

# 不均等通信線路における伝送方程式の解法

## The Approximate Solution of the Transmission Equations of the Non-Uniform Lines

八 田 達\*

### 内 容 梗 概

同軸ケーブルの不均等理論の基礎となる送端インピーダンスの計算式は、すでに二三の研究者によって誘導されているが、演算の過程が粗漏に過ぎると思われる点が多く、従来の不均等理論が果して正しい基礎から出発したものであるかどうか疑問視される点が少ない。本稿ではこれらの計算の基礎をあきらかにするため、不均等線路の伝送方程式の近似解を求め、逆流および伴流の現象を定量的に説明し、送端インピーダンスの正しい表示式を求めた。計算の方法は、インピーダンス偏倚が平均インピーダンスにくらべて小さい事実を利用した逐次近似方法で、任意の精度の解を求める方法があたえられている。本稿の方法は、計算式の型が単純であるため、現象の本質を直感的に理解する上に好都合である。

### 〔I〕 緒 言

高周波用同軸ケーブルは、内部導体の偏心、外部導体の凹凸、絶縁材料の不均一などによつて、特性インピーダンスに不規則な偏倚が存在し、これが伝送信号の内部反射を招いて、送端インピーダンスの周波数特性を乱だし、あるいは主信号におくれて到達する伴流の尾となつて受信々号に妨害をあたえることが知られている。このように、特性インピーダンスの不均等の定量的評価は同軸ケーブル技術においてもつとも重視される問題点であつて、これに関する実験的、理論的研究はすでに枚挙にいとまがない。

送端インピーダンスの実測値からケーブルの不均等を示す尺度  $S^2r$  を求める方法はその代表的なものであつて、多少の非難はあるにしてもこれにかわるほかの適当な方法もなく、その要旨は今もなお妥当なものとして認められている。これらの理論における統計学的な論議はしばらく措くとして、その理論の基礎となる送端インピーダンスの表示式の誘導はきわめて大まかなものであつて確とした基礎の上に立つものではない。たとえば送端の電圧および電流の定義そのものがきわめて曖昧な上<sup>(1)</sup>、送受両端のインピーダンス不整合の影響なども明確に評価されておらず、逆流や伴流の1次波に対するウェイト (Weight) などもきわめて直感的に処理されているに過ぎない<sup>(2)</sup>。このように、従来の不均等理論が果して正しい基礎から出発したものであるかどうか疑問に思われる点は少ないが、これらの点を解明するためには、やはり不均等線路の微分方程式から出発し、正確な境界条件をあたえてこれを解くほかはないと思われる。この点はすでに電々公社通研線路課の小林氏<sup>(1)</sup>によつて指摘され、微分方程式から出発した不均等理論が詳細にあたえられているが、同氏の計算が成立するのは送受両端のイ

ンピーダンス整合がほぼ完全な場合に限られている。さらに、茨城大学の安宅、松田両氏<sup>(2)</sup>による Green 函数を用いた計算も報告されているが、ここでは受端短絡または開放の場合のみが考察の対象とされている。

不均等通信線路の伝送方程式の解法は、マイクロ波技術に用いられるテーパライン (Tapered Line) の研究にも関連するもので、すでに Walker-Wax<sup>(3)</sup> の計算が主流をなし、これと相似の線を踏襲した研究も相当数報告されている。Walker-Wax の方法は精度の高い方法には違いないが、その表示が複雑で現象の本質を印象的に把握しえない難点があり、また両端の不整合がはなはだしいとき (特に受端開放短絡など) は逐次近似の収斂が非常に悪くなるので、同軸ケーブルの不均等の解明に適当な方法とはいえない。

筆者がここに採りあげた方法は安宅、松田両氏の方法に近い。インピーダンス偏倚が小さい事実を利用して逐次近似を行う点は、本稿の方法も両氏のそれとことなるところはないが、筆者は Green 函数を用いずにさらに一般的な境界条件で解いているので、適応の範囲はいちじるしく拡張されている。また、安宅、松田両氏は、不均等の影響はインピーダンス偏倚のみに現われて伝播定数はこれによつて影響されない、としているが、本稿では発泡ポリエチレン絶縁ケーブルのように、誘電率の不均一が特性インピーダンスばかりでなく伝播定数にも不均等を招来する場合もあることを考えて、伝播定数も場所の函数として取扱つている。この方法は、Walker-Wax の方法のような複雑な置換を行わずに、線路上の電圧および電流の分布を直接的に計算するものであるから、現象の本質をきわめて印象的に把握できる利点がある。この計算は演算そのものに格別の困難のあるわけではないが、逐次近似の操作や境界条件のあたえ方などに細心の注意を払わないと誤つた結論に到達することがある。

\* 日立電線株式会社電線工場

〔II〕 基礎方程式の誘導

第1図は長さ  $l$  の不均等線路,  $Z_1, Z_2$  は送受両端のインピーダンス,  $E$  は送端に加えられた起電力である。任意の点  $x$  において電流および電圧を  $V$  および  $I$  とすれば, これらの間にはつぎの関係がある。

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dx} = z(x)I & \dots\dots\dots (1) \\ -\frac{dI}{dx} = y(x)V & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

ここで,  $z(x)$  および  $y(x)$  はこの線路の単位長当りの直列インピーダンスおよび並列アドミタンスを意味する。いま, 任意  $x$  の特性インピーダンス  $Z(x)$  および伝播定数  $\gamma(x)$  をそれぞれつぎの関係から定義し,

$$\sqrt{z(x)/y(x)} = Z(x) \dots\dots\dots (3)$$

$$\sqrt{z(x)y(x)} = \gamma(x) \dots\dots\dots (4)$$

これを (1) 式および (2) 式に代入すれば,

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dx} = \gamma(x)Z(x)I & \dots\dots\dots (5) \\ -\frac{dI}{dx} = \frac{\gamma(x)}{Z(x)}V & \dots\dots\dots (6) \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} - \left\{ \frac{1}{\gamma(x)} \frac{d\gamma(x)}{dx} + \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \right\} \frac{dV}{dx} - \gamma^2(x)V = 0 & \dots\dots\dots (7) \\ I = -\frac{1}{\gamma(x)Z(x)} \frac{dV}{dx} & \dots\dots\dots (8) \end{cases}$$

(5) 式, (6) 式, または (7) 式, (8) 式は不均等通信線路の基礎微分方程式である。境界条件は

$$\begin{cases} x=0 \text{ で } V = E - Z_1 I & \dots\dots\dots (9) \\ x=l \text{ で } V = Z_2 I & \dots\dots\dots (10) \end{cases}$$

また, 境界条件は

$$\begin{cases} x=0 \text{ で } V: \text{ 既知} & \dots\dots\dots (11) \\ x=l \text{ で } V = Z_2 I & \dots\dots\dots (12) \end{cases}$$

として解いてもよいが (演算もこの方が楽になる), (9) 式, (10) 式の方が一般的で, 計算結果の適応の範囲が広がる利点があるので, 本稿ではこの条件によることにする。

いま, つぎのように, 特性インピーダンス  $Z(x)$  を, 平均値とこの値からの偏差との重畳によつて表示することにする。

$$Z(x) = Z_0 + S(x) \dots\dots\dots (13)$$

同軸ケーブルで問題となるのは

$$S(x) \ll Z_0 \dots\dots\dots (14)$$

となる場合である。(14) 式が満足される限り,  $Z_0$  は任意にえらんでさしつかえなく,  $Z_0, S(x)$  とともに実在する量というよりは補助量と考えた方がよい。

緒言でものべた通り, 従来の取扱いでは同軸ケーブルの伝播定数に現われる不均等はいちじるしく小さいと考えてこれを無視するのが普通であつたが, 発泡ポリエチレン絶縁ケーブルのように絶縁体の誘電率 (発泡度) にバラツキのあるものに対してはこのような仮定は成立しないので, 本稿ではさらに一般的な取扱いを行うため, 伝播定数も場所の函数として取扱うことにする。

〔III〕 微分方程式の第0近似解

(5) 式, (6) 式, または (7) 式, (8) 式の厳密解を直ちに求めることは事実上不可能に近いが, (14) 式の条件に着目して逐次近似 (摂動計算) を行えば, 任意の精度の解を誘導するのに原理的困難はない。すなわち, 摂動パラメータとして  $S(x)/Z_0$  をとり, これに関して 0, 1, 2, ..... 次の項までとつた近似解をそれぞれ第 0, 1, 2, ..... 近似解として, これらを  $V_0, V_0 + V_1, V_0 + V_1 + V_2, \dots\dots (I_0, I_0 + I_1, I_0 + I_1 + I_2, \dots\dots)$  で表示する。

(7) 式で  $S(x) = 0$  とすれば, 電圧および電流の 0 近似値  $V_0, I_0$  はつぎの微分方程式を満足しなければならないことがわかる。

$$\begin{cases} \frac{d^2V_0}{dx^2} - \frac{1}{\gamma(x)} \frac{d\gamma(x)}{dx} \frac{dV_0}{dx} - \gamma^2(x)V_0 = 0 & \dots\dots\dots (15) \\ I_0 = -\frac{1}{\gamma(x)Z(x)} \frac{dV_0}{dx} & \dots\dots\dots (16) \end{cases}$$

(15) 式, (16) 式の一般解は

$$V_0 = Ae^{-u_0^x} + Beu_0^x \dots\dots\dots (17)$$

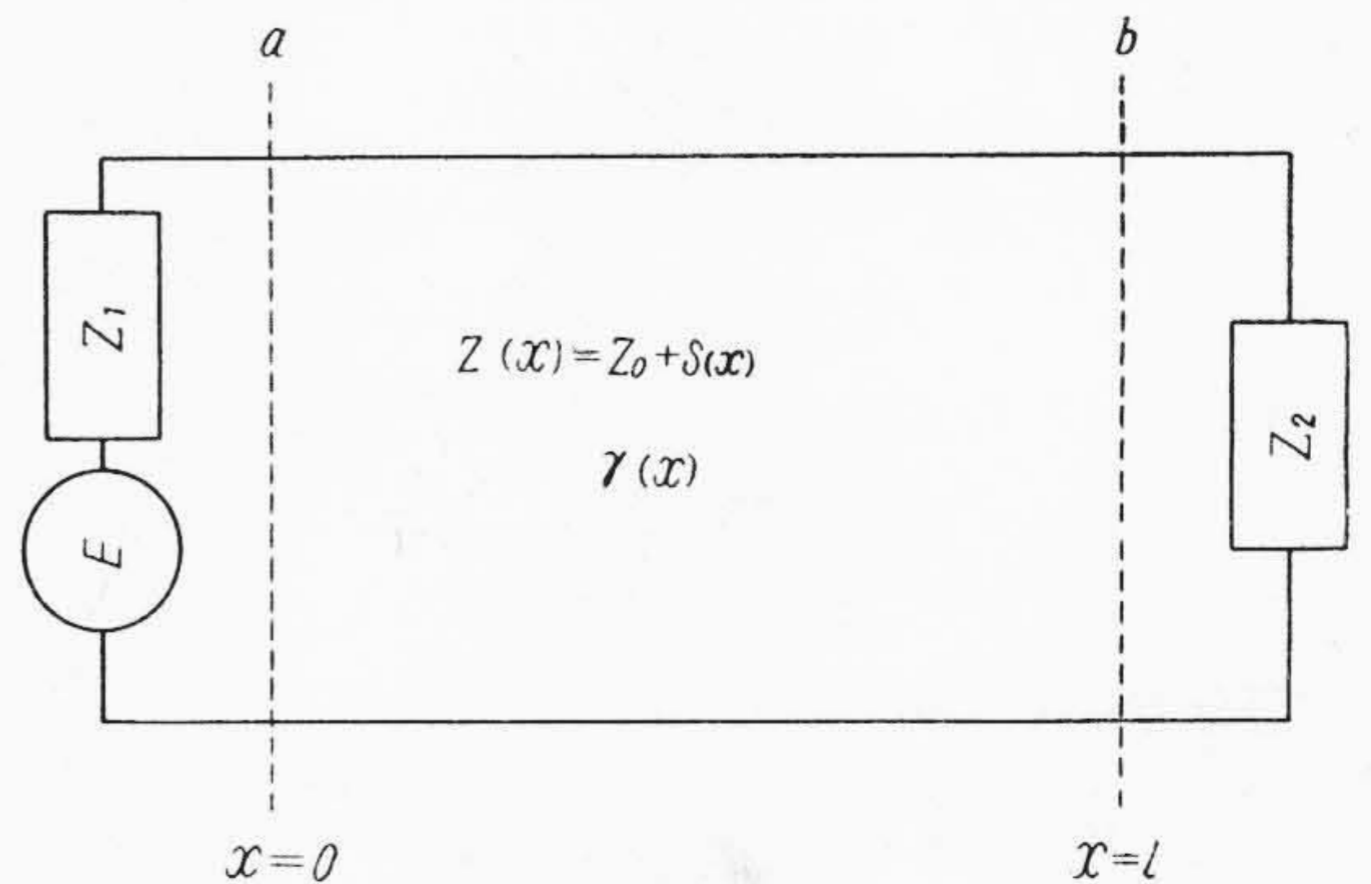
$$I_0 = \frac{1}{Z(x)} \{ Ae^{-u_0^x} - Beu_0^x \} \dots\dots\dots (18)$$

上式に現われる  $u_{x_1}^{x_2}$  はつぎのように定義されている。

$$u_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(\xi) d\xi \dots\dots\dots (19)$$

したがつて

$$u_{x_1}^{x_2} = -u_{x_2}^{x_1}, \quad u_{x_1}^{x_2} = u_{x_1}^{x_3} + u_{x_3}^{x_2} \dots\dots\dots (20)$$



第1図 不均等伝送線路  
Fig. 1. Non-Uniform Transmission Line

(17) 式および (18) 式の第1項および第2項はそれぞれ第1図の正および負の方向に向つて伝播する進行波を意味している。境界条件は

$$x = 0 \text{ で } V_0 = E - Z_1 I_0 \dots\dots\dots (21)$$

$$x = l \text{ で } V_0 = Z_2 I_0 \dots\dots\dots (22)$$

これから A, B はつぎのように定められる。

$$A = \frac{1}{1 - m_1 m_2 e^{-2u_0^l}} (1 - m_1) \frac{E}{2} \dots\dots\dots (23)$$

$$B = m_2 e^{-2u_0^l} A \dots\dots\dots (24)$$

ここで,  $m_1$  および  $m_2$  は送受両端のインピーダンス不整合に基づく反射係数で, つぎのように定義されている。

$$m_1 \equiv \frac{Z_1 - Z(0)}{Z_1 + Z(0)}, \quad m_2 \equiv \frac{Z_2 - Z(l)}{Z_2 + Z(l)} \dots (25)$$

しかし, ここで疑問を生ずることは, (15) 式では  $S(x) = 0$  と考えながら, 一方 (16) 式では  $S(x) \neq 0$  と考えている点である。しかし, もともと (17) 式および (18) 式の結果は  $S(x)/Z_0$  に関する第0近似解であつて, 1次以上の項は信頼するに足りない。したがつて  $S(x) = 0$  の場合の正しい解は  $S(x)/Z_0$  を含む項を一切省略して

(16) 式の  $Z(x)$  を  $Z_0$  に

(25) 式の  $m_1, m_2$  を

$$m_1 \rightarrow \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \quad m_2 \rightarrow \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$$

に置き換えて考えなければならない。この際, (16) 式は (15) 式に正確な境界条件をあたえるための補助方程式と考へた方がよく, 近似計算結果の適応の限界に関しては常に慎重に考えなければならない。

#### [IV] 第1近似解 (逆流の計算)

つぎに, 電流および電圧の第1近似値をそれぞれ  $V_0 + V_1, I_0 + I_1$  として, これを (7) 式および (8) 式に代入し,  $S(x)/Z_0$  に関して1次の項までとれば, 1次補正項  $V_1$  および  $I_1$  はつぎの微分方程式を満足しなければならないことがわかる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_1}{dx^2} - \frac{1}{\gamma(x)} \frac{d\gamma(x)}{dx} \frac{dV_1}{dx} - \gamma^2(x) V_1 \\ = \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \frac{dV_0}{dx} \dots\dots\dots (26) \end{cases}$$

$$I_1 = -\frac{1}{\gamma(x) Z(x)} \frac{dV_1}{dx} \dots\dots\dots (27)$$

$V_1$  および  $I_1$  に対する境界条件は

$$\begin{cases} x = 0 \text{ で } V_1 = Z_1 I_1 \dots\dots\dots (28) \\ x = l \text{ で } V_1 = Z_2 I_1 \dots\dots\dots (29) \end{cases}$$

微分方程式 (26) 式の一般解は

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-u_x^\xi} \frac{1}{\gamma(\xi) Z(\xi)} \frac{dZ(\xi)}{d\xi} \frac{dV_0(\xi)}{d\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_x^l e^{-u_x^\xi} \frac{1}{\gamma(\xi) Z(\xi)} \frac{dZ(\xi)}{d\xi} \frac{dV_0(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (30)$$

(30) 式の積分限界の下限が空けてあるのは積分常数に対応するものである。

付録 (A.9) に示されるように, 線路上の点  $x$  における反射係数  $m(x)$  を

$$m(x) \equiv \frac{1}{2Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \dots\dots\dots (31)$$

で定義し, これを (30) 式に代入して整理すれば,

$$V_1 = Ce^{-u_0^x} + De^{u_0^x} + \int_x^l Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_x^\xi} d\xi + \int_0^x Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_x^\xi} d\xi + \int_0^x Be^{u_0^\xi} \{-m(\xi)\} e^{-u_x^\xi} d\xi + \int_x^l Be^{u_0^\xi} \{-m(\xi)\} e^{-u_x^\xi} d\xi \dots\dots (32)$$

$$I_1 = \frac{1}{Z(x)} \left[ Ce^{-u_0^x} - De^{u_0^x} - \int_x^l Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_x^\xi} d\xi + \int_0^x Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_x^\xi} d\xi + \int_0^x Be^{u_0^\xi} \{-m(\xi)\} e^{-u_x^\xi} d\xi - \int_x^l Be^{u_0^\xi} \{-m(\xi)\} e^{-u_x^\xi} d\xi \right] \dots\dots (33)$$

常数 C, D は境界条件 (28) 式, (29) 式からつぎのように定められる。

$$C = \frac{m_1}{1 - m_1 m_2 e^{-2u_0^l}} \left\{ \int_0^l m(\xi) e^{-2u_0^\xi} d\xi - m_2 e^{-4u_0^l} \int_0^l m(\xi) e^{2u_0^\xi} d\xi \right\} A \dots\dots\dots (34)$$

$$D = \frac{m_2 e^{-2u_0^l}}{1 - m_1 m_2 e^{-2u_0^l}} \left\{ m_1 \int_0^l m(\xi) e^{-2u_0^\xi} d\xi - m_2 e^{-2u_0^l} \int_0^l m(\xi) e^{2u_0^\xi} d\xi + \frac{1}{2} (1 - m_1 m_2 e^{-2u_0^l}) \log \frac{Z(l)}{Z(0)} \right\} A \dots\dots (35)$$

電圧および電流分布は (17) 式, (18) 式, および (32) 式, (33) 式の和としてあたえられる。これらの計算結果は  $S(x)/Z_0$  に関する第1近似解で, 2次以上の項は信頼できない。この程度の近似では,

$$m(x) = \frac{1}{2Z_0} \frac{dS(x)}{dx} \dots\dots\dots (36)$$

と近似してよく, また (16) 式の  $1/Z(x)$  は

$$\frac{1}{Z(x)} = \frac{1}{Z_0} \left\{ 1 - \frac{S(x)}{Z_0} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

と考へてさしつかえない。(36) 式, (37) 式の関係を経電圧および電流分布の表示式に代入してこれを整理すれば,

$$\begin{aligned}
 V_0 + V_1 &= (A + C)e^{-u_0^x} + (B + D)e^{u_0^x} \\
 &+ \int_x^l Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_0^\xi} d\xi \\
 &+ \int_0^x Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_0^\xi} d\xi \\
 &+ \int_0^x Beu_0^\xi \{-m(\xi)\} e^{-u_0^\xi} d\xi \\
 &+ \int_x^l Beu_0^\xi \{-m(\xi)\} e^{-u_0^\xi} d\xi \dots\dots (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_0 + I_1 &= \frac{1}{Z_0} \left[ \left\{ A \left( 1 - \frac{S(0)}{Z_0} \right) + C \right\} e^{-u_0^x} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ B \left( 1 - \frac{S(l)}{Z_0} \right) + D \right\} e^{u_0^x} \right. \\
 &\quad \left. - \int_x^l Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_0^\xi} d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^x Ae^{-u_0^\xi} m(\xi) e^{-u_0^\xi} d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^x Beu_0^\xi \{-m(\xi)\} e^{-u_0^\xi} d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_x^l Beu_0^\xi \{-m(\xi)\} e^{-u_0^\xi} d\xi \right] \dots (39)
 \end{aligned}$$

いま

$$\gamma(\xi) = \gamma \quad (\text{一定})$$

とすれば

$$u_{x_1}^{x_2} = \gamma(x_2 - x_1)$$

この関係を (38) 式, (39) 式に応用してみると,

$$\begin{aligned}
 V_0 + V_1 &= (A + C)e^{-\gamma x} + (B + D)e^{\gamma x} \\
 &+ \int_x^l Ae^{-\gamma \xi} m(\xi) e^{-\gamma(\xi-x)} d\xi \\
 &+ \int_0^x Ae^{-\gamma \xi} m(\xi) e^{-\gamma(x-\xi)} d\xi \\
 &+ \int_0^x Be\gamma \xi \{-m(\xi)\} e^{-\gamma(x-\xi)} d\xi \\
 &+ \int_x^l Be\gamma \xi \{-m(\xi)\} e^{-\gamma(\xi-x)} d\xi \dots\dots (40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_0 + I_1 &= \frac{1}{Z_0} \left[ \left\{ A \left( 1 - \frac{S(0)}{Z_0} \right) + C \right\} e^{-\gamma x} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ B \left( 1 - \frac{S(l)}{Z_0} \right) + D \right\} e^{\gamma x} \right. \\
 &\quad \left. - \int_x^l Ae^{-\gamma \xi} m(\xi) e^{-\gamma(\xi-x)} d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^x Ae^{-\gamma \xi} m(\xi) e^{-\gamma(x-\xi)} d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^x Be\gamma \xi \{-m(\xi)\} e^{-\gamma(x-\xi)} d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_x^l Be\gamma \xi \{-m(\xi)\} e^{-\gamma(\xi-x)} d\xi \right] \dots\dots (41)
 \end{aligned}$$

(38) 式, (39) 式, または (40) 式, (41) 式を付録 (A.1) ~ (A.7) と対照させてみればあきらかなとおり, これらの解は線路上に分布した不均等点による電圧波および電

流波の反射および透過の現象を矛盾なく説明しており, 1項々々が明確な物理的意味をもつことが確認される。これらの式は不均等点における1次反射に評価をあたえるもので, いわゆる逆流の現象をあきらかにしている。

### [V] 第2近似解 (伴流の計算)

つぎに電圧および電流の第2近似解をそれぞれ  $V_0 + V_1 + V_2$ ,  $I_0 + I_1 + I_2$  とすれば,  $V_2$ ,  $I_2$  は不均等点における2次反射に対応するもので, いわゆる伴流として知られているものである。第2近似解を (7) 式, (8) 式に代入し,  $S(x)/Z_0$  に関する3次以上の項を無視すれば,  $V_2$  および  $I_2$  に関してつぎの微分方程式がえられる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_2}{dx^2} - \frac{1}{\gamma(x)} \frac{d\gamma(x)}{dx} \frac{dV_2}{dx} - \gamma^2(x) V_2 \\ = \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \frac{dV_1}{dx} \dots\dots\dots (42) \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{\gamma(x)Z(x)} \frac{dV_2}{dx} \dots\dots\dots (43)$$

境界条件は前節と同様

$$\begin{cases} x = 0 \text{ で } V_2 = Z_1 I_2 \dots\dots\dots (44) \\ x = l \text{ で } V_2 = Z_2 I_2 \dots\dots\dots (45) \end{cases}$$

(42) ~ (45) 式の型は前節の (26) ~ (29) 式とまったく同一であり, したがってこれを解く操作も前節のそれとことなるところはない。ただ, (26) 式の  $dV_0/dx$  が (42) 式では  $dV_1/dx$  に置き換っているだけのことである。

### [VI] 送端インピーダンス

つぎに問題の送端インピーダンスの第1近似値を求めてみよう。第1図の  $a$  端より見たインピーダンス  $Z_a$  は

$$Z_a = (V_0 + V_1) / (I_0 + I_1)$$

であたえられ, これに (38) 式, (39) 式の関係代入すれば,  $m_1$  を含む項は落ちて

$$\begin{aligned}
 Z_a &= Z(0) \left[ \frac{1 + m_2 e^{-2u_0^l}}{1 - m_2 e^{-2u_0^l}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(1 - m_2 e^{-2u_0^l})^2} \left\{ \int_0^l m(\xi) e^{-2u_0^\xi} d\xi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - m_2^2 e^{-4u_0^l} \int_0^l m(\xi) e^{2u_0^\xi} d\xi \right\} \right] \dots\dots (46)
 \end{aligned}$$

(46) 式は送端インピーダンスの一般式で,  $S(0)/Z_0$ ,  $S(l)/Z_0$  に関して1次の項まで正しい。

$\gamma$  が一定の場合は (46) 式は書き直されて,

$$\begin{aligned}
 Z_a &= Z(0) \left[ \frac{1 + m_2 e^{-2\gamma l}}{1 - m_2 e^{-2\gamma l}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(1 - m_2 e^{-2\gamma l})^2} \left\{ \int_0^l m(\xi) e^{-2\gamma \xi} d\xi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - m_2^2 e^{-4\gamma l} \int_0^l m(\xi) e^{2\gamma \xi} d\xi \right\} \right] \dots\dots (47)
 \end{aligned}$$

このとき端子を交換して  $b$  端より見たインピーダンスは

$$Z_b = Z(l) \left[ \frac{1+m_1 e^{-2\gamma l}}{1-m_1 e^{-2\gamma l}} + \frac{2e^{-2\gamma l}}{(1-m_1 e^{-2\gamma l})^2} \left\{ \int_0^l m(\xi) e^{2\gamma \xi} d\xi - m_1^2 \int_0^l m(\xi) e^{-2\gamma \xi} d\xi \right\} \right] \dots\dots\dots (48)$$

受端短絡の場合は、 $m_2 = -1$  とおいて

$$Z_{as} = Z(0) \left[ \frac{1-e^{-2\gamma l}}{1+e^{-2\gamma l}} + \frac{2}{(1+e^{-2\gamma l})^2} \left\{ \int_0^l m(\xi) e^{-2\gamma \xi} d\xi - e^{-4\gamma l} \int_0^l m(\xi) e^{2\gamma \xi} d\xi \right\} \right] \dots\dots\dots (49)$$

つぎに受端開放の場合は、 $m_2 = 1$  とおいて

$$Z_{af} = Z(0) \left[ \frac{1+e^{-2\gamma l}}{1-e^{-2\gamma l}} + \frac{2}{(1-e^{-2\gamma l})^2} \left\{ \int_0^l m(\xi) e^{-2\gamma \xi} d\xi - e^{-4\gamma l} \int_0^l m(\xi) e^{2\gamma \xi} d\xi \right\} \right] \dots\dots\dots (50)$$

(49) 式, (50) 式の関係より

$$\sqrt{Z_{as}/Z_{af}} = \tanh \gamma l$$

または  $\dots\dots\dots (51)$

$$\gamma = \frac{1}{l} \tanh^{-1} \sqrt{Z_{as}/Z_{af}}$$

これは均等な通信線路について既知の関係である。

つぎに  $Z_{as}$  と  $Z_{af}$  の相乗平均  $\sqrt{Z_{as} Z_{af}}$  を作ってみても、これは線路の特性インピーダンス  $Z_0$  にはならない。これは、 $Z_0$  は任意にえらびうる補助量であつて、実測値から一義的に定まる物理量ではないことから考えて当然のことである。

つぎに実際に問題となることの多い、受端インピーダンスの整合がほぼ完全に近い場合を考えよう。このとき、 $m_2 \ll 1$  と考えてこれを (47) 式に応用すれば、

$$Z_a = Z(0) \{ 1 + 2m_2 e^{-2\gamma l} + 2 \int_0^l m(\xi) e^{-2\gamma \xi} d\xi \} \dots\dots\dots (52)$$

H. Kaden<sup>(4)</sup> や L. Brillouin<sup>(5)</sup> が用いている送端インピーダンスの表示式では、(52) 式の  $Z(0)$  が平均インピーダンス  $Z_0$  に置き換つた型になつている。ただし、

$$S(0) = S(l) = 0 \dots\dots\dots (53)$$

の条件が満足される場合には、(52) 式は

$$Z_a = Z_0 + (Z_2 - Z_0) e^{-2\gamma l} + 2\gamma \int_0^l S(\xi) e^{-2\gamma \xi} d\xi \dots\dots\dots (54)$$

となつて、H. Kaden, L. Brillouin の式と全く一致す

る。しかし、(53) 式の条件に一般性がないとすれば(54) 式には  $S(0)$  または  $S(l)$  程度の誤差が含まれていることになる。しかし、この程度の誤差は致命的な誤りという程のものではなく、この後の統計学的取扱いの基礎をおびやかすほどのものでもない。H. Kaden, L. Brillouin らの文献に見られる、(54) 式の誘導過程にはどうもただきかねる点が少くないが、結果において大した誤差はないということになつている。この点は、すでに通研小林氏<sup>(1)</sup>によつて指摘されている通り、たまたま計算誤差が打消し合つて正しい結果に到達したものではないかと思われる。

### [VII] 結 言

以上、特性インピーダンスおよび伝播定数に不均等のある通信線路の伝送方程式を近似的に解く方法をあたえ、計算結果の物理的意味およびその応用例などについて種々考察を行つてきたが、その論旨はつぎのように要約することができる。

(1) 平均インピーダンスにくらべて、インピーダンス偏倚が十分に小さい事実を利用して、逐次近似によつて電圧、電流分布を計算する方法をあたえた。一般的な境界条件で解いているため、計算結果の適応の範囲は、従来の取扱いにくらべていちじるしく拡張されている。

(2) テーパーラインの研究を目的に進められてきた従来の取扱いにくらべて表示式の型が単純であるため、現象の本質を印象的に把握できる利点がある。また、不均等点における電圧波及が電流波の反射および透過の現象を矛盾なく説明することができた。

(3) 不均等線路の送端インピーダンスの近似式を求めた。従来用いられてきた計算式にはインピーダンス偏倚程度の誤差がふくまれていることがわかつたが、致命的な誤りという程のものではない。

最後に、本研究は安宅、松田両氏および小林氏の研究から直接および間接の示唆を受けることの少なかつたことを記して、深い敬意と感謝の念を捧げるものである。またたえず御指導御激励をいただいた日立電線株式会社電線工場久本課長、そのほか関係者各位に対し、衷心より御礼申し上げる。

### 参 考 文 献

- (1) 小林(夏): 通研所内資料 51 164 (Aug. 1951)
- (2) 安宅, 松田: 昭 28 電気三学会連大予稿 541 (昭 28-5)
- (3) L.R. Walker, N. Wax: J. App. Phys. 17 1043 (1946)
- (4) M. Didlaukis, H. Kaden: E.N.T. 14 13 (1937)
- (5) L. Brillouin: Ele. Com. 17 164 (1933)

付 録

(A) 第2図の  $x = 0$  において定数のことなつた2つの線路が接続され、領域Ⅰより接続点に向つて進行波が入射する。いま

$Z_{01}, Z_{02}$ : 領域Ⅰ, Ⅱの特性インピーダンス

$\gamma_1, \gamma_2$ : 領域Ⅰ, Ⅱの伝播定数

の記号を定め、

電圧入射波  $V_i = Ae^{-\gamma_1 x}$  ..... (A.1)

電流入射波  $I_i = Ae^{-\gamma_1 x} / Z_{01}$  ..... (A.2)

とすれば、領域Ⅰにおいて

電圧反射波  $V_r = mAe^{-\gamma_1 x}$  ..... (A.3)

電流反射波  $I_r = -mAe^{-\gamma_1 x} / Z_{01}$  ..... (A.4)

領域Ⅱにおいては

電圧透過波  $V_t = (1+m)Ae^{-\gamma_2 x}$  ..... (A.5)

電流透過波  $I_t = (1+m)Ae^{-\gamma_2 x} / Z_{02}$   
 $= (1-m)Ae^{-\gamma_2 x} / Z_{01}$  ..... (A.6)

となる。 $m$  は  $x = 0$  における反射係数で

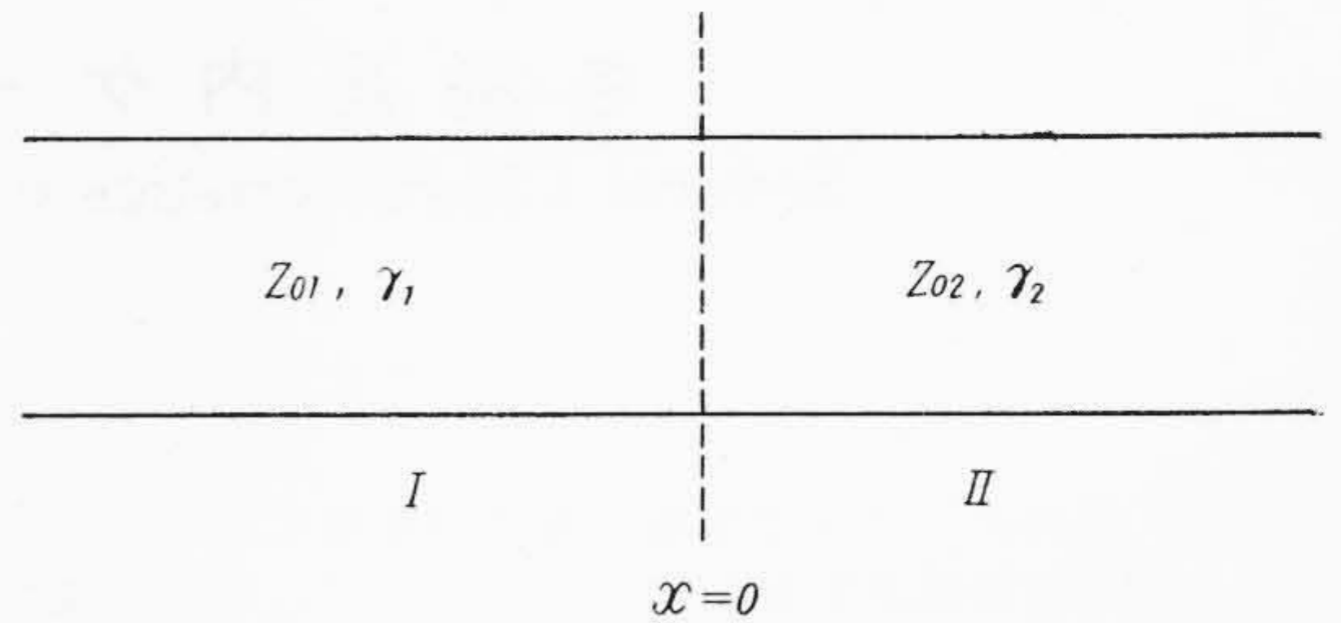
$$m = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \text{ ..... (A.7)}$$

で定義されている。領域ⅡからⅠに向つて入射のある場合は  $m$  を  $-m$  とおきかえて上記の関係を利用すればよい。

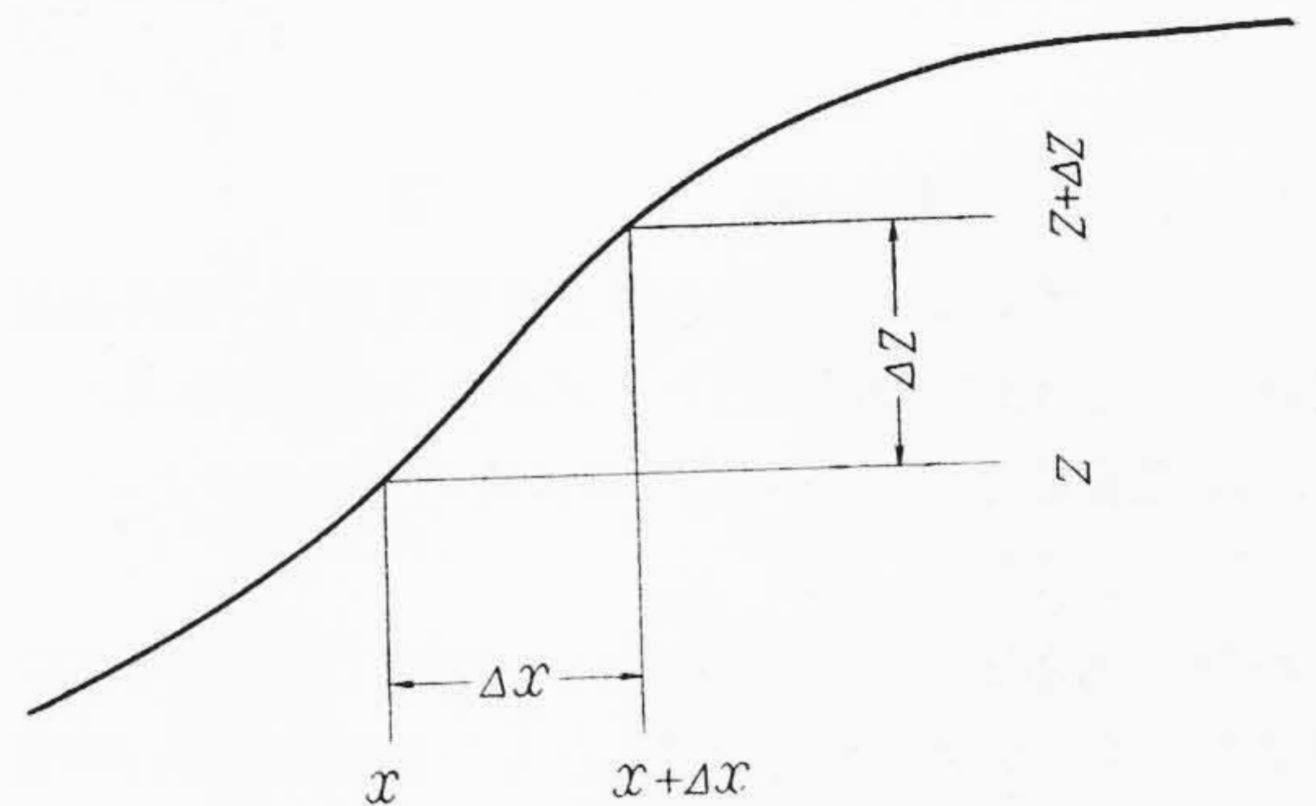
(B) 線路の特性インピーダンスに変化のある場合、第3図の  $x \rightarrow x + \Delta x$  区間よりの反射は

$$m(x) \Delta x = \frac{Z(x + \Delta x) - Z(x)}{Z(x + \Delta x) + Z(x)}$$

$$= \frac{1}{2Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \Delta x + O(\Delta x)^2 \text{ (A.8)}$$



第2図 定数の異つた線路の接続  
 Fig. 2. The Connection of Two Transmission Lines with Different Parameters



第3図 反射係数の計算  
 Fig. 3. For the Calculation of the Reflection Coefficient

$\Delta x \rightarrow 0$  とすれば

$$m(x) dx = \frac{1}{2Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} dx \text{ ..... (A.9)}$$

$m(x)$  は  $x = x$  における反射係数となる。



特 許 の 紹 介



特許第218691号

間瀬 喜 好・鶴 田 四 郎  
 高 野 憲 三・荻 野 幸 夫

絶 縁 電 線 (ホ ル マ ー ル 線)

ホルマール線とは銅線にポリビニルホルマール樹脂を主体とするワニス塗布焼付けたエナメル線に油性系エナメル線の耐磨耗性および耐溶剤性を改良したものである。

このホルマール線をさらに屈曲性、耐水性および耐油性においてもすぐれたものとするため、ポリビニルホルマールにフェノール樹脂を混ぜて使うという米国GE社の特許があつたが、このGE社「ホルメックス線」に対抗して日立電線ではポリビニルホルマールにフラン樹脂を添加したワニス(特許208817)を用いたエナメル線(特許201462)を発明し、ホルメックス線にまさる結果

をえた。

その後さらに研究の結果フェノール類(たとえばヒドロキノン)とフルフリルアルコールとの共縮合物をポリビニルホルマールに混合してなる塗料(特許212278)を銅線に塗布焼付けることにより、この種エナメル線として決定的な優秀性能(特に耐磨耗性および耐熱軟化性において)を示す本発明に到達したものである。

なおこの特許発明は発明協会地方表彰(関東地方)優秀賞を受けている。

(長山)