電子管式アナログコンピューター

三 浦 武 雄*

The Electronic Analog Computer

By Takeo Miura

Central Research Laboratory, Hitachi, Ltd.

Abstract

The electronic analog computer is a type of differential analyzers which operate the integral and other complicated calculations utilizing electronic circuits.

With its simplicity of handling and rapidness in working out answer, this instrument finds wider field of application for automatic controlling devices and similar equipment than for its original purpose of computer.

Aiming at the utilization of the computer in this nature, Hitachi Central Research Laboratory, after almost one year of designing effort, completed the first trial product last December.

The writer who joined the study and trial manufacturing describes in this paper calculation principle, calculation error, and a few examples of application of this computer citing data he obtained in the trial manufacturing for explanation.

〔I〕 緒 言

近年各種の工業や科学の発達に伴い、種々複雑な問題を迅速多量に解決する必要に迫られて来た。例えば自働制御の問題もその一例である。その自作は一般に常微分方程式で現わされ、制御経過を云々し乱調及び即応性の問題を解決するにはその方程式の解を、パラメーターを種々に変え連続的に求める必要がある。更に、非線型の問題も含まれて来る。この場合高い精度をもつた解を必要としないが、それですらこれを数学的に取扱う事は困難な事である。

このように特に高い精度を必要としない計算を自働的に行う装置が茲に示すアナログコンピューターである。言い換えればアナログコンピューターはその名も示すように一種の電気演算器であるが、かう言う煩雑な問題を即時に解決して行くデザインマシンと言つた方が妥当かも知れない。

我々はかう言う点で最も実用性のある電子管を用いたアナログコンピューターを試作し、既に実際に利用してゐる。茲に試作内容と演算器の概要を述べる。

〔II〕 動作原理及び演算誤差

与えられた微分方程式の解を自働的に求めるには、電氣的にはその特性が方程式を満足するような相似回路を構成しそこに生ずる現象を観察すればよい筈である。元来電気回路ではCの端子電圧及びLの逆起電力が、電流に対する時間の積分若しくは微分の関係にあるので、この性質を利用すれば容易に相似回路が実現できる。従つて電子管式アナログコンピューターでは従属変数として電圧、独立変数として時間がとられている。

我々の試作したアナログコンピューターの相似回路の基本は第1図（次頁参照）の饋環演算回路である。その構成は(a)であり、等価回路は(b)である。更にこれにテブナンの定理を用いると(c)の如くなる。第1図(c)に於て

$$\left. \begin{aligned} e_i &= iZ_p + e \\ e &= i_2 Z_f + e_0 \\ e_0 &= i_2 Z_s' - \mu' e \\ e &= i_1 Z_g \\ i &= i_1 + i_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

これ等の関係より入力及び出力の関係を求めると

* 日立製作所中央研究所

(a) 饋環演算回路

A: 増巾器

(b) 等価回路 (その1)

(c) 等価回路 (その2)

- $Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{in}$... 入力インピーダンス
- Z_f 饋環インピーダンス
- Z_0 負荷インピーダンス
- Z_g 増巾器入力インピーダンス
- Z_s 増巾器出力インピーダンス
- μ 増巾器利得
- e_i 入力電圧
- e 増巾器入力電圧
- e_0 出力電圧
- $Z_s' = \frac{Z_s Z_0}{Z_s + Z_0}$ $\mu' = \frac{\mu Z_0}{Z_s + Z_0}$ $\frac{1}{Z_p} = \sum \frac{1}{Z_{in}}$

第1図 饋環演算回路

Fig. 1. Operational Amplifier

$$e_0 = -Z_f \sum \frac{e_i}{Z_i} \left(\frac{\mu' - \frac{Z_s'}{Z_f}}{1 + \mu' + Z_f + \frac{Z_f + Z_s'}{Z}} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{但し} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_g} + \sum \frac{1}{Z_i} \\ \dots\dots\dots(2) \end{array} \right\}$$

今 $\mu \rightarrow \infty$ とすると (2) は次式の如くなる。

$$e_0 = -Z_f \sum \frac{e_i}{Z_i} \quad \dots\dots\dots(3)$$

Z_i 及び Z_f に抵抗又は容量を用いる事に依り種々の演算が可能である。例えば積分回路は Z_i を抵抗 R , Z_f を容量 C にすれば (第2図)

$$e_0 = -\frac{1}{CR} \frac{e_i}{p} \quad \dots\dots\dots(4)$$

として実現出来、また加算回路や符号変換回路は Z_i, Z_f

第2図 積分回路

Fig. 2. Integrating Circuit

第3図 加算回路

Fig. 3 Adding Circuit

をそれぞれ抵抗にする事に依り (第3図)

$$e_0 = -\sum \frac{R_f}{R_i} e_i \quad \dots\dots\dots(5)$$

となり実現しうる。

ところがこの相似回路を用いた場合、実際には μ は有限であり、尚且つ周波数特性があるため各演算回路には (2) 式の括弧内の誤差を生ずる⁽¹⁾。従つてこれ等の誤差を含む演算回路を用いて常微分方程式を解いた場合、その解にある程度の誤差を生ずる事は勿論である。今この誤差即ち総合演算誤差⁽²⁾に就いて考察して見る。

与えられた常微分方程式を

$$A_m \frac{d^m y}{dt^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

とする。この解を決定するものは特性方程式の m 箇の根であつてその特性方程式は

$$A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_1 p + A_0 = 0 \quad \dots(7)$$

$$\therefore p^m + \frac{A_{m-1}}{A_m} p^{m-1} + \dots + \frac{A_1}{A_m} p + \frac{A_0}{A_m} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

(8) 式の左辺を $F(p)$ と定義する。即ち

$$F(p) = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

アナログコンピューターを用いて (6) 式を解いて得られる演算解には (9) 式の特性根 $p_1, p_2, \dots, p_m$ にそれぞれ誤差項が含まれて来る筈である。この誤差を求めれば総合演算誤差が求まつた事になる。

第4図は積分回路を基本とした (6) 式を解く演算回路網である。(一般に微分回路は誤差を生じ易いので用いられない。) 今積分回路の演算特性を $I(p)$ とすると第4図の回路網より

第4図 積分回路を基本とした m 次常微分方程式の演算回路網

Fig. 4. Block Diagram of Set up with Integrating Circuit for the Solution of an Ordinary Differential Equation of Order m with Constant Coefficients

$$y + \frac{A_{m-1}}{A_m} I(p)y + \frac{A_{m-2}}{A_m} I^2(p)y + \dots + \frac{A_0}{A_m} I^m(p)y = 0 \quad \dots (10)$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{I(p)} \right\}^m y + \frac{A_{m-1}}{A_m} \left\{ \frac{1}{I(p)} \right\}^{m-1} y + \dots + \frac{A_0}{A_m} y = 0 \quad \dots (11)$$

即ち第4図の演算回路網を用い(6)式を解いた場合の解の特性方程式は(12)式のようになる。

$$F \left\{ \frac{1}{I(p)} \right\} = 0 \quad \dots (12)$$

次に積分回路の演算特性 $I(p)$ を求める。(2)式に於て

$$Z_{g \rightarrow \infty}, Z_{s'} \rightarrow 0, Z_i = R, Z_f = \frac{1}{cp}$$

とすると

$$e_0 = -\frac{e_i}{pT_i} \frac{\mu}{1 + \mu + 1/pT_i} \quad cR = T_i \quad \dots (13)$$

(13)式の結果では積分回路を一つ用いる毎に出力の符号が変り、且つその絶対値が $1/T_i$ になる為第4図の積分回路は係数回路と組合せ出力を T_i 倍し符号の変る事を防いでいる。

従つてこの場合の積分回路の入力及び出力の関係は

$$\frac{e_0}{e_i} = \frac{\mu T_i}{1 + (1 + \mu)pT_i} = I(p) \quad \dots (14)$$

今(11)式の根の中、 n 番目の根を p_n' とすると p_n' は

$$\frac{1}{I(p)} = p_n \quad \dots (15)$$

の根である。即ち(14)式より

$$p_n' = \frac{\mu}{1 + \mu} \left(p_n - \frac{1}{\mu T_i} \right) \simeq p_n - \frac{p_n}{\mu} \left(1 + \frac{1}{p_n T_i} \right) \quad (\mu \gg 1) \quad \dots (16)$$

(16)式と(9)式より求まる特性根の差がアナログコンピュータを用いて(7)式を解いた場合の誤差 ϵ になる。即ち

$$\epsilon = p_n' - p_n = -\frac{p_n}{\mu} \left(1 + \frac{1}{p_n T_i} \right) \quad \dots (17)$$

一般に増巾器の利得 μ は単に有限な値であるのみならず周波数特性を有している。今上限カットオフ周波数を f_c とすると μ には次の関係が成立する。

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + p\tau} \quad \tau = \frac{1}{f_c} \quad \dots (18)$$

(18)式の $p = p_n'$ として(16)式を代入すると

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \tau \left\{ p_n - \frac{p_n}{\mu} \left(1 + \frac{1}{p_n T_i} \right) \right\}} \quad \dots (19)$$

(19)式を(17)式に代入すると第一近似として

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= -\frac{p_n}{\mu_0} \left(1 + \frac{1}{p_n T_i} \right) - \frac{\tau}{\mu_0} p_n \left(p_n - \frac{p_n}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0 T_i} \right) \\ &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \epsilon_1 &= -\frac{p_n}{\mu_0} \left(1 + \frac{1}{p_n T_i} \right) \\ \epsilon_2 &= -\frac{\tau}{\mu_0} p_n \left(p_n - \frac{p_n}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0 T_i} \right) \simeq -\frac{\tau p_n^2}{\mu_0} \quad (\mu \gg 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots (20)$$

即ち ϵ_1 は μ_0 が有限である事に依り生ずる特性根の誤差、 ϵ_2 は $\mu = \mu(p)$ である事に依り附加される特性根の誤差である。従つて演算器を用いて(7)式を解いた場合の一般解は

$$y = \exp \left\{ p_n - \frac{p_n}{\mu_0} \left(1 + \frac{1}{p_n T_i} \right) - \frac{\tau p_n^2}{\mu_0} \right\} t \quad \dots (21)$$

この事より誤差を出来る丈小さくするためには、増巾器の利得 μ_0 を出来る丈大に選ぶ事は勿論、積分時定数 T_i カットオフ周波数 f_c を大にする必要がある。

今単弦運動方程式を演算器を用いて解いた場合に就いて考えてみる。与えられた方程式を

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad \dots (22)$$

とすると(22)式の特性方程式の根は

$$p_1, p_2 = \pm j\omega_0 \quad \dots (23)$$

従つてアナログコンピュータを用いて(22)式を解いた場合の解は

$$\left. \begin{aligned} y &= A \exp(\alpha - \beta)t + B \exp\{-(\alpha + \beta)t\} \\ \alpha &= j\omega_0 \left(1 - \frac{1}{\mu_0} \right) \quad \beta = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{T_i} - \tau\omega_0^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots (24)$$

A 及び B は積分定数

初期条件として $t=0$ で $y=0, \frac{dy}{dt}=1$ を与えると

(24)式は

$$y = \frac{\mu_0}{\omega_0(\mu_0 - 1)} \exp \left\{ -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{T_i} - \tau\omega_0^2 \right) t \right\} \times \sin \omega_0 \left(1 - \frac{1}{\mu_0} \right) t \quad \dots (25)$$

(25)式がアナログコンピュータより得られる解である。参考の為に(22)式を計算に依り求めた解は

$$y = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad \dots (26)$$

となり(25)式の指数項に示す減衰が含まれる。

今演算記録時間を t_0 とし減衰が極めて小さいと仮定するとその間に生ずる振巾誤差 ϵ_A は (25) 式より

$$\epsilon_A = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{T_i} - \tau \omega_0^2 \right) t_0 \dots\dots\dots (27)$$

例えば $t_0 = 0.01 \text{ sec}$, $\mu_0 = 2800$, $\tau \approx 0$ とすると各誤差範囲内に収めるに必要な最小時定数は

$$\epsilon_A = 1\% \text{ 以内の場合 } T_i \approx 3.6 \times 10^{-4} \text{ sec}$$

と言う事になる。

〔III〕 試作装置に就いて

第5図が我々の所で試作した電子管式アナログコンピューターの外観である。本装置は所謂繰返し型と言われる方式のものであつて、解は 50 c/s に同期して繰返し描かれブラウン管上に静止像として求められる。以下主要部分の二三について説明する。

(1) 基本演算増巾回路

第6図が基本演算増巾回路である。この増巾器の利得及び周波数特性が如何に演算解に誤差を与えるかは前節に述べた通りである。増巾回路は C-R 三段結合の饋環回路であり出力は出力側から見た内部抵抗 Z_o を極力減らすためにカソードフォロワーでとり出している。回路の利得は 69 db, 帯域上限周波数は 10 kc であり、積分時定数を $4 \times 10^{-4} \text{ sec}$ 以上に選べば積分誤差は 1% 以下に収まるようになっていいる。結合段の二極管は初期条件を整えるための直流分再生及びゲートに用いている。

(2) 解指示装置⁽⁶⁾

解の指示には前述のようにブラウン管が用いられ、横軸に独立変数 (x), 縦軸に従属変数 (y) が画がかれる。従つて x 及び y の値はそれぞれ目測か、或いはブラウン管の前面に置かれたプレートの目盛より求める。所がこの方式ではブラウン管回路の偏向特性より来る誤差が混入しやすい。又解を大きく画かす為にはキネスコープの

第5図 電子管式アナログコンピューター外観図
Fig. 5. View of Hitachi Electronic Analog Computer

使用も考えられるのであるが、電磁偏向で然も振巾調節を可能にしたキネスコープ回路の偏向特性に直線性をうるさく要求することは困難である。この二点より本試作装置では電氣的に x 及び y を算出する方式を採用している。

第7図は解指示装置のブロック線図である。即ちブラウン管の縦軸には入力及び長短二つのタイムマークがそれぞれ 50 c/s ずつ交互に加えられている。これを 25 c/s でスイープし、タイムマークと入力 (解) とを同時にブラウン管上に静止像として得ている。即ち x は長短二つのタイムマーク (長いマークを短いマークの 5 つ目毎に入れれば便利である。) で求められる。 y に就いては例えば y_i を求める場合これに直流分を重畳し、 y_i が x 軸に重なるに要する直流電圧より求められるようになっていいる。この事に依り指示装置部分に於ける誤差の原因を極力減少し得た。

第6図 饋環演算回路の接続図
Fig. 6. Circuit of Operational Amplifier

になる。各部の定数は演算記録時間が 0.01 sec である為に観測の場合の時間軸を実際の 1/1,000 とし第8図に示した実験結果と (29), (30) 式より定めた値である。

実験結果を示すと第13, 14図である。被制御装置への単位擾乱として第12図の短形波を用いた。

第13図 (a) は乱調防止回路の入らない場合の系の状況を示し、(b) 及び (c) はそれぞれ実際のダンピング装置の定数を入れて求めた系の制御経過を示す。これ等の実験結果に就いては偽作をすべて線型と近似している為

第12図 負荷変動に匹敵する擾乱
Fig. 12. Analog Disturbance of Load Variation

第13図 (a) 乱調状態の制御系
 $A = A_1 A_2 A_3 A_4 = 12.2$

Fig. 13. (a) Response of Servo Loop in Hunting
 $A = A_1 A_2 A_3 A_4 = 12.2$

第13図 (b) 乱調防止回路の入った場合の制御系の特性
 $A = 12.2 \quad A_5 = 0.13 \quad T_5 = 1.3''$

Fig. 13. (b) Response of Servo Loop with Anti-Hunting Loop
 $A = 12.2 \quad A_5 = 0.13 \quad T_5 = 1.3''$

第13図 (c) 乱調防止回路の入った場合の制御系の特性
 $A = 12.2 \quad A_5 = 0.155 \quad T_5 = 0.8''$

Fig. 13. (c) Response of Servo Loop with Anti-Hunting Loop
 $A = 12.2 \quad A_5 = 0.155 \quad T_5 = 0.8''$

に実際の系の結果と如何に一致しているか否かについては一概に云々出来ない。併し乍ら実際の系の制御経過のオーバーシュートが 1.2 であるのに対して略々一致した結果を得ている。

第14図はアナログコンピューターを自動制御系の設計に用いた一例であつて、(a) はダンピング回路の時定数及び利得を加減し略々最適制御の状態に持つて行つた場合の制御経過である。(b) はその時のダンピング回路の応答である。

第14図 (a) 最適制御状態の制御系の特性
 $A = 12.2 \quad A_5 = 0.318 \quad T_5 = 0.4''$

Fig. 14. (a) Response of Servo Loop in Optimum Setting
 $A = 12.2 \quad A_5 = 0.318 \quad T_5 = 0.4''$

第14図 (b) 最適制御状態下の乱調防止回路の特性
 $A_5 = 0.318 \quad T_5 = 0.4''$

Fig. 14. (b) Response of Anti Hunting Loop
 $A_5 = 0.318 \quad T_5 = 0.4''$

第15図 $A = 18.7$ の場合の制御系の特性
(但し乱調防止回路なし)

Fig. 15. Response of Servo Loop, in Case of $A = 18.7$
(with Anti-Hunting Loop)

第16図 $A = 11.5$ の場合の制御系の特性
(但し乱調防止回路なし)

Fig. 16. Response of Servo Loop, in Case of $A = 11.5$
(without Anti-Hunting Loop)

次にアナログコンピュータの見地よりこの場合の誤差を検討する。今ダンピング回路のない場合の制御系の総合利得を種々に変化しそれにより得られた結果と計算結果とを比較する。検出回路より被制御装置迄の伝達函数を $KG(p)$ とすると総合利得 $A=18.7$ とした場合の制御系の特性方程式は第8図より

$$\begin{aligned} \frac{KG(p)}{1+KG(p)} &= \frac{18.7}{(1+0.74p)(1+2.8p)(1+0.8p)+18.7} \\ &= \frac{18.7}{(p+3.26)(p-0.16+j1.88)(p-0.16-j1.88)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(31)$$

となりこの場合に生ずる乱調の周波数は $2\pi f=1.88$ より求められる。これに時間軸を考えればブラウン管上には 299 c/s の発振振動が得られればよい。これに相当したコンピュータの解が第15図であり約 300 c/s の振動が得られた。

次に系が連続振動を起す場合に就いてその時の総合利得 (A) 及び乱調周波数 (f) を求め誤差を検討する。即ち系が連続振動を起すための条件は Nyquist criterion⁽⁸⁾ より

$$KG(p) = -1 \dots\dots\dots(32)$$

即ち $(1+0.74p)(1+2.8p)(1+0.8p) = -A$
 $p(1.66p^2+4.34)+(4.9p^2+1) = -A$

$$\therefore p^2 = -\frac{4.34}{1.66} = -2.56 \quad \therefore p = j1.6$$

故にこの場合の乱調周波数は

$$f = \frac{1.6}{2\pi} = 0.254$$

従つてブラウン管上には 254 c/s の振動が得られればよい。尙この場合の総合利得 A は (32) 式より

$$A = -(4.9p^2+1) = 11.54$$

これに相当したものが第15図であつて、実験結果は $f \approx 240$ c/s でやゝ減衰している。

[V] 結 言

以上、試作電子管式アナログコンピュータを中心に動作原理よりその応用に致る迄簡単に一例を示して説明した。但し応用例の所に於ては、アナログコンピュータの大きい特長である非線型の取扱いが容易に実現する事を述べなかつたが今後の機会にゆづることにした。

本試作装置では現在誤差 4% 程度で 16 階常微分方程式の演算が可能であり、非線型要素としても飽和現象、不動作帯域現象、バックラッシュ現象その他の相似回路を有し現在各種の自動制御装置の解析及び設計に利用しつゝある事を示した。

以上要するにアナログコンピュータが今後工学分野に広く用いられるべき装置である事を主張して止まぬ次第である。

終りに臨み種々御指導を賜つた東大星合教授、野村助教授、研究の機会を与えられた日立中央研究所菊田博士、浜田博士、御助力御討議を戴いた只野文哉博士、森戸望、渡辺宏の諸氏を始め関係者の方々に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- (1) D. McDonald: R.S.I. Vol. 21 p. 154 (1950)
- (2) A.B. Macnee: I.R.E. Vol. 40 p. 303 (1952)
- (3) Korn: Electronic Analog Computers, Mac-Graw Hill (1952)
- (4) A.B. Macnee: I.R.E. Vol. 3 p. 1315 (1949)
- (5) 野村: 電気三学会講演予稿 (昭 27-11)
- (6) 三浦: 特許出願中
- (7) G. A. Philbrick: Electronics No. 6 p. 108 (1948)
- (8) H. Nyquist: B.S.T.J. Vol. 11 p. 126 (1932)

HITACHI REVIEW

No. 3

—NOW ON SALE—

The Hitachi Review started by Hitachi, Ltd. for the purpose of introducing to readers overseas the newest phases of engineering activities of the Company, continues to gain favourable comment from its inception.

The third issue has recently been published. Articles in this issue are as mentioned below; each of them deals with most interesting subject of the writer's field of study and is full of suggestion. Immediate subscription is invited.

- 27,500 kW Water Turbine with 28,500 kVA Alterator for Ojiya Power Plant, Japanese National Railways
T. Komoriya and T. Takagi
- Switchboard and Carrier Current Protective Relaying Set for the Ojiya Power Station, Japanese National Railways.....
H. Kawai, S. Morii, F. Saruwatari and H. Yakata
- 275 kV 70,000 kVA Transformers for Narude Hydraulic Power Station of the Kansai Denryoku Company
K. Sudo
- New Type 80.5 kV 4,000 MVA Contrarc Circuit Breaker.....
M. Kuwayama and Y. Yamada
- 10,000 kW Steam Turbine and 12,500 kVA Turbine Generator for Madra Power Station, India
H. Urata, K. Takabayashi, T. Nakahara and K. Moriyama
- 4,000 kW Ilgner Set for 950 mm 2-High Reversible Blooming Mill, Supplied to Yawata Iron Works of the Yawata Iron and Steel Mfg. Co.....
O. Tazuki, S. Kida, M. Yamamoto, S. Izumi and K. Hirakawa
- Synchronized Drive of Wound Rotor Induction Motors with a Common Secondary Resistor
S. Matsui and Y. Sonoyama
- A Low Energy Automatic Synchronizer
E. Kobayashi and S. Hira
- Calculating Formulae for Characteristics of Multigrid Vacuum Tubes
Y. Sawada
- Measurement of Displacement-Response Transducing Coefficient of Transmitter Carbon Granule
S. Nishiyama
- The Parallel Operation of Blowers or Fans
K. Suzuki and H. Iesaka
- Economical Rate of Acceleration for Rapid Transit Trains and MMC Multi-Notch Control System
K. Hirata
- Heat Treatment and the Properties of Cold Punching Die Steel
S. Koshiba

Price: ¥ 200 a copy Postage: ¥ 40

Publisher: Hitachi Hyoron Sha, Hitachi, Ltd.
 Marunouchi, Tokyo, Japan