U.D.C. 519.283

過去の観測値による未来値の推定についての一試案

A Tentative Plan for Prediction Based on the Observed Values

高田昇平* 島田正三*
Shohei Takada Shozo Shimada

内容梗概

本報は時間の変化とともに変化する量を等間隔に測定し，これらのデータに基づいて，将来の値を推定しようとする場合の一試案を述べたものである。ここで，時間 t における測定値 x_t に対して次の仮定を設ける。

x_t は近似的に

$$x_t=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots\ldots+a_lt^l+\varepsilon_t \quad (a_0, a_1, \ldots, a_l \text{ は常数})$$

にて表わされる。ここに ε_t は測定の誤差を表わし，ε_t と $\varepsilon_{t'}$ $(t \neq t')$ とは互いに独立に分布するものとする。

まず現在より任意の時間後の特性値に対する推定値を求め，ついで欠測値のあつた場合の取扱い方を述べ，終りに，測定値が l 次多項式で近似される場合，これを誤つて $l'(<l)$ 次多項式で近似した場合のかたよりについて述べた。なお推定値を求めるための数表を与えた。

〔I〕緒言

本報は，時間の経過とともに変化する量を定期的に測定し，これらのデータに基づいて将来の特性値を推定しようとする場合についての一試案を述べたものである。

中継局，特に無人中継局において，定期的な見回りを行う一つの目的は，次回の見回り時までセットを構成する各部品が満足に働いているか否かを調べ，それまでに不良となるおそれのあるすのについては，これを新品と取替えて，事故の起るのを未然に防ぐことであろう。したがつて，現在までの特性値を基にして，何らかの方法により，次回見回り時の特性値を推定する必要がある。

また，飛行機，船舶などの過去の位置を，レーダなどにより測定し，それらのデータに基づいて現在から何秒か後の目標位置を推定するということが重要な意味をもつ場合がしばしば起る。

本報では，測定値について，次の仮定を設ける。

1. 測定は等間隔に行うものとする。

データに欠測のある場合については，後節に述べる。

2. 測定値 $x_t\,(t=0, 1, 2, \ldots\ldots)$ はつぎの構造をもつ，

$$x_t=\mu_t+\varepsilon_t \quad \ldots\ldots(1)$$

右辺の μ_t は特性値の真の値，ε_t は誤差を表わす。ここに μ_t, ε_t に対しつぎの仮定を設ける。

2・1 μ_t は近似的に $l\,(l=1, 2, \ldots\ldots)$ 次の多項式によつて近似される。すなわち，近似的に

$$\mu_t=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots\ldots+a_lt^l \quad \ldots\ldots(2)$$

と表わされるものとする。なお，現在より h 後の特性値を推定しようという場合，過去のデータばかりでなく，さらに h 後までも l 次近似がなり立つとする。

2・2 $\varepsilon_t\,(t=0, 1, 2, \ldots\ldots)$ は統計的に独立に分布し，その分散は t に関係なく一定であるとする。これを σ^2 にて表わす。なお，仮定2・1により，μ_t の真の値と仮定した l 次多項式との間のギャップも誤差の中に含まれる。

なお，(2) 式の $l=1, 2$ の場合が，実用上特に重要と思われるので，計算に必要な係数値の表を与えた。

〔II〕現在より h 後における特性値の推定

現在の測定値を x_0，前回の測定値を x_1，前々回の測定値を x_2, ... というふうに，現在よりさかのぼつて脚符をつける。推定に利用するデータの数を $k+1$ 個とする。さらに計算の便宜のため，時間の原点を現在より h 後にとり，さらに時間の方向を原点より逆にとるものとする。すると過去のデータ x_i は次式のように表わされる。

$$x_i=a_0+a_1(h+i)+a_2(h+i)^2+\ldots a_l(h+i)^l+\varepsilon_i \ \ldots(3)$$

本節では，h 後における特性値の母平均 a_0 を $x_i\ (i=0, 1, 2, \ldots\ldots, k)$ についての一次式

$$y_h=\sum_{i=0}^{k} p_ix_i \quad \ldots\ldots(4)$$

の形で推定する問題を考える。y_h が a_0 の最も精度のよい推定値であるためには，x_i の係数 p_i につぎの2つの条件を課する必要がある。

条件1：y_h の期待値が a_0 に等しいこと。

条件2：y_h の分散が最小となること。

(4) 式を (5) 式に代入すれば，

$$y_h=\sum_{i=0}^{k} p_i\{a_0+a_1(h+i)+a_2(h+i)^2+\ldots\ldots+a_l(h+i)^l+\varepsilon_i\}$$

* 日立製作所中央研究所

$$=a_0\sum_{i=0}^{k}p_i+a_1\sum_{i=0}^{k}(h+i)p_i+\cdots\cdots$$

$$+a_e\sum_{i=0}^{k}(h+i)^lp_i+\sum_{i=0}^{k}p_i\varepsilon_i \quad\cdots\cdots(5)$$

条件1から

$$\left.\begin{array}{l}\sum p_i=1\\ \sum(h+i)\,p_i=0\\ \sum(h+i)^2p_i=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum(h+i)^lp_i=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

が得られる。この式は次のように書き表わすことができる。第 $n+1$ 番目の式をとると

$$\sum_{i=0}^{k}(h+i)^np_i=\sum_{i=0}^{k}\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!\,h^{n-s}i^sp_i}\cdots(7)$$

ここで

$$\sum_{i=0}^{k}i^sp_i\equiv M_s \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

とおけば，(7) 式は

$$\sum(h+i)^np_i=\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!}h^{n-s}M_s\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となる。しかるに (6) 式の最初の式から

$$M_0=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

が得られるから，(9)，(10) 式から数学的帰納法によつて

$$M_s=(-1)^sh^s \quad (s=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,l) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

が得られる。

すなわち p_i に課した条件1は (11) 式によつて置き換えられる。

次に，条件2に移る，y_h の分散は，各測定値に含まれる誤差が確率的に独立なものとすれば

$$\sigma^2\sum_{i=0}^{k}p_i^2$$

によつて与えられる。ここに σ^2 は個々の測定値に含まれる誤差の分散を表わす。つまり，条件2は $\sum p_i^2$ を最小にすることにほかならない。結局，問題は p_i の間に (11) 式の制限を課し，その下で $\sum p_i^2$ を最小にすることである。これは Lagrange の方法を用いれば達せられる。すなわち，求める係数 p_i は

$$S\equiv\sum p_i^2-2\sum_{s=0}^{l}\lambda_s\{M_s-(-1)^sh^s\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

を $p_i(i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,k)$，$\lambda_s(s=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,l)$ について偏微分し，それを0にひとしくおけば求められる。すなわち

$$p_i=\sum_{s=0}^{l}\lambda_si^s \quad (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,k)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\sum_{i=0}^{k}i^sp_i=(-1)^sh^s \quad (s=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,l)\cdots\cdots\cdots(14)$$

なる $k+l+2$ 個の方程式を p_i，λ_s について解けばよいことになる。(13) 式を (14) 式に代入すれば

$$\sum_{i=0}^{k}i^s\sum_{r=0}^{l}\lambda_ri^r=(-1)^sh^s \quad (r=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,l)$$

ここで

$$\sum_{i=0}^{k}i^z\equiv N(z)$$

とおけば，上式は

$$\sum_{r=0}^{l}\lambda_rN(s+r)=(-h)^s(s=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,l)$$

と表わすことができる。そこで

$$\boldsymbol{N}\equiv\begin{pmatrix}N(0) & N(1) & N(2)\cdots\cdots N(l)\\ N(1) & N(2) & N(3)\cdots\cdots N(l+1)\\ N(2) & N(3) & N(4)\cdots\cdots N(l+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots\qquad\qquad\quad \vdots\\ N(l) & N(l+1) & N(l+2)\cdots N(2l)\end{pmatrix}$$

$$\lambda\equiv\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}\equiv\begin{pmatrix}(-h)^0\\ (-h)^1\\ (-h)^2\\ \vdots\\ (-h)^l\end{pmatrix}$$

なる3つのマトリックスを定義すれば，

$$\boldsymbol{N}\lambda=\boldsymbol{H} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

が成立する。しかるに $\boldsymbol{N}$ は正方マトリックスで，かつ non-singular であるから，逆マトリックス $\boldsymbol{N}^{-1}$ が存在する。よつて

$$\lambda=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

が得られる。さらに

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_0\\ p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_k\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}\equiv\begin{pmatrix}0^0 & 0^1 & 0^2 & \cdots\cdots & 0^l\\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & \cdots\cdots & 1^l\\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots\cdots & 2^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ k^0 & k^1 & k^2 & \cdots\cdots & k^l\end{pmatrix}$$

ただし $0^0\equiv1$ と約束する

を定義すれば，(13)，(16) 式から

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{I}\lambda=\boldsymbol{I}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

が得られる。これが求める係数値を与える。

例：$l=2$，$k=5$ の場合について p_i $(i=0, 1, 2, \ldots 5)$ を計算すると次のようになる。

$$N(0)=6$$
$$N(1)=0+1+2+\ldots\ldots+5=15$$
$$N(2)=0^2+1^2+2^2+\ldots+5^2=55$$
$$N(3)=0^3+1^3+2^3+\ldots+5^3=225$$
$$N(4)=0^4+1^4+2^4+\ldots+5^4=979$$

したがつて

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$$

その逆マトリックス N^{-1} は

$$\boldsymbol{N}^{-1}=\begin{pmatrix} 3220/3920 & -2310/3920 & 350/3920 \\ -2310/3920 & 2849/3920 & -525/3920 \\ 350/3920 & -525/3920 & 105/3920 \end{pmatrix}$$

また

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 1 \\ -h \\ h^2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 3220/3920 & -2310/3920 & 350/3920 \\ 1260/3920 & 14/3920 & -70/3920 \\ 0 & 1288/3920 & -280/3920 \\ -560/3920 & 1512/3920 & -280/3920 \\ -420/3920 & 686/3920 & -70/3920 \\ 420/3920 & -1190/3920 & 350/3920 \end{pmatrix} \times\begin{pmatrix} 1 \\ -h \\ h^2 \end{pmatrix}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

一般に，想定した多項式が l 次の場合には

$$p_i=\sum_{j=0}^{l} q_{ij}(-h)^j$$

なる形で表わすことができる。そこで q_{ij} を要素とする $(k+1)$ 行 l 列のマトリックス q を定義すれば y_h は

$$y_h=\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}\boldsymbol{H}\quad ただし\quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{N}^{-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

によつて与えられる。ここに $\boldsymbol{x}$ は $(k+1)$ 行１列の列ベクトルを表わす。第１表，第２表は $l=1, 2$ の場合の q_{ij} の値を表にしたものである。

つぎに，y_h の分散 $\sigma^2\sum p_i^2$ を求める。

$$\sum p_i^2=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{I}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H})'(\boldsymbol{I}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H})$$
$$=\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{N}^{-1})'\boldsymbol{I}'\boldsymbol{I}\boldsymbol{N}\boldsymbol{H}$$

しかるに，定義により，$\boldsymbol{I}'\boldsymbol{I}=\boldsymbol{N}$ が得られるから，これ

第１表　特性値の時間的変化が一次式で近似される場合の h 後の値を推定するための係数

推定値 $y_h=\sum_{i=0}^{k} p_i x_i$

$$\equiv\sum_{i=0}^{k}(q_{i0}-q_{i1}h)x_i$$

$k=1$;　分母=1

i	q_{i0}	q_{i1}
0	1	−1
1	0	1

$k=2$　分母=6

i	q_{i0}	q_{i1}
0	5	−3
1	2	0
2	−1	3

$k=3$　分母=10

i	q_{i0}	q_{i1}
0	7	−3
1	4	−1
2	1	1
3	−2	3

$k=4$;　分母=10

i	q_{i0}	q_{i1}
0	6	−2
1	4	−1
2	2	0
3	0	1
4	−2	2

$k=5$　分母=105

i	q_{i0}	q_{i1}
0	55	−15
1	40	−9
2	25	−3
3	10	3
4	−5	9
5	−20	15

$k=6$;　分母=28

i	q_{i0}	q_{i1}
0	13	−3
1	10	−2
2	7	−1
3	4	0
4	1	1
5	−2	2
6	−5	3

$k=7$　分母=84

i	q_{i0}	q_{i1}
0	35	−7
1	28	−5
2	21	−3
3	14	−1
4	7	1
5	0	3
6	−7	5
7	−14	7

$k=8$;　分母=180

i	q_{i0}	q_{i1}
0	68	−12
1	56	−9
2	44	−6
3	32	−3
4	20	0
5	8	3
6	−4	6
7	−16	9
8	−28	12

$k=9$;　分母=165

i	q_{i0}	q_{i1}
0	57	−9
1	48	−7
2	39	−5
3	30	−3
4	**21**	**−1**
5	**12**	**1**
6	**3**	**3**
7	**−6**	**5**
8	**−15**	**7**
9	**−24**	**9**

$k=10$;　分母=110

i	q_{i0}	q_{i1}
0	35	−5
1	30	−4
2	25	−3
3	20	−2
4	15	−1
5	10	0
6	5	1
7	0	2
8	−5	3
9	−10	4
10	−15	5

$k=11$;　分母=858

i	q_{i0}	q_{i1}
0	253	−33
1	220	−27
2	187	−21
3	154	−15
4	121	−9
5	88	−3
6	55	3
7	22	9
8	−11	15
9	−44	21
10	−77	27
11	−110	33

$k=12$;　分母=182

i	q_{i0}	q_{i1}
0	50	−6
1	44	−5
2	38	−4
3	32	−3
4	26	−2
5	20	−1
6	14	0
7	8	1
8	2	2
9	−4	3
10	−10	4
11	−16	5
12	−22	6

$k=13$;　分母=455

i	q_{i0}	q_{i1}
0	117	−13
1	104	−11
2	91	−9
3	78	−7
4	65	−5
5	52	−3
6	39	−1
7	26	1
8	13	3
9	0	5
10	−13	7
11	−26	9
12	−39	11
13	−52	13

$k=14$;　分母=840

i	q_{i0}	q_{i1}
0	203	−21
1	182	−18
2	161	−15
3	140	−12
4	119	−9
5	98	−6
6	77	−3
7	56	0
8	35	3
9	14	6

i	q_{i0}	q_{i1}
10	−7	9
11	−28	12
12	−49	15
13	−70	18
14	−91	21

$k=15$；　分母＝680

i	q_{i0}	q_{i1}
0	155	−15
1	140	−13
2	125	−11
3	110	−9
4	95	−7
5	80	−5
6	65	−3
7	50	−1
8	35	1
9	20	3
10	5	5
11	−10	7
12	−25	9
13	−40	11
14	−55	13
15	−70	15

$k=16$；　分母＝408

i	q_{i0}	q_{i1}
0	88	−8
1	80	−7
2	72	−6
3	64	−5
4	56	−4
5	48	−3
6	40	−2
7	32	−1
8	24	0
9	16	1
10	8	2
11	0	3
12	−8	4
13	−16	5
14	−24	6
15	−32	7
16	−40	8

$k=17$；　分母＝2907

i	q_{i0}	q_{i1}
0	595	−51
1	544	−45
2	493	−39
3	442	−33
4	391	−27
5	340	−21
6	289	−15
7	238	−9
8	187	−3
9	136	3
10	85	9
11	34	15
12	−17	21
13	−68	27
14	−119	33
15	−170	39
16	−221	45
17	−272	51

$k=18$；　分母＝570

i	q_{i0}	q_{i1}
0	111	−9
1	102	−8
2	93	−7
3	84	−6
4	75	−5
5	66	−4
6	57	−3
7	48	−2
8	39	−1
9	30	0
10	21	1
11	12	2
12	3	3
13	−6	4
14	−15	5
15	−24	6
16	−33	7
17	−42	8
18	−51	9

$k=19$；　分母＝1330

i	q_{i0}	q_{i1}
0	247	−19
1	228	−17
2	209	−15
3	190	−13
4	171	−11
5	152	−9
6	133	−7
7	114	−5
8	95	−3
9	76	−1
10	57	1
11	38	3
12	19	5
13	0	7
14	−19	9
15	−38	11
16	−57	13
17	−76	15
18	−95	17
19	−114	19

$k=20$；　分母＝2310

i	q_{i0}	q_{i1}
0	410	−30
1	380	−27
2	350	−24
3	320	−21
4	290	−18
5	260	−15
6	230	−12
7	200	−9
8	170	−6
9	140	−3
10	110	0
11	80	3
12	50	6
13	20	9
14	−10	12
15	−40	15
11	−70	18
17	−100	21
18	−130	24
19	−160	27
20	−190	30

を上式に代入すれば

$$\sum p_i^2 = \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{N}^{-1})\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

したがつて，推定量 y_h の分散は

$$(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{H})\sigma^2$$

に等しい。前の例について求めれば，

$$\frac{1}{3920}\{3922+2\times2310h+(2\times350+2849)h^2+2\times525h^3+105h^4\}\sigma^2$$

$$=\frac{1}{3920}(3922+4620h+3549h^2+1050h^3+105h^4)\sigma^2$$

第2表　特性値の時間的変化が二次式で近似される場合の h 後の値を推定するための係数

推定値　$y_h=\sum_{i=0}^{k} p_i x_i$

$$\equiv \sum_{i=0}^{k}(q_{i0}-q_{i1}h+q_{i2}h^2)x_i$$

$k=2$　分母＝4

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	4	−6	2
1	0	8	−4
2	0	−2	2

$k=3$　分母＝80

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	76	−84	20
1	12	52	−20
2	−12	68	−20
3	4	−36	20

$k=4$　分母＝700

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	620	−540	100
1	180	130	−50
2	−60	400	−100
3	−100	270	−50
4	60	−260	100

$k=5$　分母＝3920

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	3220	−2310	350
1	1260	14	−70
2	0	1288	−280
3	−560	1512	−280
4	−420	686	−70
5	420	−1190	350

$k=6$　分母＝16464

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	12544	−7644	980
1	5880	−1176	0
2	1176	2940	−588
3	−1568	4704	−784
4	−2352	4116	−588
5	−1176	1176	0
6	1960	−4116	980

$k=7$　分母＝56448

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	39984	−21168	2352
1	21168	−5712	336
2	7056	5040	−1008
3	−2352	11088	−1680
4	−7056	12432	−1680
5	−7056	9072	−1008
6	−2352	1008	336
7	7056	−11760	2352

$k=8$　分母＝1,66320

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	1,09872	−51408	5040
1	63504	−18396	1260
2	27216	5976	−1440
3	1008	21708	−3060
4	−15120	28800	−3600
5	−21168	27252	−3060
6	−17136	17064	−1440
7	−3024	−1764	1260
8	21168	−29232	5040

$k=9$　分母＝4,35600

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	2,69280	−1,12860	9900
1	1,66320	−48180	3300
2	83160	1650	−1650
3	19800	36630	−4950
4	−23760	56760	−6600
5	−47520	62040	−6600
6	−51480	52470	−4950
7	−35640	28050	−1650
8	0	−11220	3300
9	55440	−65340	9900

$k=10$ 分母=10,38180

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	6,02580	−2,28690	18150
1	3,92040	−1,10352	7260
2	2,17800	−16214	−1210
3	79860	53724	−7260
4	−21780	99462	−10890
5	−87120	1,21000	−12100
6	−1,16160	1,18338	−10890
7	−1,08900	91476	−7260
8	−65340	40414	−1210
9	14520	−34848	7260
10	1,30680	−1,34310	18150

$k=11$ 分母=22,90288

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	12,52108	−4,34148	31460
1	8,49420	−2,29372	14300
2	5,09652	−62348	572
3	2,32804	66924	−9724
4	18876	1,58444	−16588
5	−1,32132	2,12212	−20020
6	−2,20220	2,28228	−20020
7	−2,45388	2,06492	−16588
8	−2,07636	1,47004	−9724
9	−1,06964	49764	572
10	56628	−85228	14300
11	2,83140	−2,57972	31460

$k=12$ 分母=47,36732

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	24,46444	−7,80780	52052
1	17,17716	−4,42442	26032
2	10,93092	−1,60888	4732
3	5,72572	63882	−11830
4	1,56156	2,31868	−23660
5	−1,56156	3,43070	−30758
6	−3,64364	3,97488	−33124
7	−4,68468	3,95122	−30758
8	−4,68468	3,35972	−23660
9	−3,64364	2,20038	−11830
10	−1,56156	47320	4732
11	1,56156	−1,82182	26026
12	5,72572	−4,68468	52052

$k=13$ 分母=92,74720

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	45,37988	−13,41522	82810
1	32,79276	−8,03894	44590
2	21,86184	−3,49076	12740
3	12,58712	22932	−12740
4	4,96860	3,12130	−31850
5	−99372	5,18518	−44590
6	−5,29984	6,42096	−50960
7	−7,94976	6,82864	−50960
8	−8,94348	6,40822	−44590
9	−8,28100	5,15970	−31850
10	−5,96232	3,08308	−12740
11	−1,98744	17836	12740
12	3,64364	−3,55446	44590
13	10,93092	−8,11538	82810

$k=14$ 分母=173,26400

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	80,51680	−22,16760	1,27400
1	59,62320	−13,90480	72800
2	41,27760	−6,81800	26600
3	25,48000	−90720	−11200
4	12,23040	3,82760	−40600
5	1,52880	7,38640	−61600
6	−6,62480	9,76920	−74200
7	−12,23040	10,97600	−78400
8	−15,28800	11,00680	−74200
9	−15,79760	9,86160	−61600
10	−13,75920	7,54040	−40600
11	−9,17280	4,04320	−11200
12	−2,03840	−63000	26600
13	7,64400	−6,47920	72800
14	19,87440	−13,50440	1,27400

$k=15$ 分母=310,73280

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	137,46880	−35,41440	1,90400
1	103,95840	−23,07658	1,14240
2	74,25600	−12,37056	48960
3	48,36160	−3,29664	−5440
4	26,27520	4,14528	−48960
5	7,99680	9,95520	−81600
6	−6,47360	14,13312	−1,03360
7	−17,13600	16,67904	−1,14240
8	−23,99040	17,59296	−1,14240
9	−27,03680	16,87488	−1,03360
10	−26,27520	14,52480	−81600
11	−21,70560	10,54272	−48960
12	−13,32800	4,92864	−5440
13	−1,14240	−2,31744	48960
14	14,85120	−11,19	1,14240
15	34,65280	−21,70560	1,90400

$k=16$ 分母=537,67872

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	226,94592	−54,93312	2,77440
1	174,78720	−36,96888	1,73400
2	128,17728	−21,22416	83232
3	87,11616	−7,69896	6936
4	51,60384	3,60672	−55488
5	21,64032	12,69288	−1,04040
6	−2,77440	19,55952	−1,38720
7	−21,64032	24,20664	−1,59528
8	−34,95744	26,63424	−1,66464
9	−42,72576	26,84232	−1,59528
10	−44,94528	24,83088	−1,38720
11	−41,61600	20,59992	−1,04040
12	−32,73792	14,14944	−55488
13	−18,31104	5,47944	6936
14	1,66464	−5,41008	83232
15	27,18912	−18,51912	1,73400
16	58,26240	−33,84768	2,77440

$k=17$ 分母=901,40256

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	363,72384	−83,02392	3,95352
1	284,65344	−57,44232	2,55816
2	213,49008	−34,82586	1,33722
3	150,23376	−15,17454	29070
4	94,88448	1,51164	−58140
5	47,44224	15,23268	−1,27908
6	7,90704	25,98858	−1,80234
7	−23,72112	33,77934	−2,15118
8	−47,44224	38,60496	−2,32560
9	−63,25632	40,46544	−2,32560
10	−71,16336	39,36078	−2,15118
11	−71,16336	35,29098	−1,80234
12	−63,25632	28,25604	−1,27908
13	−47,44224	18,25596	−58140
14	−23,72112	5,29074	29070
15	7,90704	−10,63962	1,33733
16	47,44224	−29,53512	2,55816
17	94,88448	−51,39576	3,99352

$k=18$ 分母=1469,19780

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	567,79524	−122,61726	5,52330
1	450,70128	−86,89992	3,68220
2	344,65392	−55,08138	2,05770
3	249,65316	−27,16164	64980
4	165,69900	−3,14070	−54150
5	92,79144	16,98144	−1,51620
6	30,93048	33,20478	−2,27430
7	−19,88388	45,52932	−2,81580
8	−59,65164	53,95506	−3,14070
9	−88,37280	58,48200	−3,24900
10	−106,04736	59,11014	−3,14070
11	−112,67532	55,83948	−2,81580
12	−108,25668	48,67002	−2,27430
13	−92,79144	37,60176	−1,51620
14	−66,27960	22,63470	−54150
15	−28,72116	3,76884	64980
16	19,88388	−18,99582	2,05770
17	79,53552	−45,65928	3,68220
18	150,23376	−76,22154	5,52330

$k=19$ 分母=2334,94800

i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	865,75020	−177,39540	7,58100
1	695,93580	−128,39820	5,18700
2	541,28340	−84,45500	3,05900
3	401,79300	−45,56580	1,19700
4	277,46460	−11,73060	−39900
5	168,29820	17,05060	−1,72900
6	74,29380	40,77780	−2,79300
7	−4,54860	59,45100	−3,59100
8	−68,22900	73,07020	−4,12300
9	−116,74740	81,63540	−4,38900
10	−150,10380	85,14660	−4,38900
11	−168,29820	83,60380	−4,12300
12	−171,33060	77,00700	−3,59100
13	−159,20100	65,35620	−2,79300
14	−131,90940	48,65140	−1,72900
15	−89,45580	26,89260	−39900
16	−31,84020	−7980	1,19700
17	40,93740	−31,78700	3,05900
18	128,87700	−68,70780	5,18700
19	231,97860	−110,68260	7,58100

$k=20$	分母=3627,36220		
i	q_{i0}	q_{i1}	q_{i2}
0	1292,41420	− 251,92860	10,24100
1	1050,72660	− 185,77174	7,16870
2	829,52100	− 126,08288	4,41980
3	628,79740	− 72,86202	1,99430
4	448,55580	− 26,10916	− 10780
5	288,79620	14,17570	− 1,88650
6	149,51860	47,99256	− 3,34180
7	30,72300	75,34142	− 4,47370
8	− 67,59060	96,22228	− 5,28220
9	− 145,42220	110,63514	− 5,76730
10	− 202,77180	118,58000	− 5,92900
11	− 239,63940	120,05686	− 5,76730
12	− 256,02500	115,06572	− 5,28220
13	− 251,92860	103,60658	− 4,47370
14	− 227,35020	85,67944	− 3,34180
15	− 182,28980	61,28430	− 1,88650
16	− 116,74740	30,42116	− 10780
17	− 30,72300	− 6,90998	1,99430
18	75,78340	− 50,70912	4,41980
19	202,77180	− 100,97626	7,16870
20	350,24220	− 157,71140	10,24100

第1図は $k=1$, 5, 10；$l=1$ の場合の推定量の標準偏差を示したものである。$k=1$ つまり，2個の測定値から係数 a_0, a_1 を推定して，h 後の推定を行うことがいかに精度の悪いものであるかがわかる。

また(19)式を使つて，特性値がある特定の値 y_c に達するまでの時間を求めることもできる。それには，左辺の y_h を y_c におきかえた式を h について解けば得られる。右辺は h についての l 次式となることに注意されたい。たとえば $l=2$ の場合には，次の一元二次方程式を解けばよい

$$(\sum q_{i3}x_i)h^2-(\sum q_{i2}x_i)h+\sum p_{i1}x_i-y_c=0 \quad \text{......(21)}$$

なお，本節に述べた次期見回りの場合の特性値の推定は本節の $h=1$ とおいた特別の場合である。

〔III〕 σ の 推 定

前節までは，分散 σ^2 の値を一応既知として述べた。本節では，その推定法について述べることとする。

μ_t として一次式，二次式などを用いた場合の σ^2 の推定法については，すでに最尤法によるオーソドックスな方法が見出されている。しかし，この計算法は相当やつかいであり，現場で実用に用いるにはきわめて非実用的である。そこで，われわれはむしろ次の推定法を提案する。たとえば一次式の場合 σ (σ^2 ではない) の推定量 $\hat{\sigma}$ として

$$\hat{\sigma}=0.51\sum_{i=0}^{k-2}|2x_{i+1}-x_i-x_{i+2}|/(k-1) \quad \text{............(22)}$$

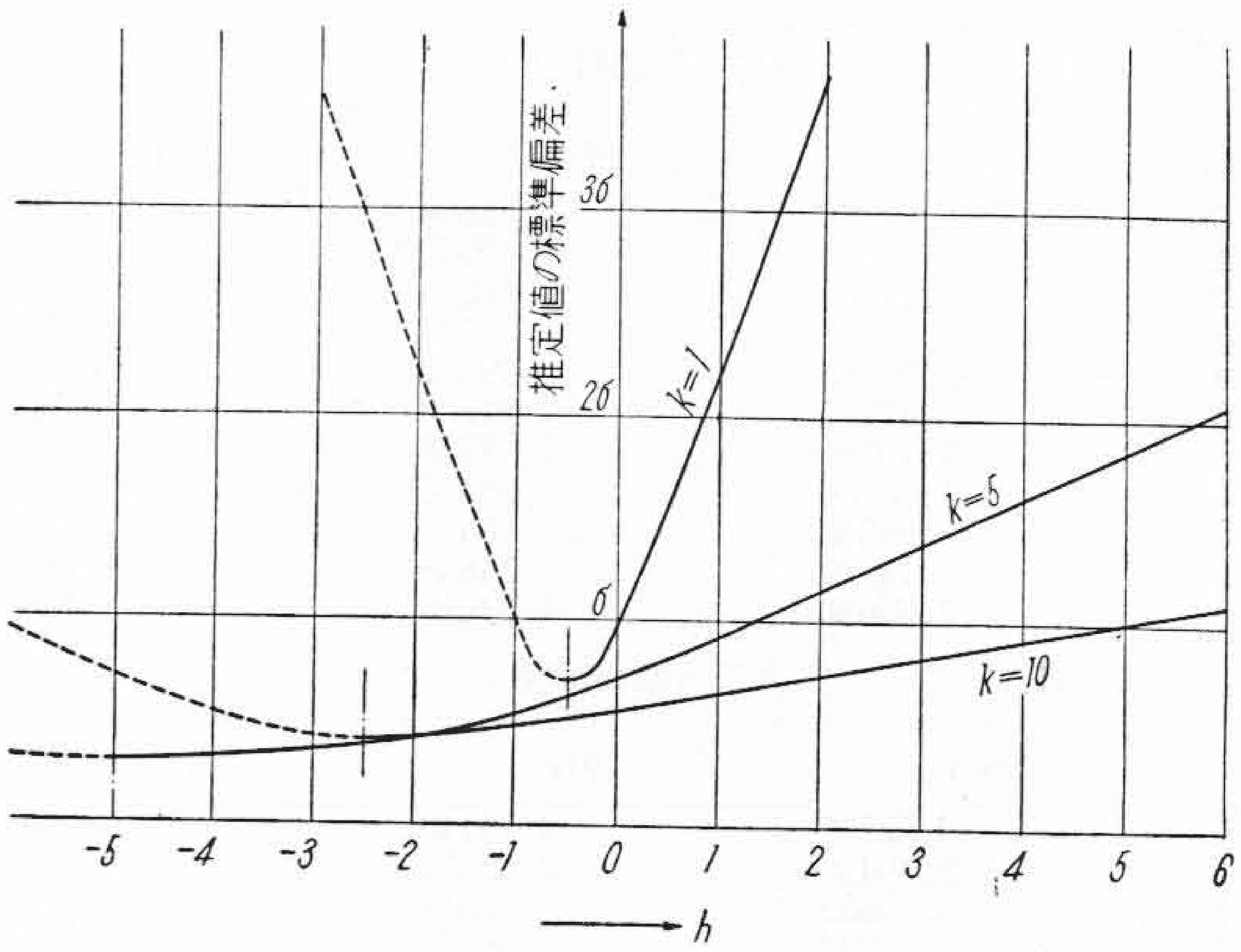
また二次式の場合

$$\hat{\sigma}=0.28\sum_{i=0}^{k-3}|3x_{i+1}-3x_{i+2}+x_{i+3}-x_i|/(k-2) \quad \text{...(23)}$$

一般に l 次式の場合には

$$\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=0}^{k-l}|\Delta^l_i|}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\binom{2l}{l}}\times(k-l+1)}$$

ただし



第1図　$k=l$, 5, 10 | $l=1$ の場合の推定量

$$\Delta^l{}_i\equiv\sum_{s=0}^{l}(-1)^s\binom{k}{s}x_{i+s} \quad \text{..............................(24)}$$

を用いた方が，計算が簡単であり，より実際的であると思われる。かかる推定量の分散は，次のようになる

l	$\hat{\sigma}$ の分散
1	1.26
2	1.43
3	1.58

〔IV〕 欠測値のある場合

2節の式の誘導は，等間隔の測定値がすべて存在するという前提の下に行つた。しかし，実際には種々の事情により，その内何個かのデータが得られない場合も起るであろう。本節ではこのような場合に対する処理法について述べる。

たとえば，x_0, x_1, x_2, ..., x_k の内 x_s ($s\leqq k$) が求められなかつたとする。この場合にも2節の考え方にしたがつて，h 後の推定値

$$y_h=\sum_{i=0}^{s-1}p_ix_i+\sum_{j=s+1}^{k}p_jx_j$$

の係数 p_i ($i=0$, 1, 2, ..., $s-1$, $s+1$, ..., k) の値を求めることはできる（この p_i は**第1表**，**第2表**の数値とは異る）。しかし，このようにして求めた係数値は k を一定としても，s によつて変つた値となるため，これを表にして与えることは非常に困難である。そこで，本節では，欠測値 x_s をほかのデータから推定し，その推定値を，あたかも実測値であるかのように見なして，**第1,2表**の p_i を用いて計算する方法を採用することとした。

(1) 欠測値1個の場合

x_0, x_1, x_2, ..., x_k の内 x_s ($s\leqq k$) 1個だけが欠測の場合，これを推定するには，前節までに述べた推定方式において $h=-s$ とする。つまり

$$\hat{x}_s=\sum_{i=0}^{k}p_i(-s)x_i \quad \text{....................................(25)}$$

を x_s の推定値として採用するのである。左辺の "^" 印は，これが推定値であることを明らかにするためにつけた。さて，上式の右辺の計算には，やはり x_s が必要である。そこで，その代りにやはり $\hat{x}_s$ を使うものとすれば，上式は

$$\hat{x}_s=\left\{\sum_{i=0}^{k}{}'_s p_i(-s)x_i\right\}\Big/\left\{1-p_s(-s)\right\} \qquad \text{(26)}$$

となる。上式の $\sum_{i=0}^{k}{}'_s$ は，$i=s$ を除いた和を表わすものと約束する。この $\hat{x}_s$ を x_s の代用にして，h 後の推定に使えばよい。

（2） 欠測値が2個ないしそれ以上の場合

欠測値が2個 x_{s1}, x_{s2} の場合について述べる（$s_1<s_2\leqq k$）。これを一般の場合に拡張することは容易である。

x_{s1}, x_{s2} の内，まず x_{s2} は実測されたものと見なして $\hat{x}_{s1}$ だけを (26) 式によつて計算する。この分子の中には x_{s2} が入つている。ついで同様に x_{s1} は実測されたものと見なして $\hat{x}_{s2}$ を求める。これも x_{s1} の函数である。これをまとめる、

$$\left.\begin{aligned}\{1-p_{s1}(-s_1)\}\hat{x}_{s1}-p_{s2}(-s_1)\hat{x}_{s2}&=\sum_{i=0}^{k}{}''_{s1s2}p_i(-s_1)x_i\\ -p_{s1}(-s_2)\hat{x}_{s1}+\{1-p_{s2}(-s_2)\}\hat{x}_{s2}&=\sum_{i=0}^{k}{}''_{s1,\,s2}p_i(-s_2)x_i\end{aligned}\right\} \qquad \text{(27)}$$

なる連立方程式が得られる。これを解いて $\hat{x}_{s1}$, $\hat{x}_{s2}$ が求められる。ここに $\sum_{i=0}^{k}{}''_{s1,\,s2}$ は $i=s_1$, s_2 を除いた $k-2$ 個の和を表わす。

〔V〕 二次推定を行うべき時に，誤つて一次推定を行つた場合のかたよりについて

ある特性値についての過去のデータ x_0, x_1, x_2, ……, x_k の時間的変化が，l 次の多項式をもつて近似しうる場合，現在より h 後の特性値を推定する方式は2節に述べた。この場合推定の精度は，l が小さいほどよい。しかし実際には，l 次で近似されるものを誤つて $l'(<l)$ 次を想定して推定を行つたとすれば，その推定値の中にはかたよりが混る。しかし，もしこのかたよりが小さければ，次数をへらして精度を確保するという方式を採ることも考えられる。

本節は，このかたよりについて述べ，さらに最も利用度の多いと思われる $l=2$, $l'=1$ の場合についての検討を加えたものである。

一般に，x_0, x_1, x_2, …, x_t, …の母平均 μ_t が

$$\mu_t=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_lt^l \qquad \text{(28)}$$

で表わされる場合，これを誤つて

$$\mu_t=a_0+a_1t+a_2t_2+\ldots+a_{l'}t^{l'}\ (l'<l) \qquad \text{(29)}$$

と見なして h 後の特性値を推定したとすれば，(17)式により

$$y_h=(\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{N}_1^{-1}\boldsymbol{H}_1)'\boldsymbol{x} \qquad \text{(30)}$$

ここに

$$\boldsymbol{I}_1\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 0^2\cdots\cdots 0^{l'}\\ 1 & 1 & 1^2\cdots\cdots 1^{l'}\\ 1 & 2 & 2^2\cdots\cdots 2^{l'}\\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots\\ 1 & k & k^2\cdots\cdots k^{e'}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_1\equiv\begin{pmatrix}N(0) & N(1)\cdots\cdots N(l')\\ N(1) & N(2)\cdots\cdots N(l'+1)\\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ N(l') & N(l'+1)\cdots\cdots N(2l')\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_1\equiv\begin{pmatrix}(-h)^0\\ (-h)^1\\ (-h)^2\\ \vdots\\ (-h)^{l'}\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}\equiv\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}$$

しかるに，測定値の期待値は

$$E(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{IA}$$

ここに

$$\boldsymbol{I}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 0^2 & 0^l\\ 1 & 1 & 1^2 & 1^l\\ 1 & 2 & 2^2 & 2^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & k & k^2 & k^l\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_l\end{pmatrix}$$

したがつて，推定値 y_h の期待値は

$$E(y_h)=(\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{N}_1^{-1}\boldsymbol{H}_1)'\boldsymbol{IA} \qquad \text{(31)}$$

さて，ここで $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$ を分解して

$$\boldsymbol{I}\equiv(\boldsymbol{I}_1:\boldsymbol{I}_2),\quad \boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

とする。すなわち，

$$\boldsymbol{I}_2\equiv\begin{pmatrix}0^{l'+1} & 0^{l'+2} & 0^l\\ 1^{l'+1} & 1^{l'+2} & 1^l\\ 2^{l'+1} & 2^{l'+2} & 2^l\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ k^{l'+1} & k^{l'+2} & k^l\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\equiv\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{l'}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2\equiv\begin{pmatrix}a_{l'+1}\\ a_{l'+2}\\ \vdots\\ a_l\end{pmatrix}$$

すると，(31) 式より，

$$E(y_h)=\boldsymbol{H}_1{}'\boldsymbol{N}_1{}^{-1}\boldsymbol{I}_1{}'(\boldsymbol{I}_1:\boldsymbol{I}_2)\binom{\boldsymbol{A}_1}{\boldsymbol{A}_2}$$

$$=\boldsymbol{H}_1{}'(\boldsymbol{U}:\boldsymbol{N}_1{}^{-1}\boldsymbol{I}_1{}'\boldsymbol{I}_2)\binom{\boldsymbol{A}_1}{\boldsymbol{A}_2}$$

ここに $\boldsymbol{U}$ は，$l'\times l'$ の単位行例を表わす。

$$E(y_h)=\boldsymbol{H}_1{}'\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{H}_1{}'\boldsymbol{N}_1{}^{-1}\boldsymbol{I}_1{}'\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A}_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

一方，h 後の特性値の期待値は

$$\boldsymbol{HA}=\boldsymbol{H}_1{}'\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{H}_2{}'\boldsymbol{A}_2$$

にひとしい。ここに

$$\boldsymbol{H}_2\equiv\begin{pmatrix}(-h)^{l'+1}\\(-h)^{l'+2}\\\vdots\\(-h)^{l}\end{pmatrix}$$

したがつて，かたよりは

$$\boldsymbol{H}_2{}'\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{H}_1{}'\boldsymbol{N}_1{}^{-1}\boldsymbol{I}_1{}'\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{A}_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

によつて与えられる。

例として，$l=2,\ l'=1$ の場合をとり上げてみる。かたよりは

$$h^2a_2-\frac{(1,\ -h)}{N(0)N(2)-\{N(1)\}^2}\begin{pmatrix}N(2) & -N(1)\\-N(1) & N(0)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}111\ldots1\\012\ldots k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0^2\\1^2\\2^2\\\vdots\\k^2\end{pmatrix}a_2$$

$$=\left[h^2-\frac{N^2(2)-N(1)N(3)+\{N(1)N(2)-N(0)N(3)\}h}{N(0)N(2)-N^2(1)}\right]a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

しかるに

$N(0)=k+1$

$N(1)=k(k+1)/2$

$N(2)=k(k+1)(2k+1)/6$

$N(3)=k^2(k+1)^2/4$

$N(4)=k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)/30$

を (34) 式に仕入すれば

$$\text{かたより}=\left\{h^2+kh+\frac{k(k-1)}{6}\right\}a_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

さて，a_2 が十分小さくて，(35) 式の値が無視できる程度であれば，二次推定を行うよりも，一次推定を実施して推定の精度を確保した方が賢明であろう。それなら，a_2 がどのくらいまでは二次推定よりも一次推定の方がよいと考えられるであろうか。一方が推定量のバラツキであり，他方がかたよりであるため，両者を比較することは，厳密には，本質的な無理がある。しかし，次のような方法も一つの妥協策として合理性をもつているのではないかと思われる。つまり，二次推定によつて得た信頼区間の中に一次推定の一次推定の信頼区間が含まれる場合には，一次推定の方が良いと考えるゆき方である。

データの数が3および5の場合について，このところを検討してみると次のようになる。$h=1$ とすればかたよりはそれぞれ

$10a_2/3,\quad 7a_2$

となる。一方，推定量の分散は次表のようになる。そこで

データの数	一　次　推　定	二　次　推　定
3	$2.333\sigma^2(2\times2.9938\sigma)$	$19\sigma^2(2\times8.5433\sigma)$
5	$1.1\sigma^2\ (2\times2.0556\sigma)$	$4.6\sigma^2(2\times4.2036\sigma)$

信頼区間の信頼度を 0.95 にとれば，信頼区間の幅は上表のカッコ内の数値となる。たとえば，一次推定でデータの数が3個の場合は，

$$2\times(2.333\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\times1.9600=2.9938\sigma$$

二次推定の信頼区間の中に一次推定の信頼区間が含まれるためには，データの数が3の場合には

$$8.5433\sigma-2.9938\sigma\geqq10a_2/3$$

つまり $a_2/\sigma\leqq1.66$ の場合には，一次推定の方が好ましいということになる。同様にデータの数が5の場合には

$$a_2/\sigma\leqq0.307$$

なら一次推定の方が好ましい。

〔VI〕 結　　　言

本報では，母平均の時間的変化が l 次の多項式で近似できると仮定した。この仮定は，たとえば真空管の相互コンダクタンスを特性値として選んだような場合には，h 後までその多項式近似がなり立つと見ることができる。しかし，船舶などの目標をレーダで捕え，その航跡を推定するというような場合には，捕えられたことを目標が察知すると，意識的に舵をとることが考えられ，必ずしも多項式近似が長い時間にわたつて (つまり k を大として) なり立つとは限らないと思われる。したがつて，推定の精度を犠牲にしても k を小さくして，多項式近似がその範囲内でなり立つような考慮が必要であろう。

参　考　文　献

(1)　高田，島田：真空管特性の向後の値についての推定　昭和29年電気三学会連合大会予稿 No. 499