の軌跡を α と呼びBの上の軌跡を β と呼ぶ。するとBのAに対する相対運動は α の上を β が滑る事なく転る運動に一致する。今Bの上に一群の平行曲線が乗つていと考える。この平行曲線群中相隣る2本の平行曲線の最短距離を l とすると β が α の上を転る時Aの上に出来る平行曲線群中の中相隣る2つの平行曲線の最短距離はやはり l でなければならない。(第14図参照)

扱てBをインボリュート歯型を有するピニオンカッターと考えればBに於ける平行曲線群はインボリュート曲



第14図 法線ピッチ l なるピニオン型カッターの創成運動
Fig. 14. Generating Motion of Pinion Type Cutter whose Normal Pitch is l

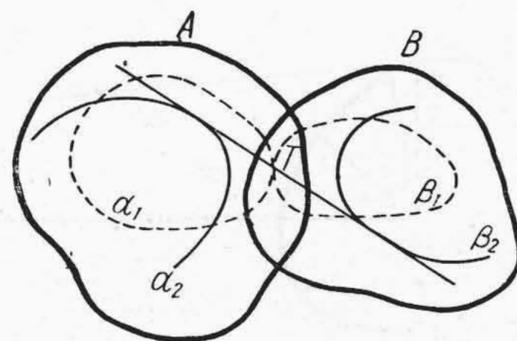


第15図 法線ピッチが双方とも l である二つの一般的噛合
Fig. 15. General Meshing between Two Gears whose Normal Pitch is l

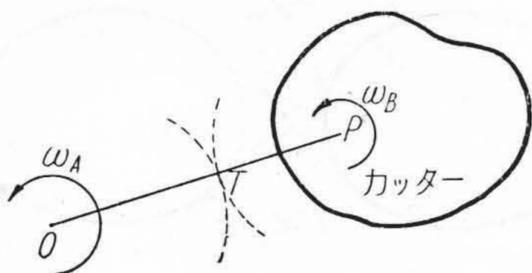
線群で l はこの場合の法線ピッチに相当する。Aを歯車素材と考えるとBに依つて創成されるA上の平行曲線は法線ピッチ l に等しい一つの曲線のインボリュートである。このインボリュートのエボリュートの追求は基礎曲線の追求として後章に詳述する。このようにして得られたAのインボリュートのエボリュートを α' とし、同一のカッターBで創成された素材 \bar{A} のインボリュートのエボリュートを $\bar{\alpha}'$ とする。この時の噛合に於て第15図に示せるP及び \bar{P} はA及び \bar{A} 内の任意の点とし、A及び \bar{A} はP及び \bar{P} の廻りをそれぞれ自由に回転し得るものとする。するとAと \bar{A} の噛合いは丁度糸捲機に於ける糸の捲取り繰出しの関係と同じである。これはA及び \bar{A} の法線ピッチが全て相等しいインボリュートである事よりも直ちに判明する。結局本切削法に依り得た一對の楕円歯車A及び \bar{A} は機構学的に何等支障なく噛合い得る一對の歯車であることが解る。

〔V〕 本切削法に依る場合の創成刻み曲線及び創成基礎曲線の追求

カッターBと創成ブランクAの運動に就いて考えるに前節で説明したようにAに出来る平行曲線は法線ピッチ l であるようなエボリュート α_2 に対するインボリュートである α_1, β_1 は創成刻み曲線である(第16図参照)或隣



第16図 基礎曲線(エボリュート)への共通切線と刻み点との関係
Fig. 16. Relation between Community Tangent of Base Curve (=Evolute) and Pitch Point



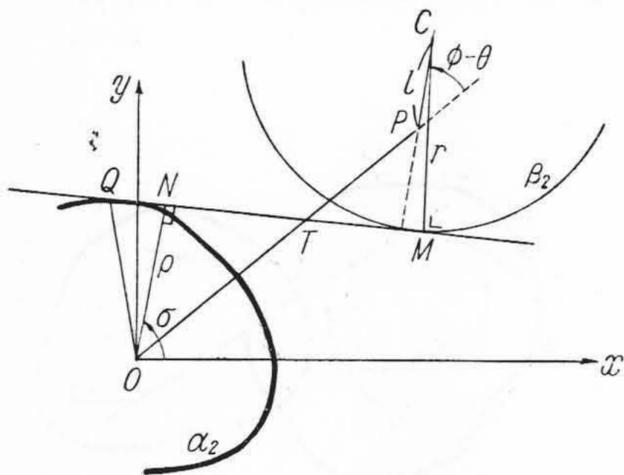
第 17 図 カッターとブランクとの角速度の関係
Fig. 17. Relation of Anguler Velocity between Cutter and Blank in this Method

間に於けるエボリュート α_2 及び β_2 の共通切線は α_1 及び β_1 の接触点、即ちピッチポイント T を通過する筈である。此処で β_2 は平歯車用ピニオンカッター B の基礎曲線でありこれは円である、又 B の β_1 はこれも円でありこれはカッターの刻み曲線である。第 17 図に於て本切削法に依るとカッター B 上の定点 P はブランク A 上の定点 O の廻りに角速度 ω_A で半径 R の円を描いて運動し、 B は P 点の廻りに同じ方向に定角速度 ω_B で回転する場合を考えれば第 17 図を参照して

$$\begin{aligned} \overline{OT} \cdot \omega_A &= -\overline{PT} \cdot \omega_B \\ -(R - \overline{OT}) \cdot \omega_B &= \overline{OT} \cdot \omega_A \end{aligned}$$

$$\text{故に } \overline{OT} = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_B} R \dots\dots\dots(18)$$

となる。 \overline{OP} 上の点 T の相対平面運動の回転の一時中心となる。従つて A 上の軌跡である α_1 は O を中心とする半径 $\frac{(\omega_B - \omega_A)}{\omega_B} R$ の円となりカッター B 上の T の軌跡である β_1 は P を中心とする半径 $\frac{\omega_A}{\omega_B} \cdot R$ の円となる。これで本切削に依る場合の創成刻み曲線が求まつた事になる。次に創成基礎曲線 α_2 を求めよう。第 18 図を参照して点 O, P, C が一直線上に座し且つ P 点に関し



第 18 図 偏心ピニオンカッターと創成基礎曲線 (エボリュートに相等) との関係
Fig. 18. Relation between the Pinion Cutter and Generating Base Curve (Equal to Evolute in this Method)

て C が O の反対側にある位置から経過時間 t を測る事にすると

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \omega_A \cdot t \\ \phi &= \omega_B \cdot t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

T を通り曲線 β_2 に一つの切線 TM を引き曲線 β_2 と M 点接触させる。 O より TM へ下した垂線の足を N とする。 $t=0$ の時の OP の位置を原線とし O を極として切線極座標表示 (ρ, σ) に依りこの問題を取扱つて行くことにする。第 18 図に於て $\overline{ON} = \rho \overline{ON}$ と原線 ox とのなす角を σ で表わす。今 $PC = e$ とすると偏心点 P と C との距離は $l = \frac{a-b}{2}$ に依つて表わし得る。今三角形 TPC より

$$\angle PTC = \sin^{-1} \frac{l \sin(\phi - \theta)}{TC} \dots\dots\dots(20)$$

又直角三角形 TMC より

$$\angle MTC = \sin^{-1} \frac{r}{TC} \dots\dots\dots(21)$$

r はカッター B の基礎円の半径である。

第 18 図を参照して

$$\begin{aligned} \angle TON &= 90^\circ - \angle NTO = 90^\circ - (\angle MTC - \angle PTC) \\ &= 90^\circ - \sin^{-1} \frac{r}{TC} + \sin^{-1} \frac{l \sin(\phi - \theta)}{TC} \end{aligned} \dots\dots\dots(22)$$

結局 σ は

$$\sigma = 90^\circ + \theta - \sin^{-1} \frac{r}{TC} + \sin^{-1} \frac{l \sin(\phi - \theta)}{TC} \dots\dots\dots(23)$$

$ON = \rho$ の値は次のもので表わし得る

$$\begin{aligned} \rho &= \overline{OT} \cos \angle TON \\ &= \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_A} R \sin \left[\sin^{-1} \frac{r}{TC} - \sin^{-1} \frac{l \sin(\phi - \theta)}{TC} \right] = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_B} R \cos(\sigma - \theta) \end{aligned} \dots\dots\dots(24)$$

\overline{TC} の長さは次のもので与えられる

$$\begin{aligned} \overline{TC} &= \sqrt{\overline{TP}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \overline{TP} \cdot \overline{PC} \cos \angle CPT} \\ &= \sqrt{l^2 + \left(\frac{\omega_A}{\omega_B} R \right)^2 + 2l \left(\frac{\omega_A}{\omega_B} R \right) \cos(\phi - \theta)} \end{aligned} \dots\dots\dots(25)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{TC}}{dt} &= - \frac{\omega_A (\omega_B - \omega_A) R \cdot l}{\omega_B \cdot \overline{TC}^2} \sin(\phi - \theta) \\ \frac{d}{dt} \sin^{-1} \frac{r}{TC} &= \frac{\omega_A (\omega_B - \omega_A) R \cdot r \cdot l}{\omega_B \overline{TC}^3 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{TC} \right)^2}} \sin(\phi - \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin^{-1} \frac{l \sin(\phi-\theta)}{TC} &= \frac{l \frac{d}{dt} \frac{\sin(\phi-\theta)}{TC}}{\sqrt{1-\frac{l^2 \sin^2(\phi-\theta)}{TC^2}}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1-\frac{l^2 \sin^2(\phi-\theta)}{TC^2}}} \left[\frac{\omega_A(\omega_B-\omega_A)}{\omega_B TC^3} R \cdot l \sin^2(\phi-\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega_B-\omega_A) \cos(\phi-\theta)}{TC} \right] \end{aligned}$$

(24) 式を σ で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\sigma} &= -\frac{\omega_B-\omega_A}{\omega_B} R \left(1-\frac{d\theta}{d\sigma}\right) \sin(\sigma-\theta) \dots (26) \\ \frac{d\delta}{d\theta} &= \frac{1}{\omega_A} \frac{d\sigma}{dt} = 1 - \frac{1}{\omega_A} \frac{d}{dt} \sin^{-1} \frac{r}{TC} \\ &\quad + \frac{1}{\omega_A} \frac{d}{dt} \sin^{-1} \frac{l \sin(\phi-\theta)}{TC} \end{aligned}$$

すると結局

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= 1 - \frac{(\omega_B-\omega_A)l}{\omega_B TC} \left[\frac{\omega_A \cdot R \cdot r \sin(\phi-\theta)}{\omega_B TC^2 \sqrt{1-\frac{r^2}{TC^2}}} \right. \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{l^2 \sin^2(\phi-\theta)}{TC^2}}} \left\{ \frac{\omega_A R \cdot l \sin^2(\phi-\theta)}{\omega_B TC^2} \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos(\phi-\theta) \right\} \right] \dots (27) \end{aligned}$$

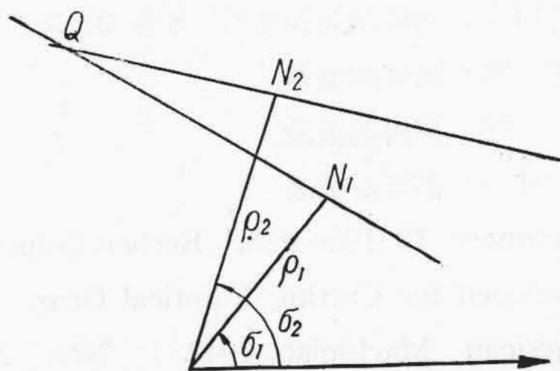
依つて以上求めた $\rho, \sigma, \frac{d\rho}{d\sigma}$ の値を以下に述べる (28) 式に代入すれば創成基礎曲線を x, y 表示に依つて求められる。

一般に切線極座標を x, y に依つて表示すると

$$\begin{cases} x = \rho \cos \sigma - \frac{d\rho}{d\sigma} \sin \sigma \\ y = \rho \sin \sigma + \frac{d\rho}{d\sigma} \cos \sigma \end{cases} \dots (28)$$

以上求めた諸式に依り特別な場合として $l=0$ の場合、即ちカッター偏心 O として計算して見ると

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(\omega_B-\omega_A)}{\omega_B} R \sin \left(\sin^{-1} \frac{r}{\frac{\omega_A}{\omega_B} R} \right) \\ &= \frac{(\omega_B-\omega_A) R}{\omega_B} \frac{\omega_B \cdot r}{\omega_A \cdot R} = \frac{\omega_B-\omega_A}{\omega_A} \cdot r \end{aligned}$$



第19図 二つの共通切線の交点
Fig. 19. Intersection Point of Two Community Tangent Lines

即ち ρ は δ に無関係に一定値 $\left(\frac{\omega_B-\omega_A}{\omega_A}\right)r$ を取る即ち α_2 が座標 O を中心として $\frac{\omega_B-\omega_A}{\omega_A}r$ を半径とする円である事に帰着する結局これは平歯車をピニオンカッターで正規に切削した場合に一致する。以上求めた基礎曲線を更に数値計算に依り検討して見る。第19図の如く直線 $(\rho_1\sigma_1), (\rho_2\sigma_2)$ のそれぞれ交点を Q とすると

$$\angle N_1QN_2 = \angle N_1ON_2 = \sigma_2 - \sigma_1$$

故に

$$\begin{cases} \overline{N_1Q} = \frac{\rho_2 - \rho_1 \cos(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sin(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ \overline{N_2Q} = \frac{\rho_2 \cos(\sigma_2 - \sigma_1) - \rho_1}{\sin(\sigma_2 - \sigma_1)} \end{cases} \dots (29)$$

又直線 $(\rho_1\sigma_1)$ と曲線 α_2 との接点を Q_1 、直線 (ρ_2, σ_2) と曲線 α_2 との接点を Q_2 とすると第20図に示す $\overline{QQ_1}, \overline{QQ_2}$ の値は下記の如くなる。

$$\begin{cases} \left[\frac{d\rho}{d\sigma} \right]_{\theta=\alpha} - \overline{N_1Q} = \overline{QQ_1} \\ \left[\frac{d\rho}{d\sigma} \right]_{\theta=\alpha'} - \overline{N_2Q} = \overline{QQ_2} \end{cases} \dots (30)$$

(29), (30) を用いて計算に便なる $a=2, b=1$ なる場合に就て計算を行つてみよう。すると $\frac{a-b}{2} = 0.5$

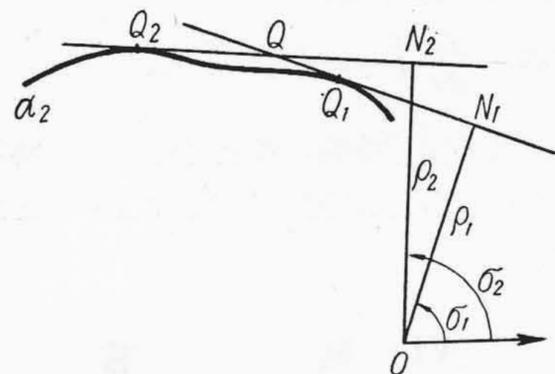
$$\overline{N_1Q} = 0.0904701 \quad \overline{N_2Q} = -0.716212$$

$$\left[\frac{d\rho}{d\sigma} \right]_{\theta=0} - \overline{N_1Q} = \overline{QQ_1} = -0.638641$$

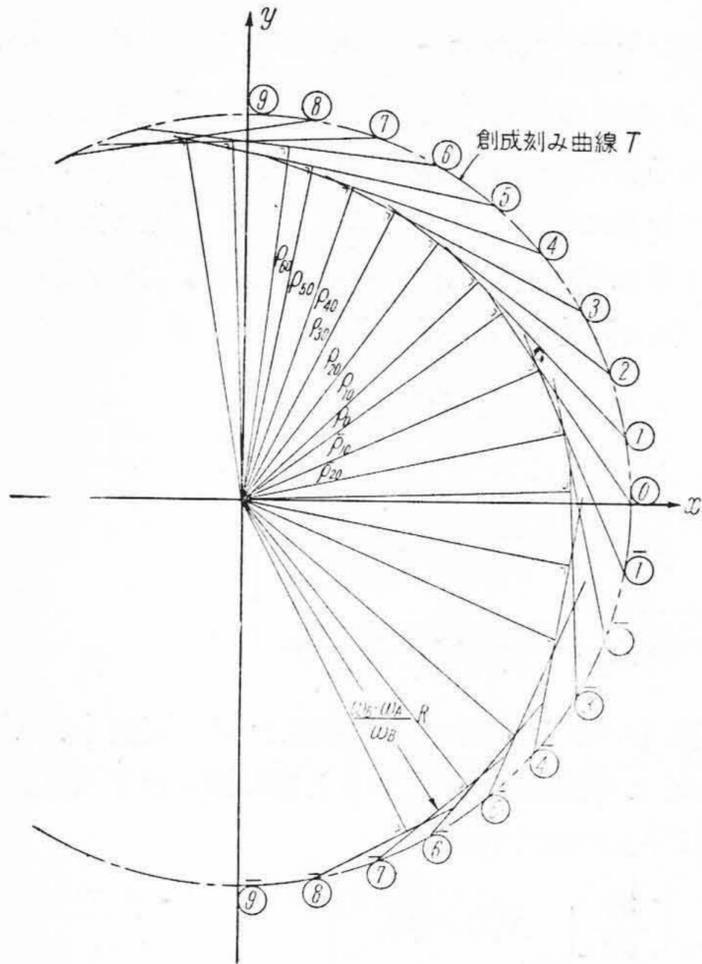
$$\left[\frac{d\rho}{d\sigma} \right]_{\theta=45} - \overline{N_2Q} = \overline{QQ_2} = 2.97456$$

上の結果より $\overline{QQ_1} \neq \overline{QQ_2}$ となる。これは明らかに本切削法に依るエボリュートは $l \neq 0$ なる一般の場合には円とはならない事を意味している。

扱て(28)式よりエボリュート α_2 を数値計算する事は仲々に面倒である、これを図式解法に依り求めた。



第20図 共通切線の交点とその切点の関係
Fig. 20. Relation between the Intersection of Two Community Tangent and It's Contact Point



第 21 図 創成基礎曲線 (エボリュート) の図式表示

Fig. 21. The Evolute of this Elliptical Gear by Graphical Method

創成刻み曲線は円であるから (23) 式より σ を求め (24) 式より ρ を計算すると第 21 図に示すように $\odot N_0, \textcircled{1} N_1, \textcircled{2} N_2, \dots, \textcircled{n} N_n$ の包絡線として求められるしかしてこれ等の直線は必ず刻み点 T を通過している筈である。結局第 21 図に示すような座標 x, y に関しては対称ではなく原点 O に関して点対称なる如き閉曲線となる。又このエボリュートより巻き出された歯型は第 19 図を参照して $\overline{OQ} = \rho'$

とすると

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2}$$

歯型上の任意の一点を H とするとこれを原点 O に関する極座標表示を以て表わせば

$$\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \rho' d\theta - \frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 + \rho^2 = \rho_x^2 \dots \dots \dots (31)$$

(31) 式が求める歯型曲線の表示式である。特別なる場合 $l=0$ とすればこれは円のインボリュートとなる事は論を待たない。

〔VI〕 結 言

(1) 前文に述べた切削原理に依り長半径及び短半径がそれぞれ a, b なる楕円歯車ブランクを削出するには

フエロース式ギヤショーパー若くはこれと同原理の機械を用い、そのスピンドル中心に対し半径 R なる丸型カッターを $\frac{a-b}{2}$ なる偏心量を以て取付けカッター側と円ブランクを取付けたテーブル側との回転比が 2:1 なる如くし機械の運転を開始し $\frac{a-b}{2}$ なる切込み深さに漸次切削すれば外径 $2a\phi$ なる円ブランクより所要の楕円ブランクを削出するに至る

但し $R \approx -\frac{a}{2} \pm \Delta \quad (\Delta \approx \pm 3)$

(2) 機構学的に支障なく噛合う歯数 Z なる楕円歯車を削出するには歯数 $\frac{Z}{2}$ なる平歯車用ピニオンカッターを用い前文に述べた原理に基き前と同様にカッターを $\frac{a-b}{2}$ の偏心量を以てスピンドルに取付けカッター側とブランクを乗せたテーブル側との回転比を 2:1 なる如くし切削開始の位置を所定通りに定め機械の運転を開始して切削を行えば所要切込み深さに於て楕円歯車の歯切りを完了し得る。

(3) 楕円歯車創成時の刻み曲線は双方とも円となる。しかして創成時のエボリュートは原点に対して点対称なる閉曲線である。結局本切削法に依る楕円歯車はこの閉曲線から捲出されたインボリュートである。

尙紙面の関係上楕円歯車相互の噛合い時に於ける回転角及び噛合刻み曲線、偏心歯車との理論的考察及びバックラッシュ、干渉及び回転比、原理を全く同じにし且つカッターとラブルとの瞬間角速度比がテーブル一回転中に偶数回変るような変速切削法に関しては第二報以降に譲る。尙本研究を進めるに当り終始懇切なる御指導と御鞭撻を賜つた東北大学松山多賀一教授に対し深甚なる謝意を表す。又御討論に勞を煩わした山形大学石田喜助教授に対し謝意を表す。

参 考 文 献

- (1) 松山多賀一：機械学会論文集 8 卷 31 号
- (2) 松山多賀一：機械学会第 28 期総会前刷
- (3) 石田喜助：機械学会論文集 15 卷 50 号
- (4) 石田喜助：機械学会論文集 17 卷 59 号
- (5) 藤井康治：機械学会論文集 8 卷 31 号
- (6) 渡辺 茂：歯車歯型論
- (7) 友近 晋：楕円函数論
- (8) 林 桂一：高等函数表
- (9) Machinery 12 1950-213. Berber Colman Hob Developed for Cutting Elliptical Gear.
- (10) American Machinist 1949. New Method Simplifies Construction of Elliptic Involute.