

楕円歯車の研究 (第2報)

笠原俊郎*

Study of Elliptic Gear (Part 2)

By Toshirō Kasahara

Kameari Works, Hitachi, Ltd.

Abstract

In the Part 1 of the article given out in Vol. 35, No. 2 issue, the writer dealt with the simplified machining method for the approximate elliptic gear by means of conventional Fellows type gear shaper and eccentric gear cutter.

As a sequel to the above, the writer relates of the investigation in which he made sure that the inequality of gear teeth machined in the above method is chiefly attributable to the slip (or a shift from a velocity curve expected for an elliptic gear), and discussed such a transmission gear cutting method by which the angle velocity of a blank is varied in a curve similar to sine wave in a one cycle of rotation so that uniform teeth are cut throughout the periphery.

This method, however, has no difference with the method published in Part 1 in the principle of cutting. And to avoid the complication of the mechanism and, at the same time, not to sacrifice the performance of the machine, the gear shaper table metal is equipped with a speed changing device, which is easy to mount or dismount.

Further, for securing changing speed, such an elliptic gear has been taken into use that shows a movement most approximate to the theoretical curve.

Discussion is also made for rotating angle and notching curve drawn by two elliptic gears which are cut by the method in the report Part 1.

〔I〕 緒 言

第1報に述べた研究は偏心ピニオンカッターを用いてブランクとカッターの回転角が常に 1:2 であるようにフェロー式ギャセーパー及びこれと同種の歯切機械に換歯車を挿入して近似楕円歯車を工作する事であつた。本論の冒頭に於て上記の場合の楕円歯車相互の噛合回転角の關係に就いて一応追求した。扱つてこの方法で歯切りした楕円歯車は小離心率のものに於ては頗る簡単な歯切り法であるが、第26図で示すように楕円周上の歯形が一樣でない。即ち楕円の長径側の歯形は丁度圧力角が増大しその結果歯は太つている。これに反して短径側の歯形

は圧力角が減少した瘦せた歯形になる。このために噛合いは或程度の干渉は避けられず噛合中の背隙の量は変動する。これはカッターとブランクの間に滑りが存在するためであり、筆者はこの滑りを無くすために必要な理論的変速運動に就いて研究した。原理は第1報のものと全く同じであり、但しブランクが一回転する間に正弦的な変速運動を与えて今迄の歯形の不均一を均一にした。又本研究の主旨とする機械に改造を加えないという点及び廉価に短時間に歯切りを完了するという点を考え現在のギャセーパーに取付け取外し自由なる変速切削装置を考案し、ギャセーパー自体の機能を減殺させる事の無いようにした。(本件は昭和28年3月特許を出願中のもの)

* 日立製作所亀有工場

〔II〕 等速切削法に依る楕円歯車相互の
噛合関係に就いて

第 1 報に於て求めた楕円歯車の噛合に就いてこの回転角を求める。今後第 1 報に於ける歯切法を等速切削法と呼び本論に述べる歯切法を变速切削法と呼ぶことにする。一般に法線刻みの等しいインボリュート歯車の噛合に於てこれは歯型曲線であるインボリュートを糸巻きのプロフィールと見做すと糸巻きから糸巻きへ糸を巻き取る時の運動と考える。第 22 図を参照して点 O を極とする切線極座標で前報のエボリュートを表わすと $\rho=f(\sigma)$ で表わされる。今新しい \bar{O} を極とする法線極座標を $(\bar{\rho}, \sigma)$ で表わすと

$$\bar{\rho}=\rho-a \cos \sigma-b \sin \sigma \quad \text{となり}$$

相噛合う 2 つの歯車を考えその一方の歯車に就いての諸量をサフィックス 1 を附して表わし、相手歯車に 2 を附して表わすと

$$\bar{\rho}_1=f_1(\sigma_1) \dots\dots\dots(32)$$

$$\bar{\rho}_2=f_2(\sigma_2) \dots\dots\dots(33)$$

すると

$$\rho_1=f_1(\sigma_1)-a_1 \cos \sigma_1-b_1 \sin \sigma_1 \dots\dots\dots(34)$$

$$\rho_2=f_2(\sigma_2)-a_2 \cos \sigma_2-b_2 \sin \sigma_2 \dots\dots\dots(35)$$

L を噛合中心距離、 $\Psi_1 = \Psi_2$ を I, II 歯車の回転角として以下 Ψ_1, Ψ_2 を求める。

$$\frac{d\Psi_1}{dt} \Big/ \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \dots\dots\dots(36)$$

$$\sigma_2+\Psi_2=\sigma_1-\Psi_1 \dots\dots\dots(37)$$

第 24 図を参照して

$$\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2=\bar{O}_1\bar{O}_2 \cos (\sigma_1-\Psi_1)=L \cos (\sigma_1-\Psi_1) \dots\dots(38)$$

上式を微分して

$$d\bar{\rho}_1+d\bar{\rho}_2=-L(d\sigma_1-d\Psi_1) \sin (\sigma_1-\Psi_1)$$

すると

$$d\Psi_1=d\sigma_1+\frac{d(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{L \sin (\sigma_1-\Psi_1)}$$

$$d\Psi_2=-d\sigma_2-\frac{d(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{L \sin (\sigma_2+\Psi_2)}$$

又 (36) 式より

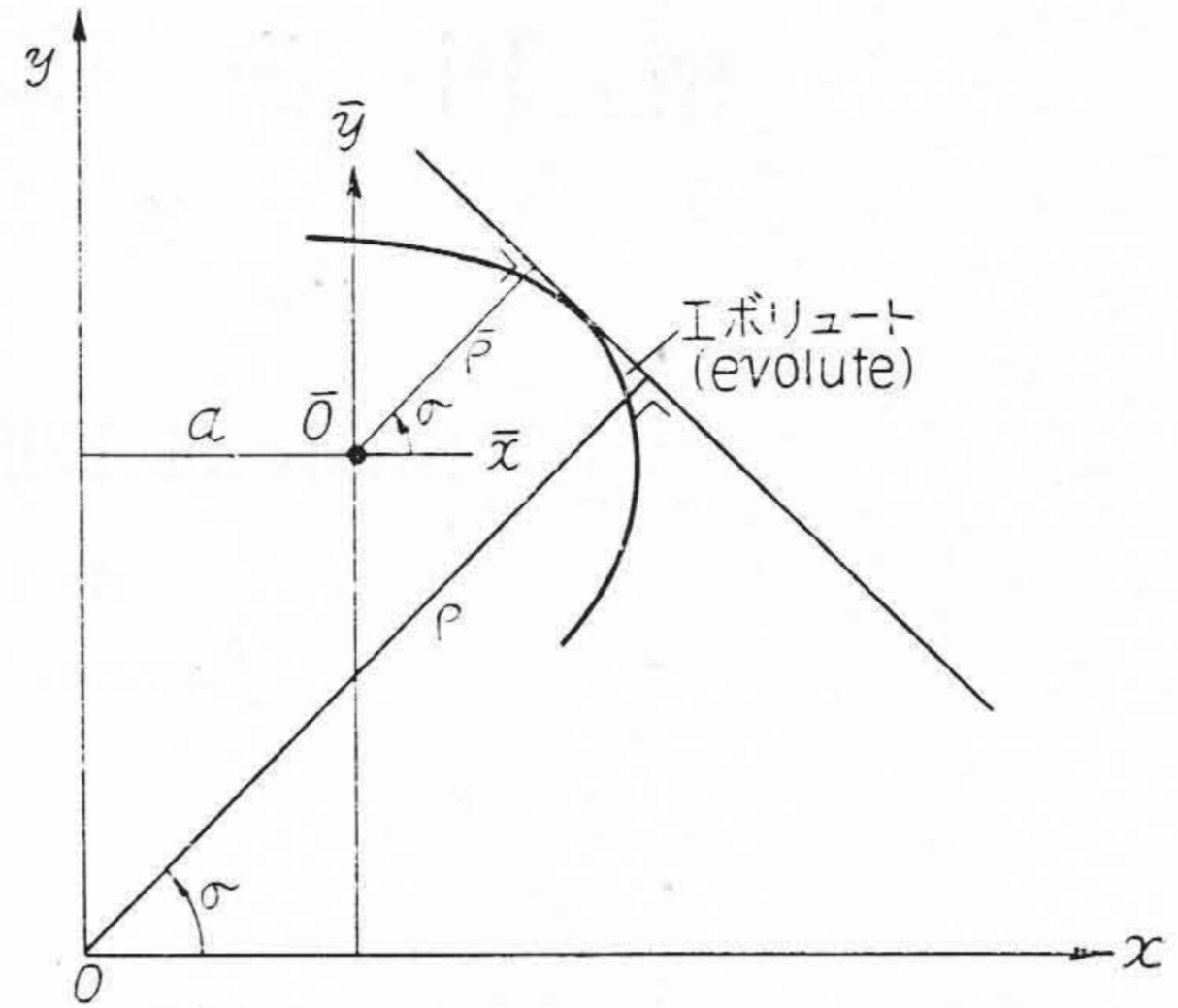
$$\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1}=\frac{d\sigma_1+\frac{d(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{L \sin (\sigma_1-\Psi_1)}}{-d\sigma_2-\frac{d(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{L \sin (\sigma_2+\Psi_2)}}$$

(37) 式との関係より

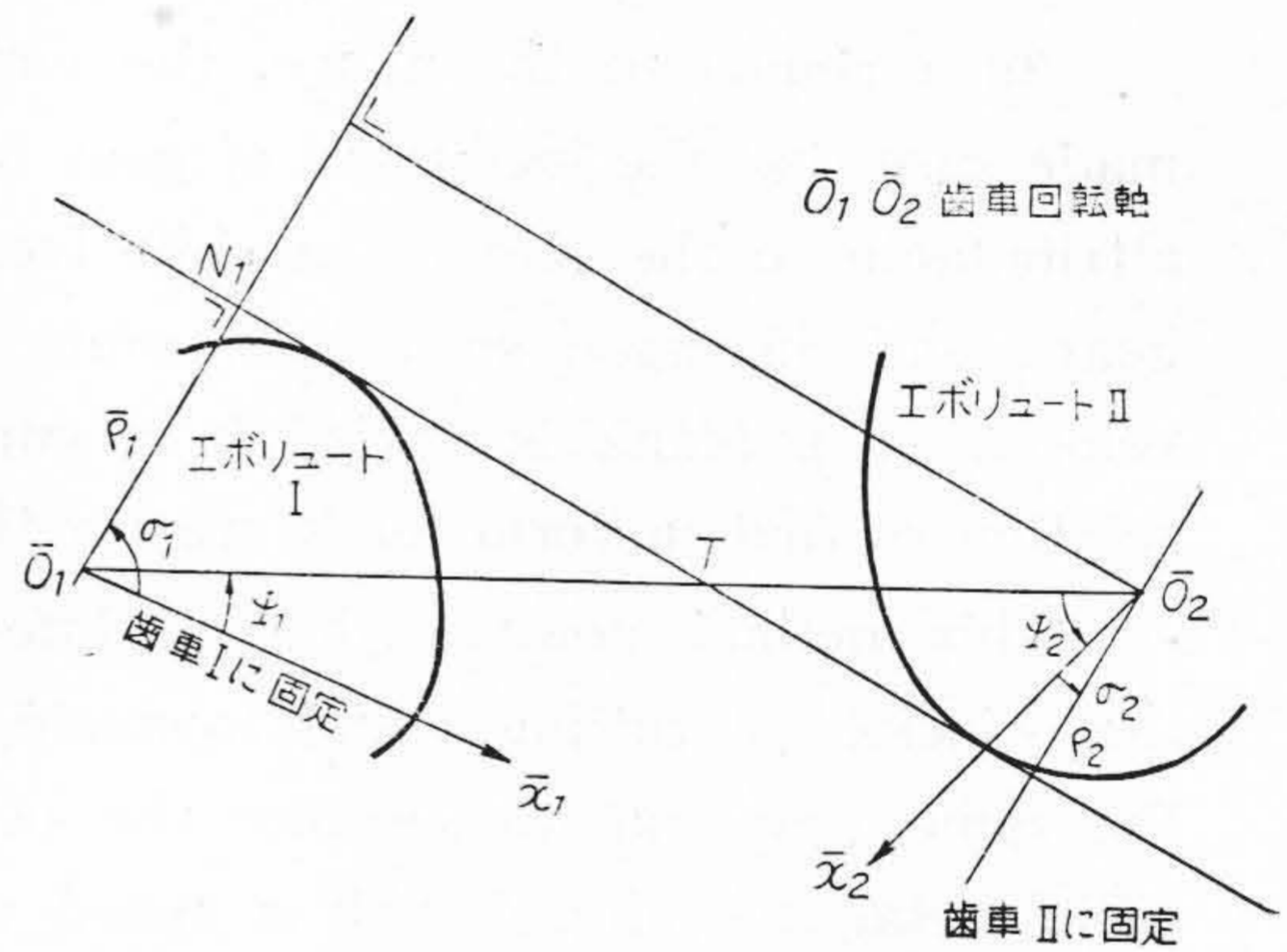
$$\bar{\rho}_1 d\sigma_1+\bar{\rho}_2 d\sigma_2+(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2) \frac{d(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{L \sin (\sigma_1-\Psi_1)}=0$$

$$\bar{\rho}_1 d\sigma_1+\bar{\rho}_2 d\sigma_2=L \cos (\sigma_1-\Psi_1)(d\sigma_1-d\Psi_1)$$

$$\int \bar{\rho}_1 d\sigma_1+\int \bar{\rho}_2 d\sigma_2=L \sin (\sigma_1-\Psi_1)+K \dots\dots(39)$$



第 22 図 基礎曲線の座標変換
Fig. 22. Change of Coordinate in Evolute



第 23 図 I 歯車と II 歯車との回転角の関係
Fig. 23. Relation of Rotating Angle in I-Gear and II-Gear

K は初期条件を与えれば定まる積分常数である。(38)

(39) 式より

$$(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)^2+(\int \bar{\rho}_1 d\sigma_1+\int \bar{\rho}_2 d\sigma_2-K)^2=L^2 \dots\dots(40)$$

(40)式を満足する σ_1, σ_2 を求めればこれを (38), (37)式に代入することに依り Ψ_1, Ψ_2 を求める事が出来る。尚 Ψ_1, Ψ_2 が定れば噛合に於ける接触点の軌跡 p_1, p_2 は次式に依つて求められる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \bar{\rho}_1 \operatorname{cosec} (\sigma_1-\Psi_1) \\ p_2 &= \bar{\rho}_2 \operatorname{cosec} (\sigma_2+\Psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

擬本切削法で求めた楕円歯車の場合には上記一般式に対して次の如くなる。

$$a_1=a \quad b_1=0 \quad a_2=-a \quad b_2=0$$

故に (34), (35) 式より

$$\bar{\rho}_1=f_1(\sigma_1)-a \cos \sigma_1=\rho_1-a \cos \sigma_1 \dots\dots\dots(34')$$

$$\bar{\rho}_2=f_2(\sigma_2)+a \cos \sigma_2=\rho_2+a \cos \sigma_2 \dots\dots\dots(35')$$

故に

$$\int \bar{\rho}_1 d\sigma_1 + \int \bar{\rho}_2 d\sigma_1 = \int \rho_1 d\sigma_1 + \int \rho_2 d\sigma_2 - a(\sin\sigma_1 - \sin\sigma_2) + K \dots\dots (42)$$

又第1報より

$$\tau_1 = l^2 + \frac{1}{9}R^2 + \frac{2}{3}Rl \cos 2\theta_1 \dots\dots (43)$$

$$\tau_2 = l^2 + \frac{1}{9}R^2 + \frac{2}{3}Rl \cos 2\theta_2 \dots\dots (44)$$

$$\rho_1 = \frac{2}{3}R \cos(\sigma_1 - \theta_1) \dots\dots (45)$$

$$\rho_2 = \frac{2}{3}R \cos(\sigma_2 - \theta_2) \dots\dots (46)$$

又 ρ の値を τ を含めた一般式で表わすと次の如くなる。

$$\rho = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_B} R \frac{1}{\tau} \left[\frac{\omega_B \gamma}{2\omega_A R} \left(\tau - l^2 + \frac{\omega_A^2}{\omega_B^2} R^2 \right) \pm \sqrt{(\tau - \gamma)^2 \left\{ l^2 - \frac{\omega_B^2}{4\omega_A^2 R^2} \left(\tau - l^2 - \frac{\omega_A^2}{\omega_B^2} R^2 \right)^2 \right\}} \right]$$

而して $\omega_B : \omega_A = 3 : 1$ を代入すると O の各範囲に於て次の如くなる。但し途中の誘導式は省略して結果のみを示す。

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ の時 } \delta_1 = +1 \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ の時 } \delta_1 = -1$$

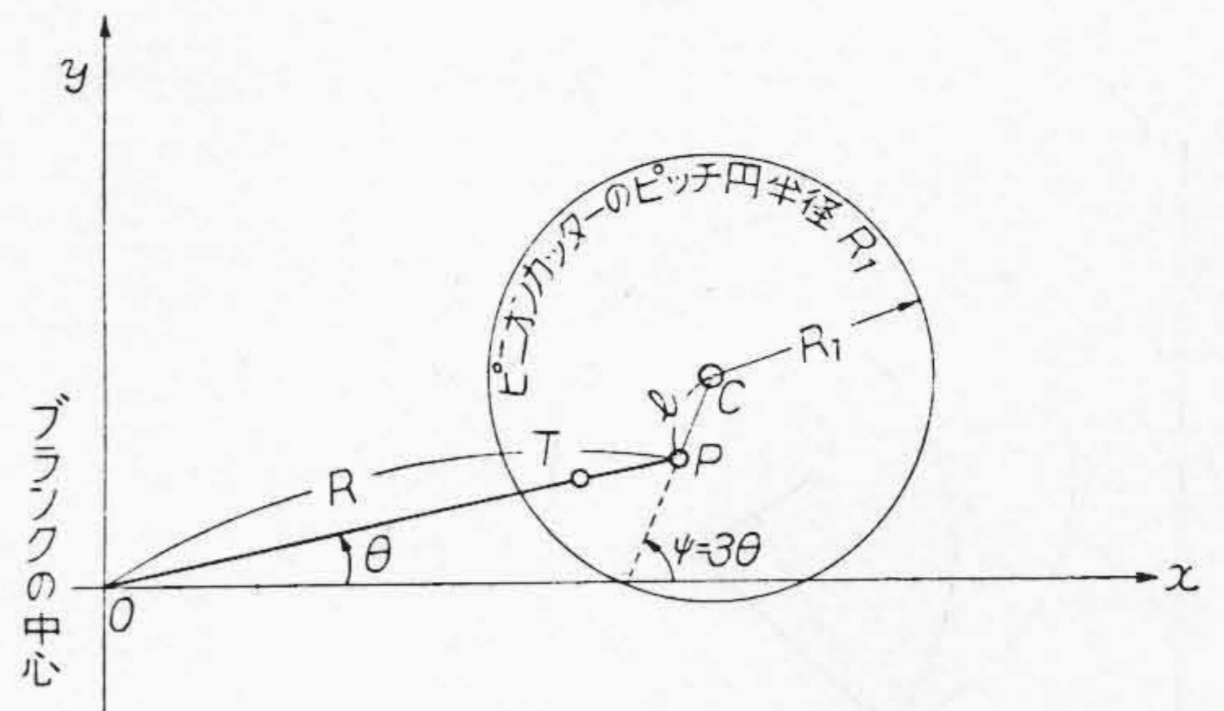
$$\rho_1 = \frac{\gamma}{\tau_1} \left(\tau_1 - l^2 + \frac{R^2}{9} \right) + \delta_1 \sqrt{(\tau_1 - \gamma^2) \left\{ \tau_1 - \left(\frac{R}{3} - l \right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{R}{3} + l \right)^2 - \tau_1 \right\}} \dots\dots (47)$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ の時 } \delta_2 = +1 \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ の時 } \delta_2 = -1$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma}{\tau_2} \left(\tau_2 - l^2 + \frac{R^2}{9} \right) + \delta_2 \sqrt{(\tau_2 - \gamma^2) \left\{ \tau_2 - \left(\frac{R}{3} - l \right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{R}{3} + l \right)^2 - \tau_2 \right\}} \dots\dots (48)$$

すると $\int \rho a \sigma$ の値は θ の上記範囲に於て次の結果で与えられる。

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \int \rho a \sigma = & \sqrt{\frac{4R^2}{9} - \rho^2} + \gamma^2 \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{(R/3+l)^2 - \tau}{\tau - (R/3-l)^2}} \right. \\ & + \tan^{-1} \left\{ \frac{R/3-l}{R/3+l} \sqrt{\frac{(R/3+l)^2 - \tau}{\tau - (R/3-l)^2}} \right\} \\ & - \sqrt{\left(\frac{R}{3} + l \right)^2 - \gamma^2} + \gamma \tan^{-1} \frac{\sqrt{(R/3+l)^2 - \gamma^2}}{\gamma} \\ & \left. + \sqrt{\tau - \gamma^2} - \gamma \tan^{-1} \frac{\sqrt{\tau - \gamma^2}}{\gamma} \dots\dots (49) \right] \end{aligned}$$



第24図 創成中に於ける偏心カッターの位置
Fig. 24. Position of Eccentric Cutter in Generating

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$$

$$\begin{aligned} \int \rho d\sigma = & \sqrt{\frac{4R^2}{9} - \rho^2} + \gamma^2 \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{(R/3+l)^2 - \tau}{\tau - (R/3-l)^2}} \right. \\ & + \tan^{-1} \left\{ \frac{R/3-l}{R/3+l} \sqrt{\frac{(R/3+l)^2 - \tau}{\tau - (R/3-l)^2}} \right\} \\ & + 2\sqrt{\left(\frac{R}{3} - l \right)^2 - \gamma^2} - 2\gamma \tan^{-1} \frac{\sqrt{(R/3-l)^2 - \gamma^2}}{\gamma} \\ & + \gamma \tan^{-1} \frac{\sqrt{(R/3+l)^2 - \gamma^2}}{\gamma} - \sqrt{\tau - \gamma^2} \\ & \left. + \gamma \tan^{-1} \frac{\sqrt{\tau - \gamma^2}}{\gamma} \dots\dots (50) \right] \end{aligned}$$

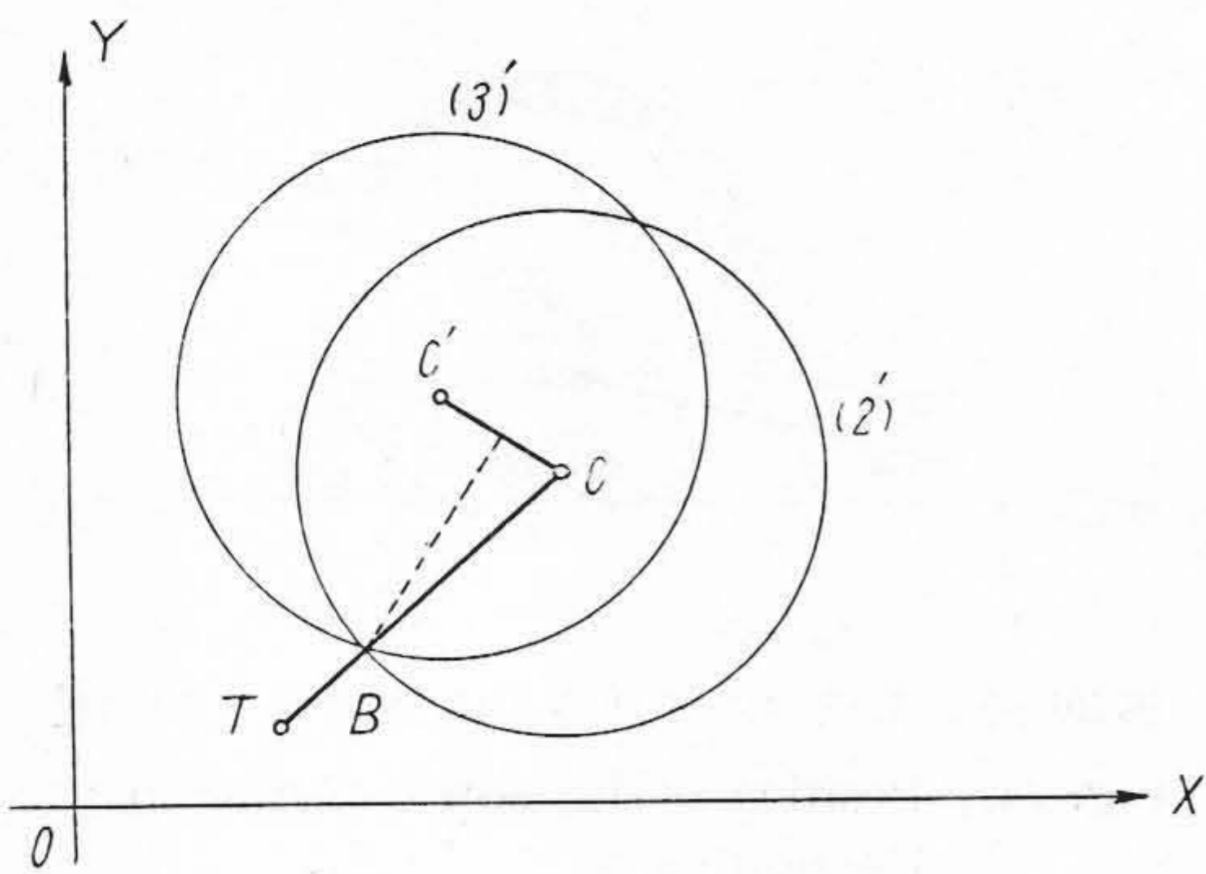
但しこの式中 ρ の値は (47), (48) 式に依り与えられる。

ここで θ の値は $0 \rightarrow \pi$ まで考えれば良い事は前報と同じである。そこで τ_1 の値を任意に与えて (43) 式より θ_1 を求め (47) 式より ρ_1 を求める。次に (45) 式より σ_1 を求め (34') 式より $\bar{\rho}_1$ を求める。結局 τ_1 を任意に与えるとこれに対応する $\bar{\rho}_1, \sigma$ の値が得られる。 τ_2 の場合も全くこれと同様である。そこで (42) 式を用いて (40) 式を満足する τ_1, τ_2 の関係が求まりこれから (38) 式を用いて Ψ_1 が求る。再び (37) 式より Ψ_2 が求められる。但し K は初期条件に依り定る積分常数である。尚接触点の軌跡は Ψ_1, Ψ_2 が定まれば (41) 式にこれらを代入する事に依り決定し得る。以上のように Ψ_1, Ψ_2 を求める諸式を求めたがこの計算は相当に複雑であり省略する。

〔III〕 等速切削法に於けるカッターとブランクの運動及び切削ピッチ点の位置より見た歯形の不均一に就いて

等速切削に於けるブランクとカッター間に於ける運動の状態及び歯形の不均一に就いて調べて見る。第24図を参照して C はカッターの中心、 T は切削ピッチ点、 P はカッターの廻転軸とすると C の座標 x_c, y_c は

$$\begin{aligned} x_c &= R \cos \theta + l \cos \psi = R \cos \theta + l \cos 3\theta \\ y_c &= R \sin \theta + l \sin \psi = R \sin \theta + l \sin 3\theta \dots\dots (51) \end{aligned}$$



第 25 図 Δt 秒後に於ける偏心カッターの位置
Fig. 25. Position of Eccentric Cutter in after Δt

但し上式中の φ は第 1 報に於ける P のブランク中心 O に対する相対廻転角であり φ=3θ で表わし得る。

C を中心として持つ半径 R₁ の円の方程式は

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R_1^2$$

即ち

$$(x-R \cos \theta - l \cos 3 \theta)^2+(y-R \sin \theta - l \sin 3 \theta)^2=R_1^2 \dots \dots \dots (52)$$

今 θ が Δθ だけ増すと考えると

$$\{x-R \cos (\theta+\Delta \theta)-l \cos (3 \theta+3 \Delta \theta)\}^2+\{y-R \sin (\theta+\Delta \theta)-l \sin (3 \theta+3 \Delta \theta)\}^2=R_1^2 \dots \dots \dots (53)$$

(52) 式を展開して書代えると

$$x^2+y^2-2 x(R \cos \theta+l \cos 3 \theta)-2 y(R \sin \theta+l \sin 3 \theta)+R^2+l^2+2 R l \cos 2 \theta=R_1^2 \dots \dots \dots (52')$$

又(53)式中 Δθ の 2 乗及び 2 乗以上の項を省略して書直すと

$$x^2+y^2-2 x(R \cos \theta+l \cos 3 \theta)-2 y(R \sin \theta+l \sin 3 \theta)+R^2+l^2+2 R l \cos 2 \theta+[2 x(R \sin \theta+3 l \sin 3 \theta)-2 y(R \cos \theta+3 l \cos 3 \theta)-4 R l \sin 2 \theta] \Delta \theta=R_1^2 \dots \dots \dots (53')$$

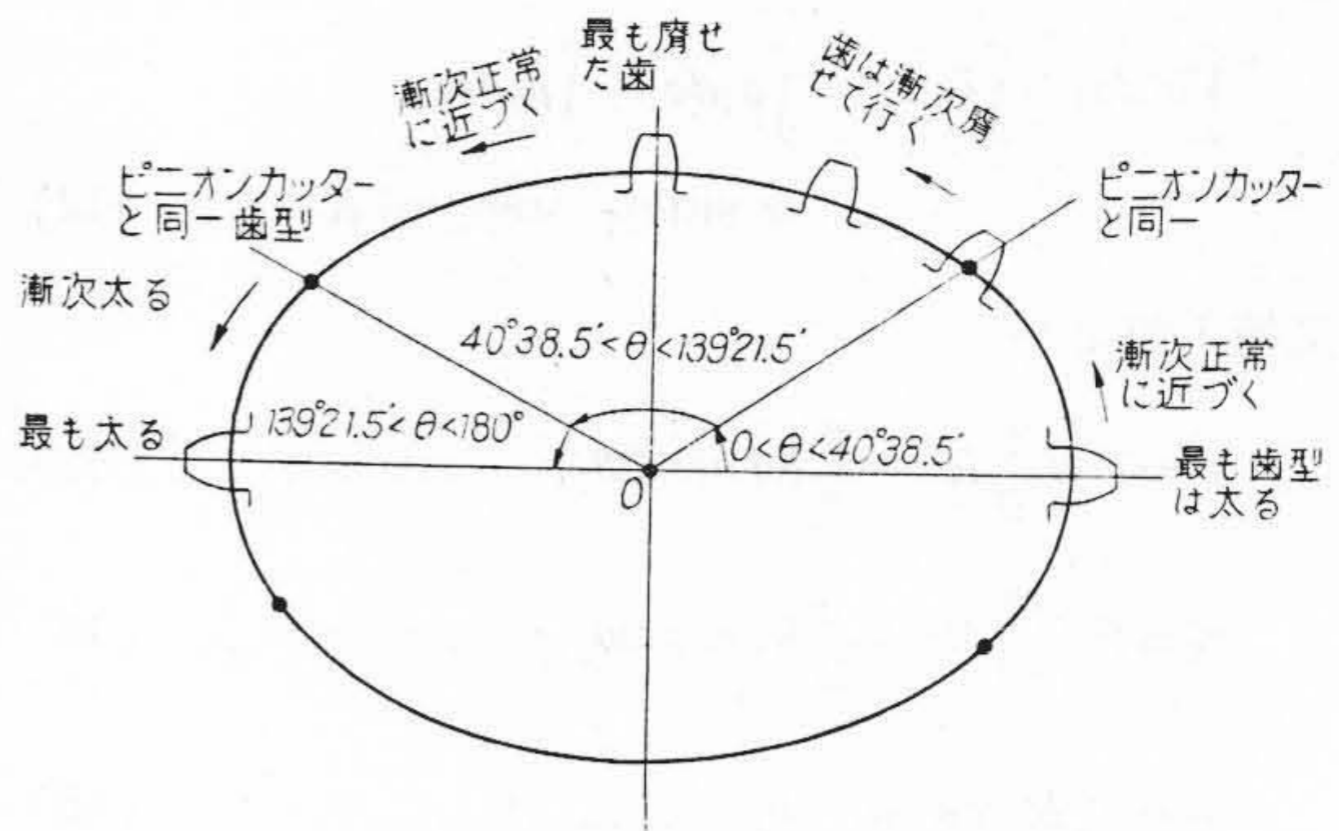
(52') と (53') の円との交点 B のうち原点に近い方のものを求め (途中省略) すると次の如くなる。

$$B(x)_{\Delta \theta \rightarrow 0}=R \cos \theta+l \cos 3 \theta-\frac{R \cos \theta+3 l \cos 3 \theta}{\sqrt{R^2+9 l^2+6 R l \cos 2 \theta}} R_1$$

$$B(y)_{\Delta \theta \rightarrow 0}=R \sin \theta+l \sin 3 \theta-\frac{R \sin \theta+3 l \sin 3 \theta}{\sqrt{R^2+9 l^2+6 R l \cos 3 \theta}} R_1$$

又切削ピッチ点 T の座標は第 1 報より $(\frac{2}{3} R \cos \theta, \frac{2}{3} R \sin \theta)$ であり又 CT 直線の式は下式に依つて与えられる。

$$\frac{x-x_c}{2/3 R \cos \theta-x_c}=\frac{y-y_c}{2/3 R \sin \theta-y_c} \dots \dots \dots (54)$$



第 26 図 第 1 報に於ける方法で切削した楕円歯車に於ける角度と歯型の関係

Fig. 26. Relation of Angle and Tooth Form in Elliptical Gear Generated by Method of 1st Report

扱て上式に B 点の座標 x, y を代入すると上式は満足される。即ち B 点は CT 直線の上に必ず存在しこれは明に滑りの存する事を意味している。次に切削刻み点 T は切削中ピニオンカッターのピッチ円に対して 0 ≤ θ ≤ 2π の範囲で如何なる状態にあるかを調べて見る。(52) 式に T の座標を代入すると、

$$\frac{4}{9} R^2-\frac{4}{3} R(R \cos \theta+l \cos 3 \theta) \cos \theta-\frac{4}{3} R(R \sin \theta+l \sin 3 \theta) \sin \theta+R^2+l^2+2 R l \cos 2 \theta-R_1^2=\frac{1}{9} R^2+l^2-R_1^2+\frac{2}{3} R l \cos 2 \theta \dots \dots \dots (55)$$

扱て (55) 式中右辺が正であれば切削刻み点 T はピニオンカッターのピッチ円に対してその外側に存在し負であれば円の内側に存在している。又丁度 T 点がピッチ円の上に存在する時の θ は 0 < θ < π に於て

$$\theta=\begin{cases} \cos^{-1} \frac{3}{2 R l}\left(R_1^2-l^2-\frac{1}{9} R^2\right) \\ \pi-\cos^{-1} \frac{3}{2 R l}\left(R_1^2-l^2-\frac{1}{9} R^2\right) \end{cases}$$

で与えられる。

今実験の一例を上にも求めた諸式に代入して調べて見ると

$$a=100. \quad \sin^{-1} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=25^\circ \quad \text{とすると}$$

$$b=a \cos 25^\circ=90.6$$

今 R₁=49 を撰定しこれをピニオンカッターのピッチ円半径とすると

$$l=\frac{a-b}{2}=4.6846 \quad R=144.31539$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}R^2 &= 2314.10353 \\ l^2 &= 21.945571 \\ R^2 &= 2401 \\ \frac{2}{3}Rl &= 450.7075 \\ \frac{1}{9}R^2 + l^2 - R_1^2 + \frac{2}{3}Rl \cos 2\theta &= 64.950899 - 450.7051 \cos 2\theta \end{aligned}$$

切削刻み点 T のピッチ円に存在する θ の値を求めると
 $\theta = 40^\circ 38.5'$ $\theta = 139^\circ 21.5'$

そこで

$0 < \theta < 40^\circ 38.5'$ } の時 (55) の右辺は正となり T は円 R_1 に対し外側に位置する。
 $139^\circ 38.5' < \theta < 180^\circ$ }

又 $40^\circ 38.5' < \theta < 139^\circ 38.5'$ の時 R_1 に対し内側に位置する。

第25図に示す通り切削刻み点 T が外側という事は切削される楕円歯車がインボリュート曲線歯型を有するピニオンカッターのピッチ円の外即ち歯幅が狭く圧力角の大なる所で歯切りされており、このため歯切りされた歯形は圧力角が増大した丁度正転位された太つた歯形となる。又 T が内側に存在するという事は逆にピニオンカッターのピッチ円より内側の圧力角の小さい歯幅の大なる箇処で切削しており、このため歯切りされる歯形は圧力角の小さい丁度負転位したような瘦せたものとなる。この状態は上述の例題で $\theta = 0^\circ$ 即ち楕円の長径で最大の歯となり θ の増加と共に漸次正常の歯に近づき $\theta = 40^\circ 38.5'$ で正常のものとなる。又 $40^\circ 38.5' < \theta < 90^\circ$ の範囲は歯が正常のものより瘦せる。而して $\theta = 90^\circ$ 即ち楕円の短径に於て最小の歯となる。 $90^\circ < \theta < 139^\circ 21.5'$ は最小より正常に近づく範囲であり $\theta = 139^\circ 21.5'$ で正常なものとなる。爾後漸次増大して丁度 $\theta = 0$ の反対の長径位置で最大となる。以上は理論的に等速切削法に依る楕円歯車の歯形の不均一性を解析したのであるが、実際に切削した楕円歯車に於て正規歯形を有する略 T 点の角度を実測せる結果は $\theta = 40^\circ$, $\pi - \theta = 140^\circ$ であり、前記計算結果と一致した。

〔IV〕 変速切削に関する理論的解析及び諸元の決定

扱て前節の析解結果から等速切削では歯の不均一は避けられない事がわかった。そこでこの不均一を均一にするために変速切削を取り入れた。以下これに就いて論ずる。ギヤセーパの構造を観察すると変速を与え得る方法としては次の3通りが考えられる。

即ち

- (1) ブランクに変速回転運動を与えカッターには一様回転運動を与える。

- (2) ブランクに一様回転運動を与えカッターに変速回転運動を与える。

- (3) ブランクとカッター双方に変速回転運動を与える。

以上の方法の中初期の目的である機械に改造加えないという点に著目すると (1) の方法が最も簡単であり、本研究に於ては (1) に依る変速切削法を採用した。そこで最も差異のある長径側と短径側の歯形が全く相等しくなるように変速を与えた。

扱て2つの全く相等しい楕円が各々の焦点を軸として一方より他方への回転を伝達する場合角速度の相対関係は正弦曲線を以て表わし得ることは明らかな事である。そこでテーブル側に将来与え得る変速を考慮して次のように仮定する。

第27図を参照してギャブランクの回転角速度を ω_b , カッターの回転角速度を ω_c とする。但し ω_c はブランクに対する相対角速度でなくカッター軸そのものの角速度である。そこで正弦波変速より ω_b, ω_c を次のようにおき換える。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_b = \omega_1 + \omega_1 \cos 2\theta \quad \text{constant} \dots\dots\dots(56)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_c \quad \text{variable} \dots\dots\dots(57)$$

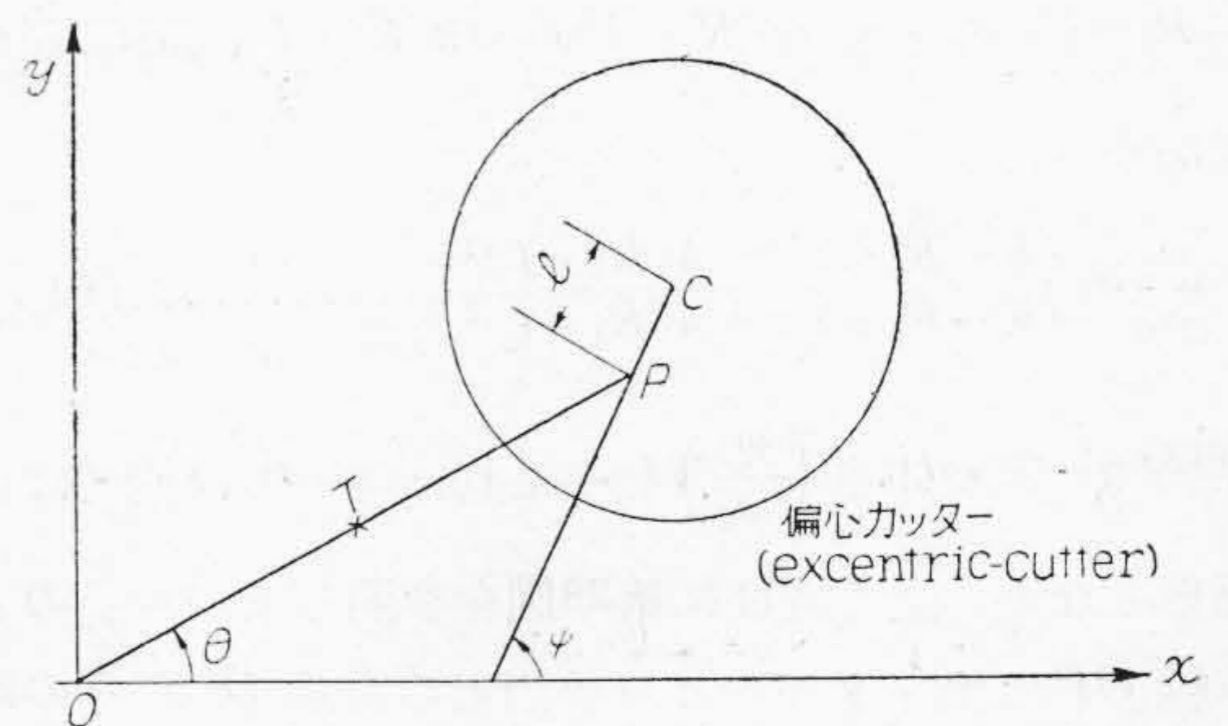
(56), (57) より

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\omega_c}{\omega_0 + \omega_1 \cos 2\theta}$$

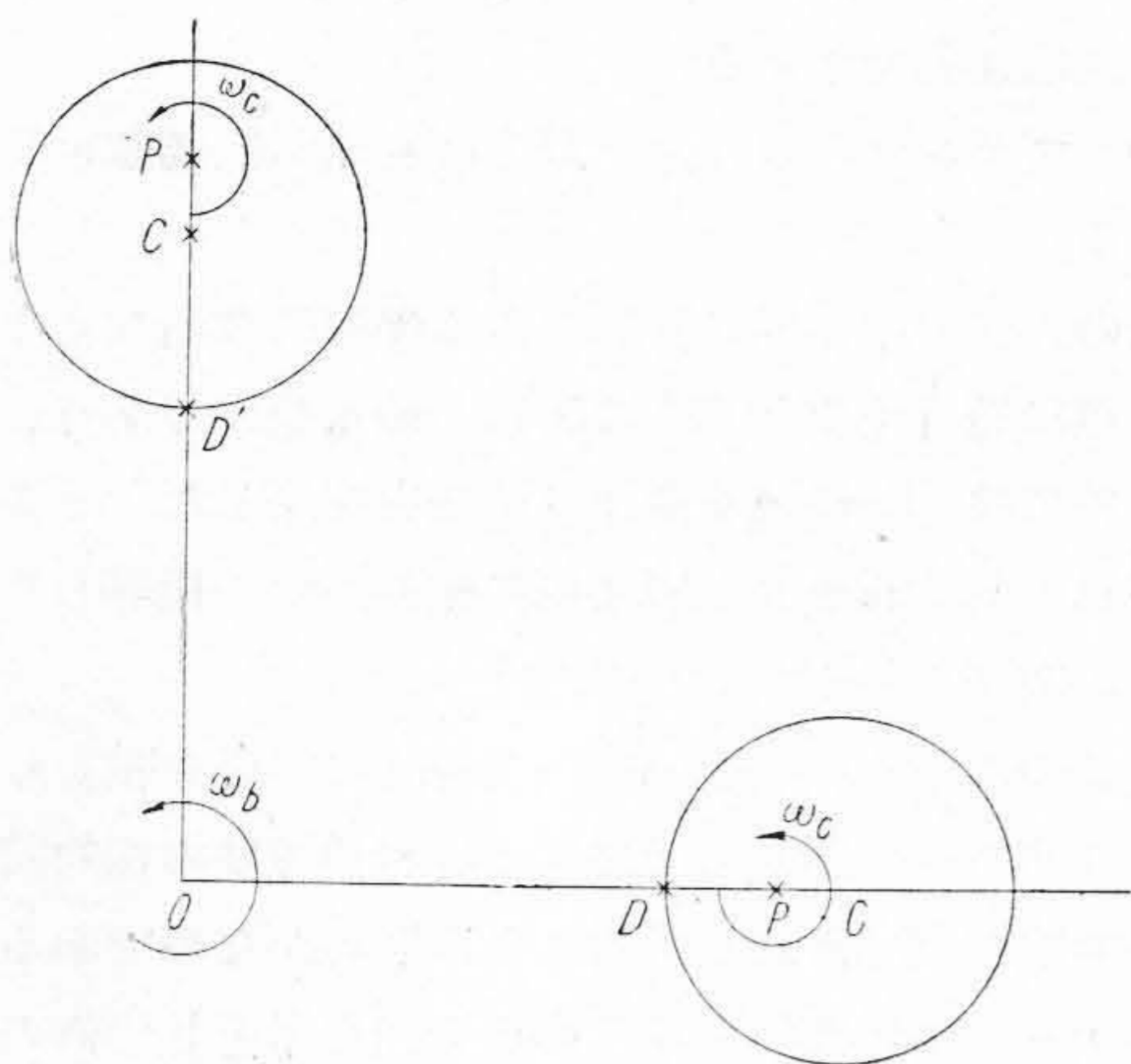
ここで θ はブランクの回転角、 ϕ はカッターの回転角 ω_0, ω_1 は均一歯形にするための等一角速度及び附加角速度。

又 $\omega_0 \gg \omega_1$ であり、上式より ϕ の値を求めると

$$\phi = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\omega_0 - \omega_1} \tan \theta}{\sqrt{\omega_0 + \omega_1}}$$



第27図 創成中に於ける偏心カッターの位置
 Fig. 27. Position of Eccentric Cutter in Generating



第 28 図 $0^\circ, 90^\circ$ に於ける偏心カッターの位置
Fig. 28. Position of Eccentric Cutter at 0 and 90 Degree

本切削の基本条件より $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時 $\phi = \pi$ という条件を代入すると

$$\omega_c = 2\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} \dots\dots\dots (58)$$

故に

$$\phi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{\omega_0 - \omega_1} \tan \theta}{\sqrt{\omega_0 + \omega_1}} \dots\dots\dots (59)$$

扱て第28図を参照して $\theta = 0$ に於て直線 \overline{OP} とピニオンカッターのピッチ円との交点 D がその切削瞬間に於けるピッチ点となるための条件は

$$\omega_b \cdot \overline{OD} = (R - \overline{OD})\omega_c \dots\dots\dots (60)$$

又 $\theta = 0$ に於ける ω_b, \overline{OD} は (56), (57) 式より次の如く与えられる。

$$\omega_b = \omega_0 + \omega_1 \quad \overline{OD} = R - (R_1 - l)$$

(60) 式より

$$(R - R_1 + l)(\omega_0 + \omega_1) = (R_1 - l)\omega_c = 2(R_1 - l)\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

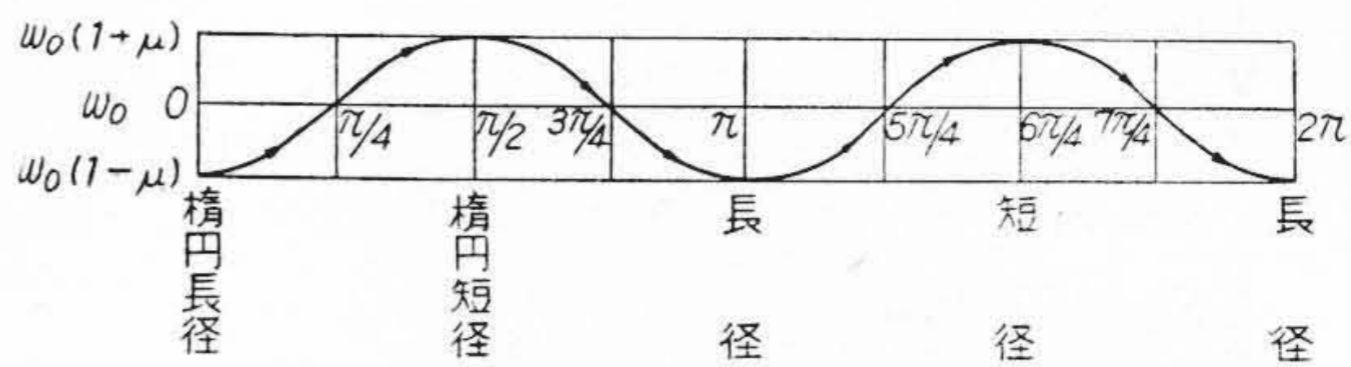
上式から

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{(R - R_1 - l)^2 - 4(R_1 - l)^2}{(R - R_1 + l)^2 + 4(R_1 - l)^2} \dots\dots\dots (61)$$

結局(61)式の如き $\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)$ を与えれば $\theta = 0$ に於ては正常歯形となる。全く同様に第28図を参照して $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき直線 \overline{OP} とカッターのピッチ円との交点 D' がその時のピッチ点となるための条件は

$$\overline{OD'} = R - R_1 - l$$

$$\overline{D'P} = R_1 + l$$



第 29 図 楕円歯車を切るための理論的変速量
Fig. 29. Theoretical Variable Speed Value for Cutting of Elliptical Gear

$$\overline{OD'}(\omega_0 - \omega_1) = \overline{D'P}\omega_c = 2\overline{D'P}\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

$$\therefore (R - R_1 - l)^2(\omega_0 - \omega_1) = 4(R_1 + l)^2(\omega_0 + \omega_1)$$

上式より

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{(R - R_1 - l)^2 - 4(R_1 + l)^2}{(R - R_1 - l)^2 + 4(R_1 + l)^2} \dots\dots\dots (62)$$

(62)式は $\theta = 90^\circ$ 即短径に於て正常なる歯形を有するための条件である。そこで(61), (62)式の2つの条件を同時に満足する R_1 を決定すると

$$R_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4} = \pm \frac{ab}{4}$$

$$\therefore R_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - ab) \\ \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 3ab) \end{cases}$$

上の R_1 のうち下方のものは負となる為実際には取り得ない。

$$R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - ab} \dots\dots\dots (63)$$

上の R_1 の時 (61), (62) 式より2つ条件を同時に満足する $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ を決定し、これを a, b のみで表わすと次のようになる。

$$R - R_1 + l = a \quad R - R_1 - l = b$$

$$l = \frac{a-b}{2} \quad R - R_1 = \frac{a+b}{2}$$

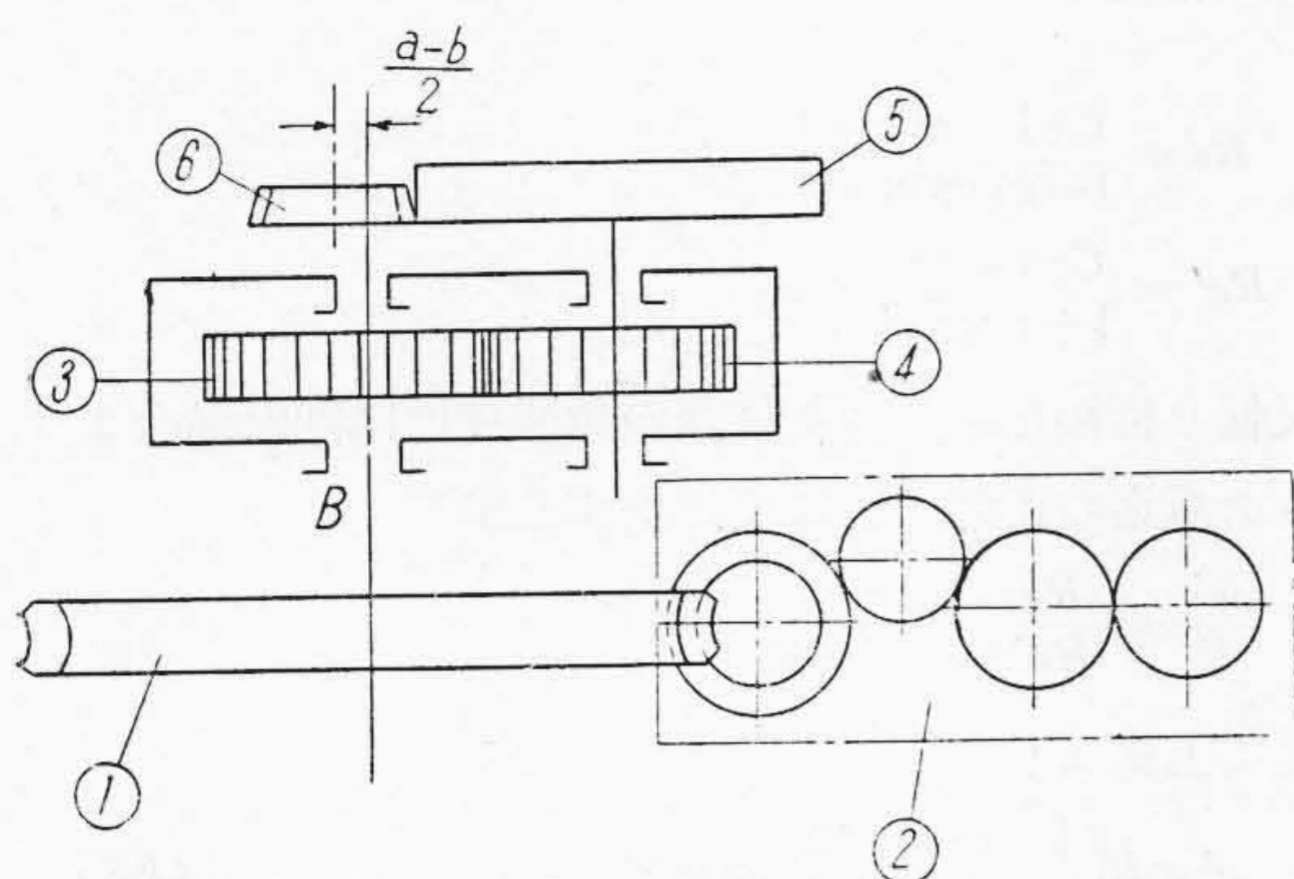
$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{-a^2 + 4\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - ab} - \frac{a-b}{2}\right\}^2}{a^2 + 4\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - ab} - \frac{a-b}{2}\right\}^2} = \frac{-a^2 + (\sqrt{a^2 - b^2 - ab} - a + a)^2}{a^2 + (\sqrt{a^2 + b^2 - ab} - a + b)^2} \dots\dots\dots (64)$$

結局(63)式に示す R_1 をピッチ円に持つピニオンカッターで a, b を長半径及び短半径とするような楕円歯車は (64) 式の $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ を与えれば長径及び短径に於て全く均一な歯形となる。そこでピッチ点 T とカッターの中心 C との距離を求めて見ると

$$\omega_b \cdot \overline{OT} = \omega_c \cdot \overline{TP} \quad \text{より} \quad \overline{TP} = \frac{R\omega_b}{\omega_b + \omega_c}$$

第1報及び第27図より

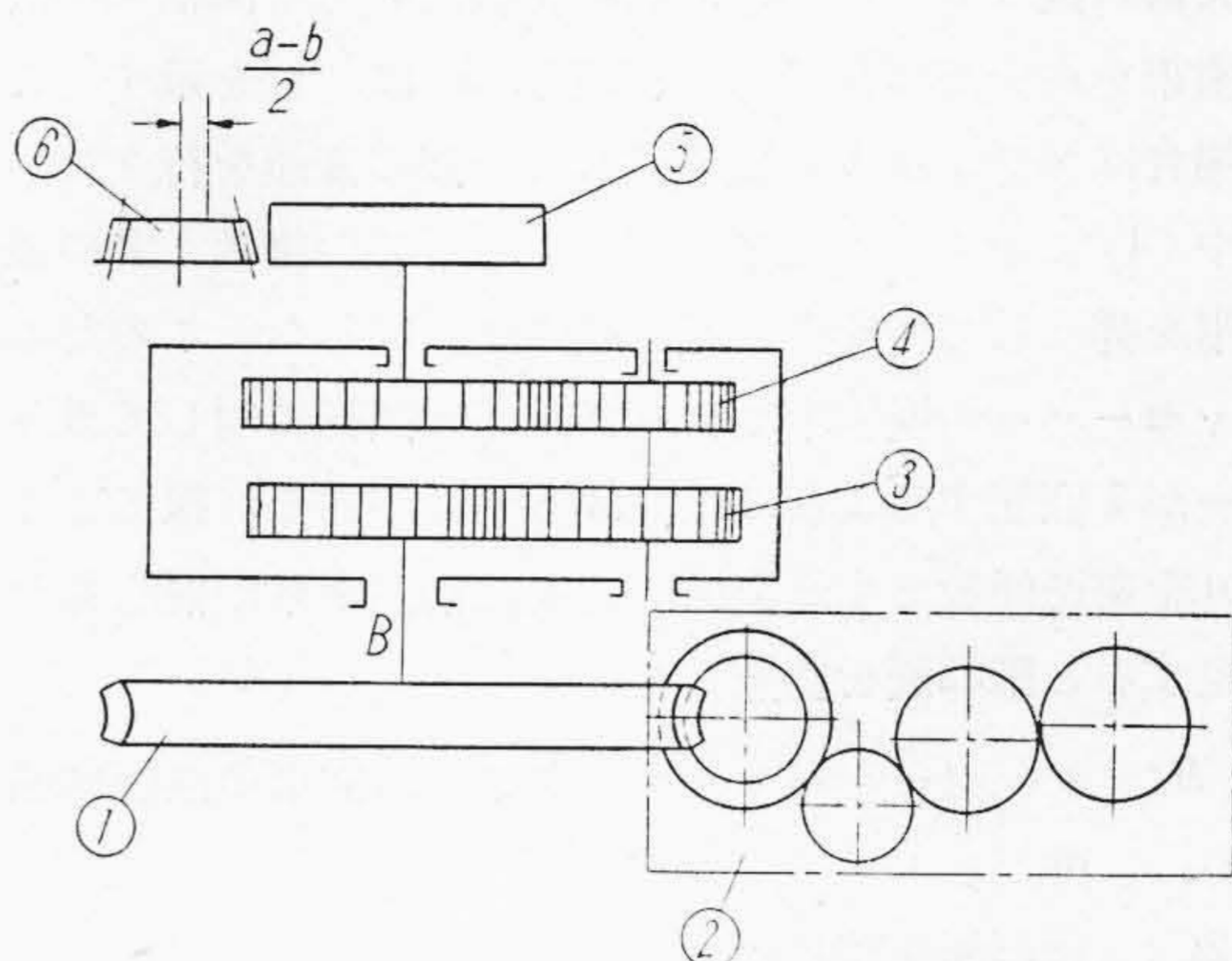
$$\overline{TC}^2 = \overline{TP}^2 + \overline{PC}^2 + 2\overline{TP} \cdot \overline{PC} \cdot \cos \phi$$



(1) ギヤセーパのマスターウォーム装置
(2) 換歯車装置 (3)(4) 中心嚙合楕円歯車
(5) ブランク (6) 偏心カッター

第30図 変速のために中心嚙合の楕円歯車を用いた場合の変速装置

Fig. 30. The Variable Speed Attachment Used the Center Meshing Elliptical Gear for Variable Speed



(1) ギヤセーパマスターウォーム装置
(2) 換歯車装置 (3) 偏心歯車
(4) 正歯車 (1:2) (5) ブランク
(6) 偏心カッター

第31図 変速のために焦点嚙合の楕円歯車を用いた場合の変速装置

Fig. 31. The Variable Speed Attachment Used with the Focus Meshing Elliptical Gear for Variable Speed

$$\therefore \overline{TC} = \sqrt{\frac{R^2 \omega_b}{(\omega_b + \omega_c)} + l^2 + \frac{2lR \omega_b \cos \phi}{\omega_b + \omega_c}} \dots (65)$$

上式より $R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ の時 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ではピッチ点が如何なる位置を占めているかを調べると

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ で } \phi = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 + \omega_1}}$$

$$\cos \phi = 2 \cos^2 \phi - 1 = \frac{1 - \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 + \omega_1}}{1 + \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 + \omega_1}} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

故に

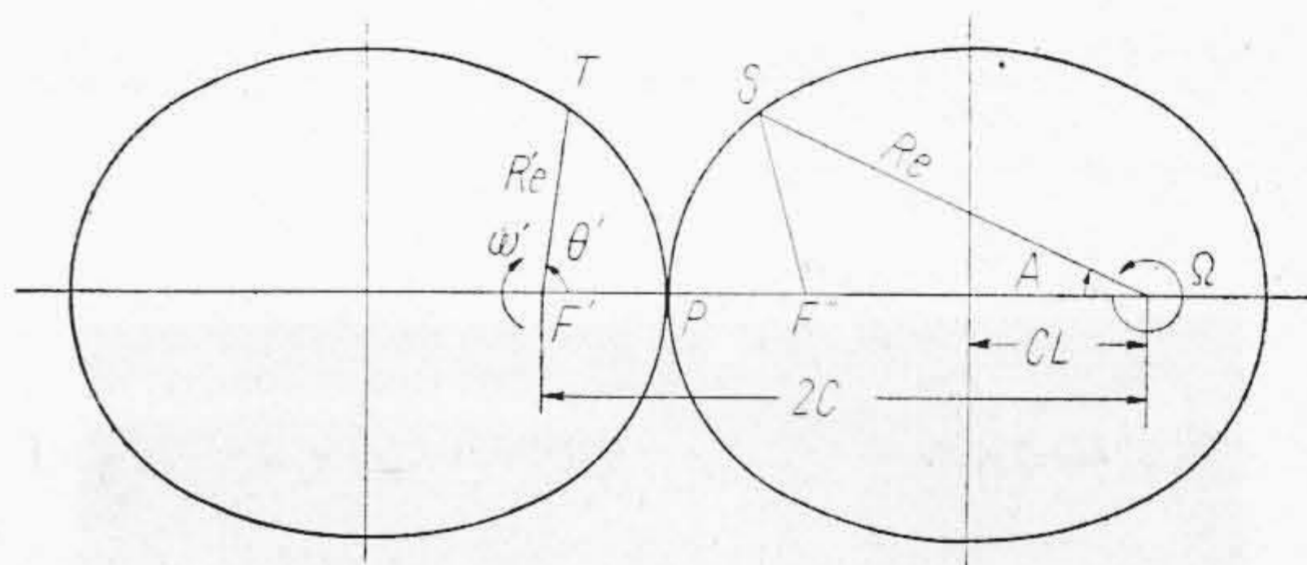
$$(\overline{TC})_{\theta = \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_c}\right)^2 R^2 + l^2 + \frac{2\omega_1}{\omega_0 + \omega_c} lR} \dots (66)$$

而して (66) 式の $(\overline{TC})_{\theta = \frac{\pi}{4}} \neq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ であるが $\frac{b}{a}$ が、余り小さくない範囲では殆ど $(\overline{TC})_{\theta = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ となる。尚 $\theta = \frac{\pi}{4}$ に於ける T の位置誤差を長径側と短径側に振分ければ、その誤差は更に縮小されるであろう。そこでピニオンカッターのピッチ円半径 R_1 の修正半径 R_1^* を次のように定める。

$$R_1^* = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_c + \omega_0}\right)^2 R^2 + l^2 + \frac{2\omega_1}{\omega_c + \omega_0} lR} \dots (67)$$

即ち (66), (63) 式 との算術平均値を以て R_1^* とするが最良であろう。尚細部に亘つての誤差論は第三報以降に譲る。

扱以上に依つて変速切削に必要な変速量及びピニオンカッターの径は決定し得た。然してこれらは全て設計



第32図 楕円歯車に関する角速度の関係

Fig. 32. Relation of Angular Velocity in Elliptical Gear Meshing

楕円の長半径 a 及び短半径 b を以て表わした。 $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ の値を今後 μ で表わし、これを変速係数と呼ぶ事にする。結局歯車ブランクは一回転する間に μ を変速係数とする如き2週期の正弦的変速運動を行う。第29図はこの μ を有する理論的変速正弦曲線を示す。第29図は理論変速と楕円の各位置との関係を示し図の $\omega_0 (1 - \mu)$ の位置即ち $\theta = 0, \pi, 2\pi$ に於て楕円の長径側が切削されこれ等の位置でブランクは最も遅い回転を行つている。又 $\omega_0 (1 + \mu)$ に相当する $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$ に於ては短径側を切削しており、この瞬間のブランクの回転角速度は最も速い状態にある。而してこの変速運動を与えるために第30~31図に示す如き装置を以てした。第30図は変速を与えるために図中 (3), (4) に示す中心嚙合の楕円歯車を以てする。この場合は2週期を持つ正弦波であるから頗る簡単な装置であろう。然しこの場合はテーブルが1回転する間にカッターは正しく2回転するように換歯車を挿入する。

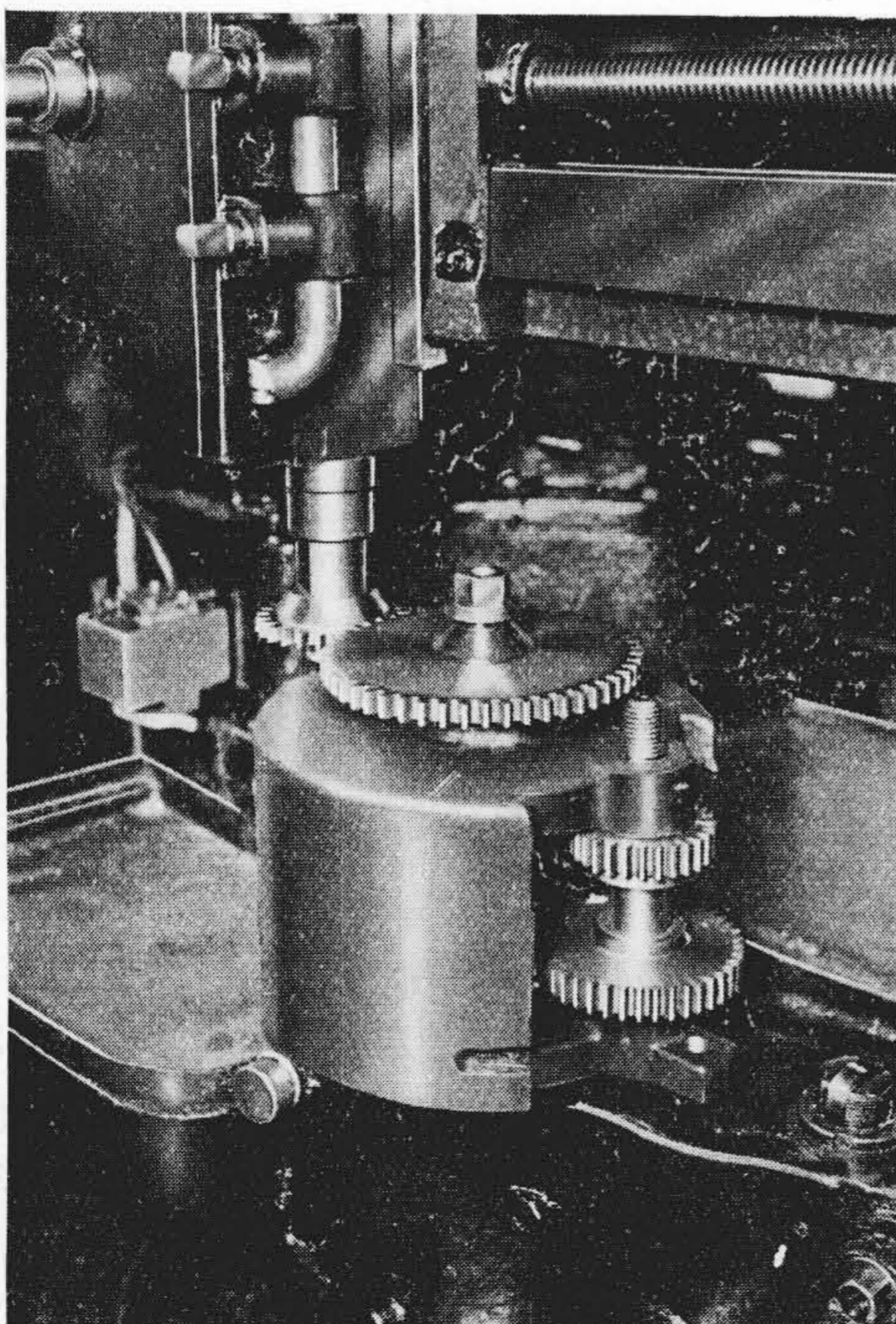
又第31図は変速のために焦点を軸心として回転する楕円歯車を用いた場合であり、図中(3)はこれを示す。この場合はブランク1回転に対して一波の変速を行うため図中(4)に示すような2週期とするための歯数1:2の正歯車を挿入して所期の変速を得るようにした。このためギヤセーパの換歯車はテーブルが1回転に対してカッターが1回転するように組付ける必要がある。扱てここで μ を変速係数とする変速に必要な楕円歯車の偏心率を決定すると第32図を参照して

- Ω : ギヤセーパマスターウォーム歯車の回転角速度
- $2C$: 楕円歯車嚙合中心距離
- e : 楕円歯車の偏心率
- ω' : 従動楕円歯車の回転角速度
- ω_b : ブランクの回転角速度
- θ : ブランクの回転角
- ϵ : 楕円歯車の偏心率 ($\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{e}{C}$)

とすると

$$Re + Re' = 2C$$

又楕円の性質から Re と A , Re' と θ' との間には次の関係がある。



第 33 図 ギヤセーパに取付けた変速装置
Fig. 33. Variable Speed Attachment Set at the Fellows Gear Shaper

即ち

$$Re = \frac{C(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon \cos A}$$

$$Re' = \frac{C(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cos \theta'}$$

又転り接触をする2物体間の角速度比は回転軸心よりピッチ点迄の距離の比に反比例するから

$$\frac{\omega'}{\Omega} = \frac{Re}{Re'}$$

依つて上式より

$$\omega' = \Omega \left(\frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} + \frac{2\epsilon}{1-\epsilon^2} \cos \theta' \right) \dots \dots \dots (68)$$

ここで $\theta' = 2\theta$ である。

$$\omega_b = \frac{1}{2} \omega' = \frac{1}{2} \Omega \left(\frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} + \frac{2\epsilon}{1-\epsilon^2} \cos 2\theta \right)$$

又 $\omega_b = \omega_0 + \omega_1 \cos 2\theta$ $\frac{\omega_1}{\omega_0} = -\mu$ であるから

$$\omega_0 + \omega_1 \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Omega \left(\frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} - \frac{2\epsilon}{1-\epsilon^2} \cos 2\theta \right)$$

$$\therefore \omega_0 = \frac{1}{2} \Omega \frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \quad \omega_1 = -\Omega \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2}$$

上式より

$$\epsilon = \frac{\sqrt{1+\mu} - \sqrt{1-\mu}}{\sqrt{1+\mu} + \sqrt{1-\mu}} \dots \dots \dots (69)$$

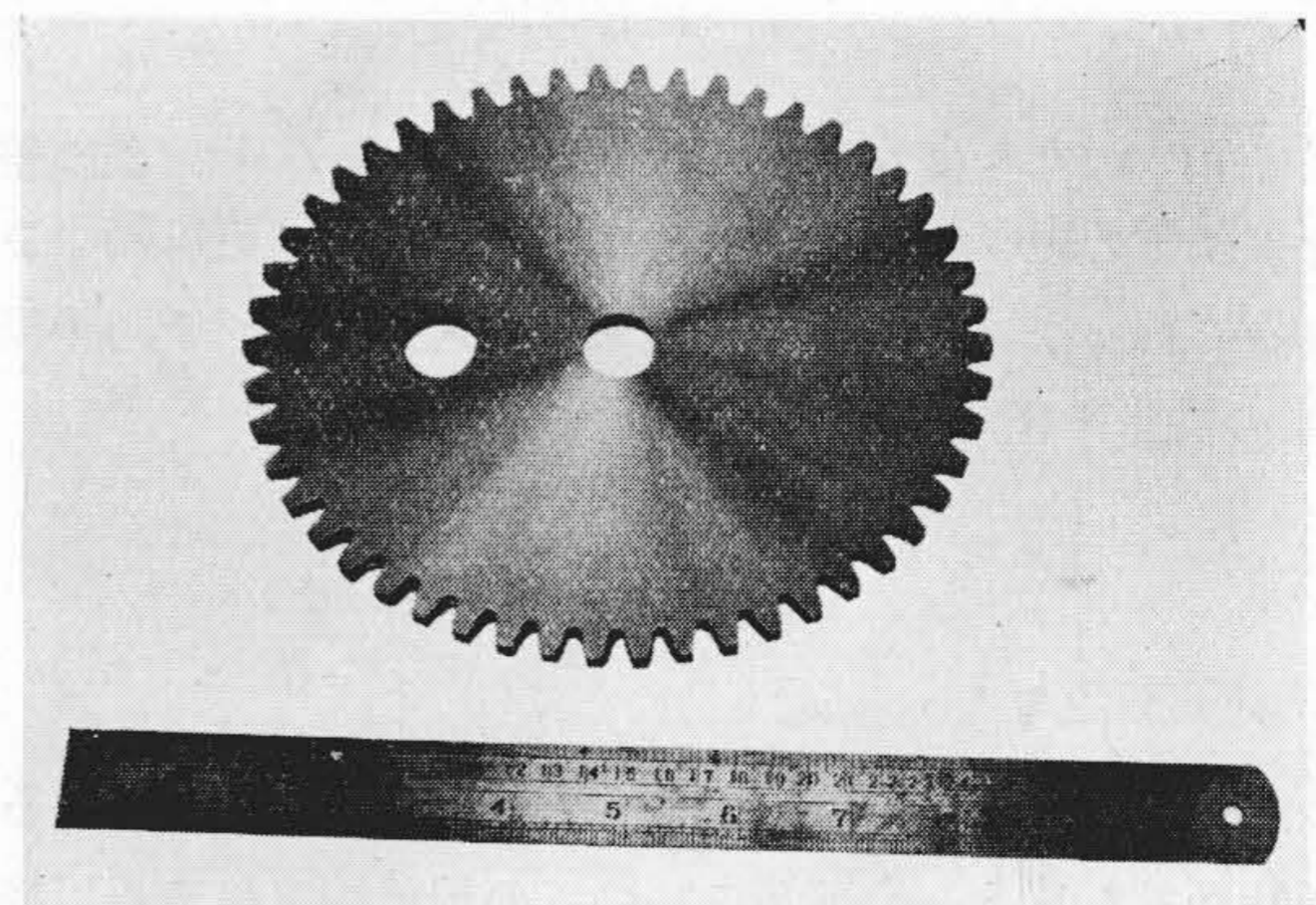
又

$$\Omega = 2\omega_0 \sqrt{1-\mu^2} = 2\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} \dots \dots \dots (70)$$

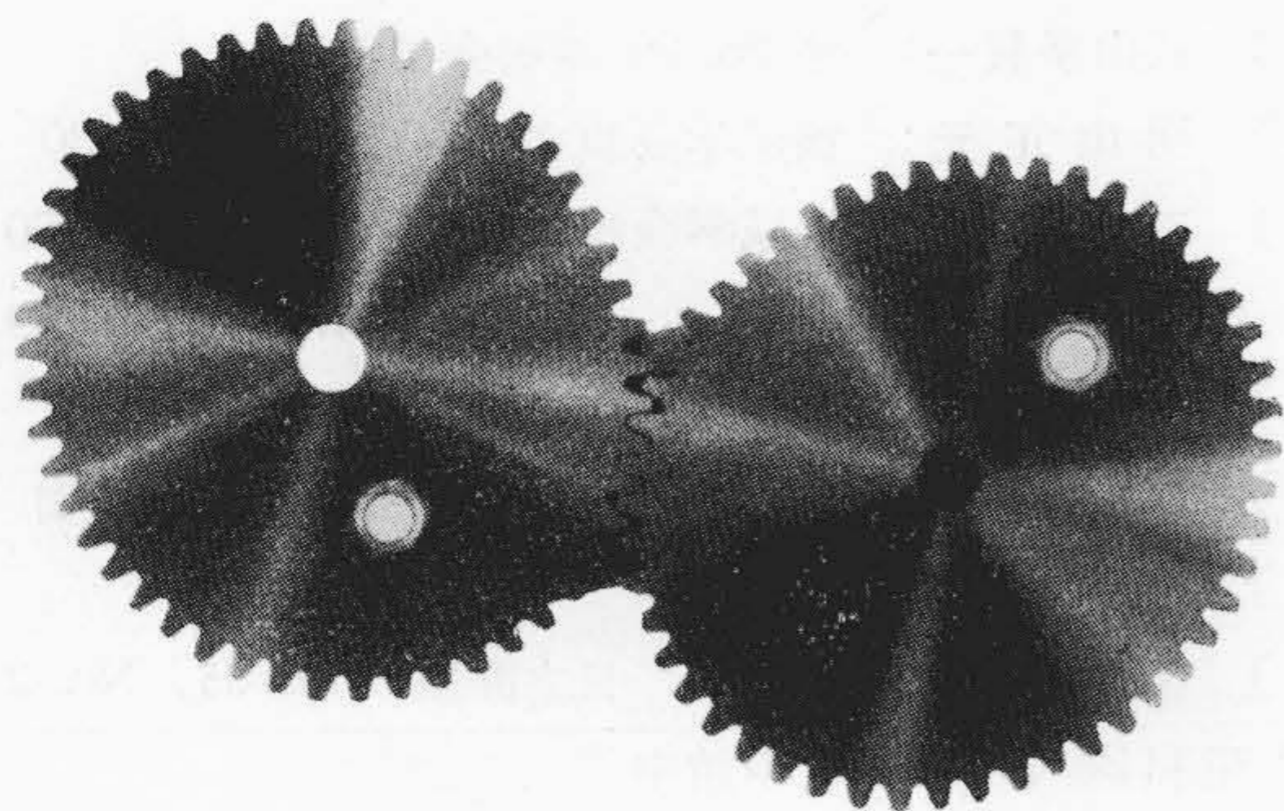
(70)式より Ω はカッターの回転角速度 ω_c そのものを与えておりこれは始めに与えた条件である。結局必要な偏心率 e は次のもので与えられる。

$$e = C \left(\frac{\sqrt{1+\mu} - \sqrt{1-\mu}}{\sqrt{1+\mu} + \sqrt{1-\mu}} \right)$$

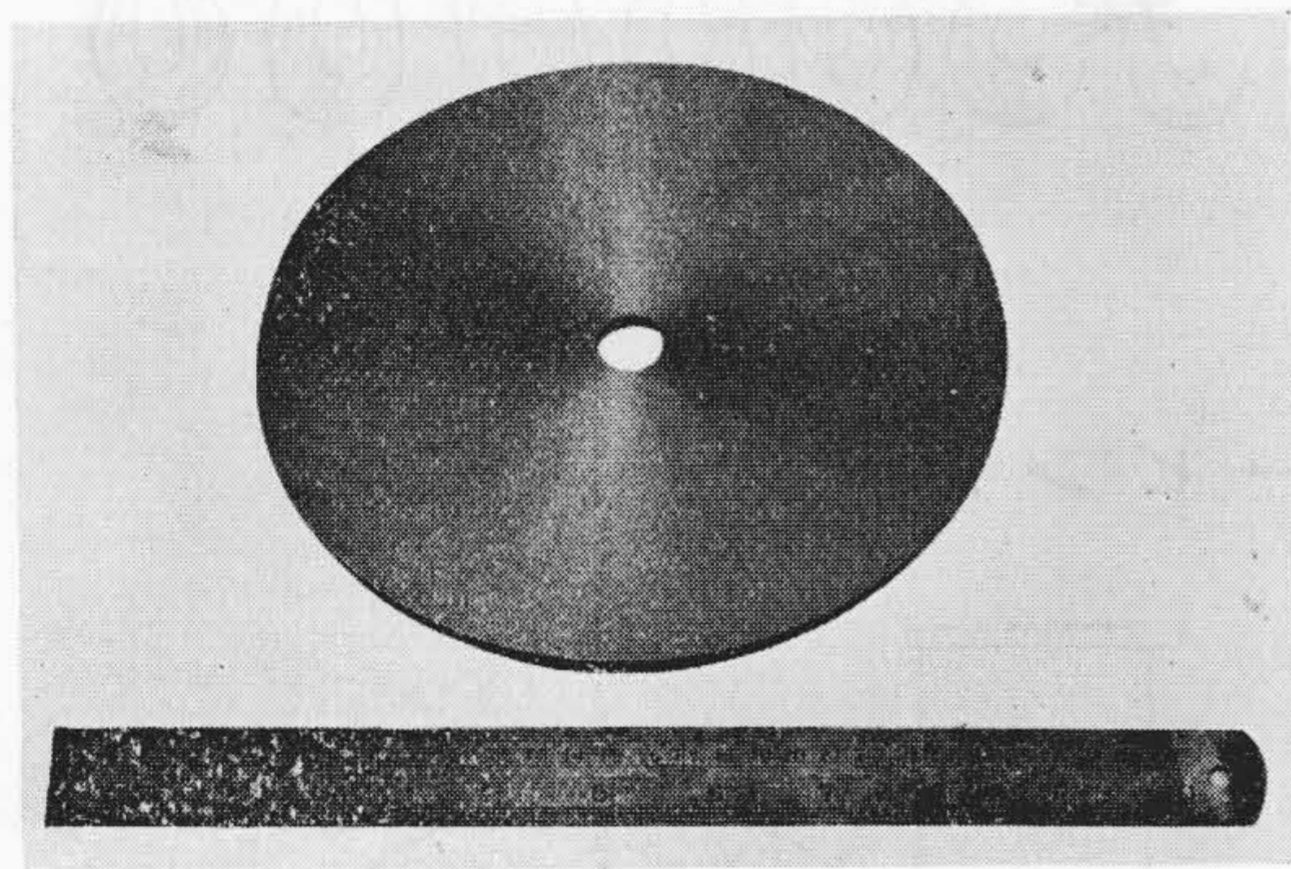
扱て設計の楕円歯車の偏心率に比しこれを切削する変速用の楕円歯車の偏心率は非常に小さい値である。即ち



第 34 図 本変速法で切削した楕円歯車
Fig. 34. The Elliptical Gear Cut by this Variable Speed Method



第35図 試削例の噛合
Fig. 35. This Elliptical Gear Meshing Produced by this Variable Speed Method



第36図 この変速切削装置で創成した楕円歯車用ブランク
Fig. 36. Elliptical Gear Blank Generated by this Variable Speed Attachment

小なる偏心率の楕円歯車で大きな偏心率の楕円歯車を切削する事が出来るが、変速用の楕円歯車を工作する事は相当に困難である。然しここに偏心率の運動は離心率が余り大きくない範囲では楕円歯車の運動と極めて類似しており、これは殆ど同一と見做して差支えない。そこで理論的に最も近似したものは小偏心率の偏心率歯車で、先づ楕円歯車を工作し爾後これを用いて変速切削を行えば良い。然し普通実用楕円歯車に於ては変速用として偏心率歯車を以て代用しても何等支障がないと考えられる。又偏心率歯車の高精度のものを工作する事はさして至難な事ではない。そこで著者は偏心率歯車を用いて第31図に示す装置で試削実験を行つた。第32図は第31図に示す変速部分の装置であり第31図のBに於てギャセーパのウォーム歯車軸に取付け取外しが出来るようになってゐる。増振用の正歯車は 2.5 Mod. P.A 20° を採用した。

第34図は試削した楕円歯車、第35図は試削例の噛合を示す。第36図は楕円歯車用ブランクであり、これは第1報と同様な切込位置切込み深さで楕円の長半径 a 、短半径 b の差の $1/2$ を偏心率とする偏心率丸カッターを用い

この変速装置テーブル上に $2a$ を含む円ブランクを取付け歯切りの時と同じ変速量を以て創成する。尚ブランク創成に於ける詳細なる誤差に関しては続報に譲るが、等速切削の場合に比し純正楕円との偏倚は遙かに優れており次に示す本実験例の場合に最大値 δ は $\approx 8/100$ 程度である。

以上の如くしてブランク創成、歯切りを完了した一对の楕円歯車は機構学的に何等支障なく噛合う。これは第1報に於ける噛合の証明と全く同様に、使用するピニオンカッターはインボリュート曲線を歯形とする正歯車用カッターであるためこれに依り切削された相手歯車は常に法線刻みの相等しいインボリュート歯形（エボリュートに就いては未解明）となり、機構学的に支障なく噛合う。試削例の歯車は焦点をその回転軸とする場合及び中心（切削中心）を回転軸とする場合の双方に於てで円滑に噛合う。但し中心軸を回転中心とする場合は一方の長径側に他方の短径側を組み合わせよう噛合開始位置を定めることは論を待たない。

試削実験例

楕円歯車 $2a=216$ $2b=186$
4 Mod. 50Z 20° P.A.
使用カッター 4 Mod. 25Z 20° P.A.

〔V〕 結 言

- (1) 等速切削法に依る歯形の不均一はカッターとブランクの間の滑りに依つて惹起される。
- (2) 歯形が全周に亘り殆ど均一な機構学的に支障なく噛合う歯数 Z なる楕円歯車は、歯数 $\frac{Z}{2}$ なる平歯車用ピニオンカッターを用い第1報と同じ原理に依り $\frac{a-b}{2}$ の偏心率を以て機械スピンドルに取付けカッター側とテーブル側の回転比を1:1として切削する。この時の変速装置内には a, b より定る理論的変速係数 μ を満足する偏心率 e となる変速用楕円歯車を挿入する。この μ は次の如し

$$\mu = \frac{-a^2 + \{\sqrt{a^2 + b^2 - ab} - a + b\}^2}{a^2 + \{\sqrt{a^2 + b^2 - ab} - a + b\}^2}$$

- (3) 変速切削に於けるピニオンカッターのピッチ円半径 R_1^* は a, b を以て次の如く与える。

$$R_1^* = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_c}\right)^2 R^2 + l^2 + \frac{2\omega'}{\omega_0 + \omega_c} lR}$$

- (4) 変速用の楕円歯車の代りに偏心率歯車を用いても精度上何等支障を来さない。

尚現在迄に切削した製品についての測定結果は誤差論と共に今後の機会に報告し度いと考へている。

終りに本研究を進めるに当り種々懇切なる御指導を戴いた東北大学教授松山博士に対し深甚なる謝意を表す。又色々有益なる御助言を戴いた亀有工場森田主任、中研明山博士に対し謝意を表す。又偏心歯車の使用に際し詳細なる研究論文の提供及び御討論を戴いた山形大学助教授石田喜助氏に対し謝意を表す。尙実験中種々協力を戴いた大友歯切員、木戸旋盤員の両氏に感謝す。

参 考 文 献

(1) 松山多賀一： 機械学会論文集 Vol. 8, No. 31

(2) 松山多賀一： 第 28, 29 期総会用前刷

(3) 明山正元： 機械学会論文集 Vol. 8, No. 30

(4) 石田喜助： 機械学会論文集 Vol. 15, No. 50
Vol. 17, No. 59

(5) 藤井康治： 機械学会論文集 Vol. 8, No. 31

(6) 近友普、松山多賀一： 機械学会米沢地方会前刷

(7) 渡辺茂： 歯車歯型論

(8) 森田一弘、笠原俊郎： 日立評論 Vol. 35, No. 2

* 昭和 28 年 3 月特許申請中



実用新案 第 394724 号

大 貫 康 志

渦巻室を有するタービンポンプ

この考案は、ケーシングの補強のために渦巻室部分にケーシングと一体に形成した案内羽根 1 と必要に応じて交換出来る案内羽根 2 との喰い違いを容易に補正し得るようにしたものである。

案内羽根 1 の一側面部分 C を、側蓋側に於けるケーシングの内周縁部 D より突出させ、案内羽根 2 の側蓋側に於ける側壁に切欠部 A を設ける。

側蓋を取り除けば、案内羽根 1・2 の接触部分 C・B が露出するので、両羽根の喰い違いが直ちに判るから、これを補正してポンプの効率の低下を防ぐことが出来る。(富田)

