

自動制御系の図式による安定判別法

A Method of Judging the Degree of Stability Using Diagrams of the Automatic Control System

沼倉 俊 郎*
Toshio Numakura

内 容 梗 概

自動制御系の設計において、使用される機器の定数、たとえば時定数や利得を変える場合がある。その際、系が安定になるか不安定になるか、応答が早くなるかおそくなるかを判別するに、従来の自動制御理論を用いて解析するには非常な手間がかかる。

筆者は機器の定数（パラメータ）を座標軸とする平面上に安定臨界曲線をかいて、一目にして系の特性を判別する方法を考案、実際例に応用した。

1. 緒 言

自動制御系の解析には幾多の方法があるが、これらを用いて特性方程式中の数個の係数が、同一の可変定数（パラメータ）を含み変化する場合の解析を行うことは面倒である。一般に自動制御系においては可変定数は1個とは限らず、数個におよぶものもあり、これらが変化するとき、系の特性方程式のほとんどすべての係数が変わる。可変定数が1個の場合には Bode 線図または Nyquist の定理により、安定判別を容易に行うことができるが、可変定数が2個の場合には、これらの方法を用いて安定判別を図示することが困難なことがある。

著者の提案する図式安定判別法では、その表示が簡単にでき、各可変定数を変えた際の応答速度、安定性などその系特有の性質を直視的に読みとることが可能である。本図式による安定判別は、特殊な系に対しては Hermite の定理を用いて、きわめて簡単にかつ完全に行うことができるが、一般には簡単でない。しかし実用的には安定判別法として、従来の経験を基にするか、アナログ計算機を使うか、数点につき Hurwitz の定理を適用するかして、大ざつぱに安定判別を行うだけで十分である。

2. 安定臨界曲線の作図

線型の自動制御系において、その伝達関数の分母すなわち特性方程式は n 階の微分方程式

$$f(p) = \xi_n + \xi_{n-1}p + \xi_{n-2}p^2 + \dots + \xi_1 p^{n-1} + \xi_0 p^n \quad (1)$$

で表わされる。ここで制御系のある要素の利得または時定数が変化すると、一般に係数 $\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_1, \xi_0$ の1個ないし数個が同時に変化する性質をもっている。この制御系に階段状入力に加えられたとき、角周波数 ω で振動を持続するためには $f(i\omega) = 0$ を満足しなければな

らない。 $\omega = \sqrt{\gamma} > 0$ とおけば

$$f(i\omega) = \xi_n + i\omega\xi_{n-1} - \omega^2\xi_{n-2} - i\omega^3\xi_{n-3} + \omega^4\xi_{n-4} - \dots \\ = (\xi_n - \gamma\xi_{n-2} + \gamma^2\xi_{n-4} - \dots) \\ + i\sqrt{\gamma}(\xi_{n-1} - \gamma\xi_{n-3} + \gamma^2\xi_{n-5} - \dots) = 0$$

となり、実部と虚部は独立に零とならねばならぬから

$$\left. \begin{aligned} u(\gamma) &= \xi_n - \gamma\xi_{n-2} + \gamma^2\xi_{n-4} - \dots = 0 \\ v(\gamma) &= \xi_{n-1} - \gamma\xi_{n-3} + \gamma^2\xi_{n-5} - \dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

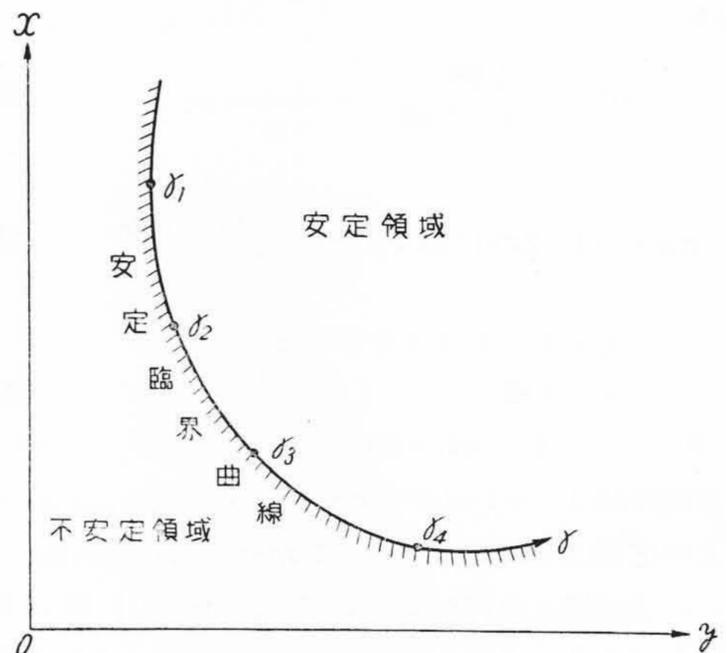
を得る。ここで一般に

$$\xi_j = \xi_j(x, y) \dots \dots \dots (3)$$

すなわち2個の可変定数を含むとすれば、(2)式を連立することにより

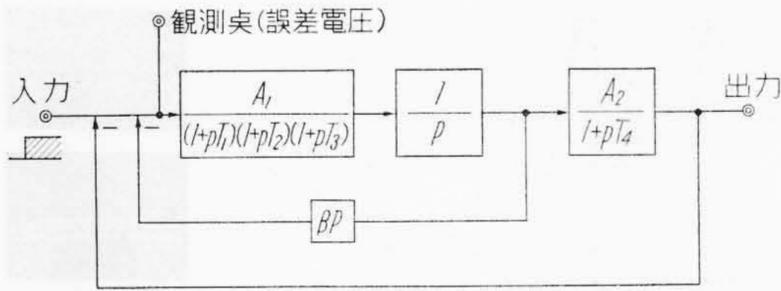
$$\left. \begin{aligned} x &= g(\gamma) \\ y &= h(\gamma) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

を得る。(4)式より x を横軸、 y を縦軸とし、 γ をパラメータとして第1図のような曲線が描かれる。これが安定臨界曲線である。この曲線の一方は安定領域で、反対側が不安定領域であるが、この判別は緒言で述べたように、従来の経験を基にするか、アナログ計算機を使うか数点につき Hurwitz の定理を適用するかして、大ざつ



第1図 安定判別図

* 日立製作所中央研究所



第2図 速度饋還を有する1型自動制御系のブロック線図

ばに行えばよい。

安定領域中の x, y を用いれば系の応答は安定で収斂するが、不安定領域中の x, y を用いれば、系の応答は不安定で発散する。また安定領域上の x, y を用いれば系のステップ応答は、その点の γ により定まる周波数 $f (= \sqrt{\gamma}/2\pi)$ で連続振動を行う。

一方安定領域中の x, y を使った場合、その点が安定臨界曲線に近いほど応答は振動的で、その振動周波数はその点に最も近い安定臨界曲線上の γ により、ほぼ決定される。逆に安定臨界曲線から離れば離れるほど、系の応答は非振動的あるいは過制動となる。

3. 速度饋還を有する1型制御系の例題

第2図は速度饋還（微分饋還）を有する1型制御系のブロック線図である。速度饋還 βp は系を安定化させるために用いてある。すなわちこの βp がなければ一般にこの系は不安定であるが、適当に β を変えて安定化させるのである。

この自動制御系の特性方程式は

$$f(p) = \{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3) + A_1\beta\} p(1+pT_4) + A_1A_2 \dots (5)$$

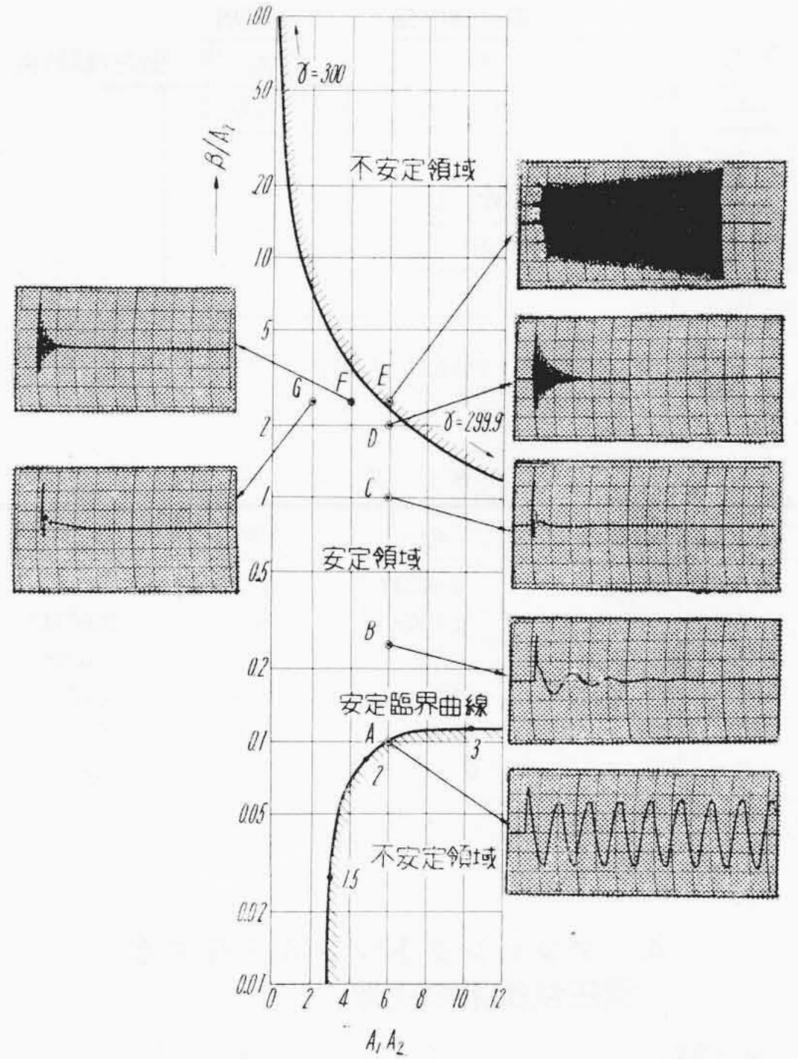
で与えられる。連続振動の条件として $p = i\omega = i\sqrt{\gamma}$ を代入し右辺を零とおけば、その実部と虚部とがそれぞれ独立に零とならねばならないから

$$\left. \begin{aligned} T_4 \Pi T_i \gamma^2 - (T_4 \Sigma T_i + \Sigma T_i T_j) \gamma + (1 + A_1 \beta) &= 0 \\ (T_4 \Sigma T_i T_j + \Pi T_i) \gamma^2 - \{\Sigma T_i + T_4(1 + A_1 \beta)\} \gamma & \\ + A_1 A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

を得る。(6)式を連立すれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 A_2 &= \{\Sigma T_i + (T_4^2 \Sigma T_i - \Pi T_i) \gamma - T_4^2 \Pi T_i \gamma^2\} \gamma \\ \beta / A_2 &= \frac{(\Sigma T_i T_j + T_4 \Sigma T_i) \gamma - T_4 \Pi T_i \gamma^2 - 1}{\{\Sigma T_i + (T_4^2 \Sigma T_i - \Pi T_i) \gamma - T_4^2 \Pi T_i \gamma^2\} \gamma} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

を得る。ここで T_1, T_2, T_3, T_4 を一定と考えれば、(7)式の右辺は γ のみの関数となるゆえ、 γ を与えることによりその周波数 ($f = \sqrt{\gamma}/2\pi$) で系を連続振動させるべき $A_1 A_2, \beta / A_2$ が求まる。



第3図 1型制御系の安定判別図と計算機による解の対比

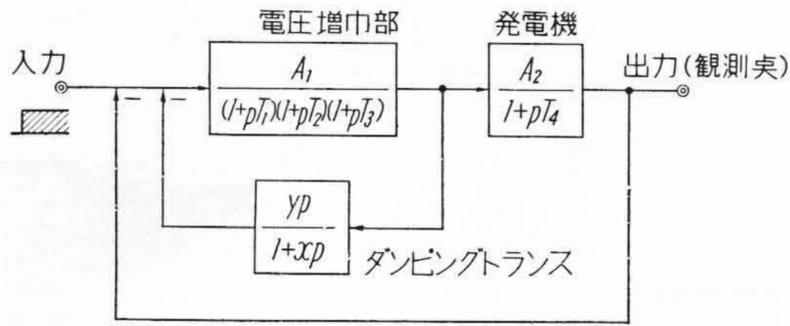
$T_1 = 0.05 \text{ s}, T_2 = 0.15 \text{ s}, T_3 = 0.3 \text{ s}, T_4 = 1.5 \text{ s}$ とすれば

$$A_1 A_2 = (0.45 + 1.011 \gamma - 0.003375 \gamma^2) \gamma$$

$$\beta / A_2 = \frac{0.725 \gamma - 0.00225 \gamma^2 - 1}{(0.45 + 1.011 \gamma - 0.003375 \gamma^2) \gamma}$$

となる。これにより γ をパラメータとして第3図の安定臨界曲線が描かれる。この曲線の斜線を施していない側が安定領域で、斜線を施した側が不安定領域である。図中のオシログラムは各点の $A_1 A_2, \beta / A_2$ における誤差電圧のステップ応答である。

A点は下方の不安定領域中にあるので、その応答は発散する。低速度型アナログ計算機の演算結果からは、その周波数は0.25 cpsであり（オシログラムの波数から算出）、また安定判別図で $\gamma = 2$ とすれば $f = \sqrt{2}/2\pi = 0.225 \text{ cps}$ を得る。A点より β を増加し $B \rightarrow C \rightarrow D$ 点と移れば、下方の安定臨界曲線から離れるから、低周波の振動は次第に減衰する。しかし逆に上方の安定臨界曲線 ($\gamma \doteq 300$) に近づくため高周波の振動が生じてくる。E点は上方の不安定領域中にあるため、高周波の発散振動が明瞭に観察される。E点のオシログラムから $f = 2.9 \text{ cps}$ が得られ、また安定判別図からは $f = \sqrt{300}/2\pi = 2.76 \text{ cps}$ が得られる。次に $E \rightarrow G$ と移ればふたたび安定臨界曲線から離れるゆえ、高周波の振動は減少していく。



第4図 自動電圧制御系 (その1)

第1表 (8) 式の係数

j	ξ_j	a_j	b_j	c_j
0	ξ_0	0.00342	0	0
1	ξ_1	0.0918	0	0.00342
2	ξ_2	0.75	0	0.0918
3	ξ_3	2.11	46.9	0.75
4	ξ_4	83.8	27.6	2.11
5	ξ_5	0	0	83.8

4. ダンピングトランスを有する電圧制御系の例題

第4図に示したように3個の一次遅れを経て、ダンピングトランスにより負饋還される Minor-loop の次に一次遅れの制御対象を有する自動電圧制御系につき考察する。特性方程式は

$$f(p) = (1+pT_4) \{ (1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3) + A_1 y p \} + A_1 A_2 (1+xp) \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。ただし x はダンピングトランスの時定数であり、 y はその利得でともに可変である。 p の冪に展開することにより

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \sum T_i \cdot x \\ \xi_1 &= \sum T_i T_j T_k \cdot x + \sum T_i \\ \xi_2 &= \sum T_i T_j \cdot x + \sum T_i T_j T_k \\ \xi_3 &= \sum T_i \cdot x + A_1 T_4 y + \sum T_i T_j \\ \xi_4 &= (1+A_1 A_2)x + A_1 y + \sum T_i \\ \xi_5 &= (1+A_1 A_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。 $T_1=0.07$ s, $T_2=0.16$ s, $T_3=0.18$ s, $T_4=1.7$ s, $A_1=27.6$, $A_2=3$ とすれば第1表を得る。ただし

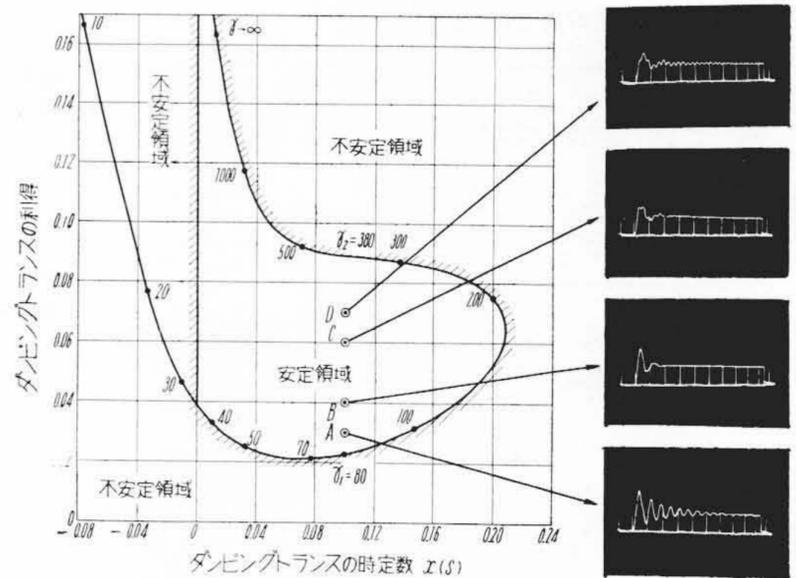
$$\xi_j = a_j x + b_j y + c_j \quad (j=0, 1, \dots, 5) \dots (10)$$

とおいた。(8)式に $p = j\sqrt{\gamma}$ を代入し右辺を零とおくことにより

$$x = \frac{-46.9\gamma(2.11 - 0.0918\gamma) - 27.6(83.8 - 0.75\gamma + 0.00342\gamma^2)}{\gamma\{-27.6(2.11 - 0.0918\gamma) + 46.9(83.8 - 0.75\gamma + 0.00342\gamma^2)\}}$$

$$y = \frac{(83.8 - 0.75\gamma + 0.00342\gamma^2)^2 + \gamma(2.11 - 0.0918\gamma)^2}{\gamma\{-27.6(2.11 - 0.0918\gamma) + 46.9(83.8 - 0.75\gamma + 0.00342\gamma^2)\}}$$

となり、これより第5図の安定臨界曲線がかかれる。



第5図 自動電圧制御系 (その1) の安定判別図と計算機による解の対比

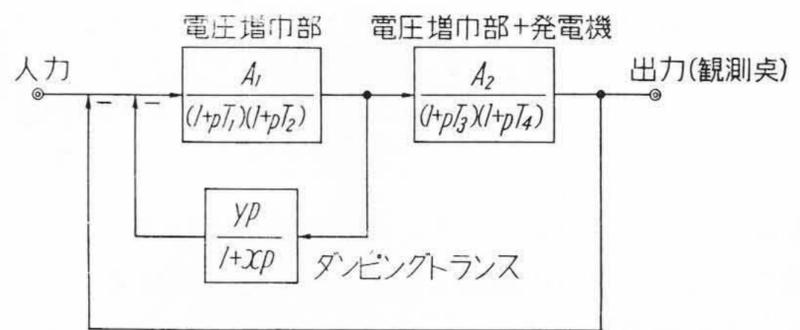
第2表 計算と実験値との比較

安定臨界曲線より求めた f (cps)	計算機による f (cps)
1.4 ($\gamma_1 = 80$)	1.5
3.1 ($\gamma_2 = 380$)	2.9

第5図から、ダンピングトランスの時定数 x が 0.2 s より大きければ、その利得 y をいかに変えようとも系は安定化されない。すなわち x の上限が存在する。また $x = 0 \sim 0.2$ s の間では、系を安定化させるために y の上限と下限が存在することがわかる。 $x = 0.1$ s に固定し y を増加していったときのくり返し型アナログ計算機による演算結果を第5図中に示す。A, B 两点では γ_1 の振動周波数の影響をうけ、C, D 两点では γ_2 の振動周波数の影響をうける。この計算値 ($f = \sqrt{\gamma}/2\pi$) と計算機による実験値 (写真の波数を数える) の比較を第2表に示す。なお写真からわかるように、安定臨界曲線に近い点では減衰率が小さく、安定臨界曲線から離れると減衰率が大きくなることわかる。

次にダンピングトランスの取出し点を変えた第6図のブロック線図を考える。この系の特性方程式は

$$f(p) = \{ (1+pT_1)(1+pT_2)(1+xp) + A_1 y p \} (1+pT_3)(1+pT_4) + A_1 A_2 (1+xp) \dots\dots\dots (11)$$



第6図 自動電圧制御系 (その2)

第3表 (11) 式の係数

j	ξ_j	a_j	b_j	c_j
0	ξ_0	0.00342	0	0
1	ξ_1	0.0918	0	0.00342
2	ξ_2	0.75	7.04	0.0918
3	ξ_3	2.11	43.2	0.75
4	ξ_4	83.8	23	2.11
5	ξ_5	0	0	83.8

で与えられる。 $T_1 \sim T_4$ は前題と同一で、 $A_1=23$, $A_2=3.6$ とおけば第3表を得る。

(11)式より得られる実部と虚部の方程式を連立して

$$x = \frac{-43.2\gamma(2.11-0.0918\gamma) - (23-7.04\gamma)}{\gamma\{(2.11-0.0918\gamma)(23-7.04\gamma) + 43.2\}} \cdot \frac{(83.8-0.75\gamma+0.00342\gamma^2)}{(83.8-0.75\gamma+0.00342\gamma^2)}$$

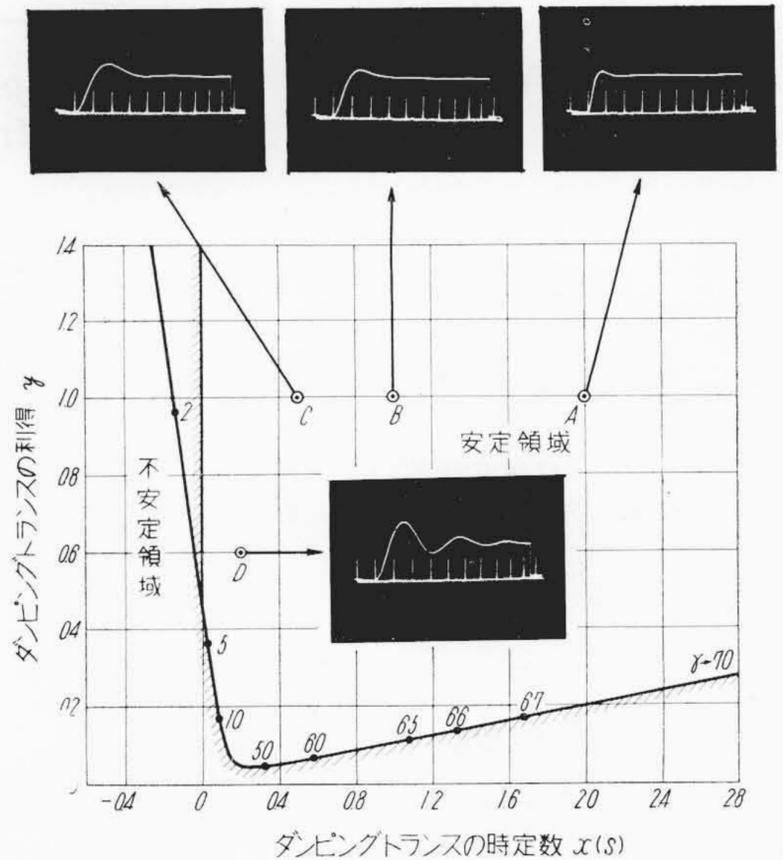
$$y = \frac{(83.8-0.75\gamma+0.00342\gamma^2)^2 + \gamma(2.11-0.0918\gamma)^2}{\gamma\{(2.11-0.0918\gamma)(23-7.04\gamma) + 43.2\} (83.8-0.75\gamma+0.00342\gamma^2)}$$

を得る。これにより第7図がかかれる。この場合も安定領域は第1象限にしか存在しない。ダンピングトランスの利得 y に対し下限のみ存在し、上限の存在しないことがわかる。すなわちダンピングトランスの時定数 x がいかなる値であろうとも、その利得 y を増加すれば必ず安定領域に入る。また時定数 x を大にすればするほど安定臨界曲線上の γ の値は大きくなるから、応答速度は早くなる。しかし $x \rightarrow \infty$ でも γ の値は70 (周波数に換算して1.33 cps) 近傍をこえないゆえ、ある値以上 x を増加しても無意味である。第7図中の写真よりわかるように、C点 ($x=0.5$ s, $y=1$) では安定臨界曲線の $\gamma=2 \sim 3$ 近傍の影響を受け応答が悪いが、A点 ($x=2$ s, $y=1$) では曲線の $\gamma=60 \sim 70$ に近いから応答が非常に改善されている。なおD点 ($x=0.2$ s, $y=0.6$) では低周波の安定臨界曲線 ($\gamma=2 \sim 3$) に非常に近いから、かなり振動的となる。

5. 結 言

特性方程式の各係数中に共通の可変定数が含まれる際これら可変定数2個を座標軸とする安定判別法につき論じた。かくてでき上った安定判別図はその系に特有のものであり、可変定数を変えた場合、安定方向に向うか、あるいは不安定領域に向うか、またその応答周波数の変化を、総括的に直視的に読みとることができることを、アナログ計算機の結果を対比させて説明した。

一度ある系についてその安定判別図がかかれてあれば同種の系についてもその安定臨界曲線の形状がほとんど変わらないゆえ、アナログ計算機などで最適条件を見出す



第7図 自動電圧制御系 (その2) の安定判別図と計算機による解の対比

べく可変定数を変化させた時非常な手助けとなり、またいかなる安定領域も見落すことがない。

本報告ではふれなかつたが、特性方程式を $\omega = \sqrt{\gamma}$ に関して、実部と虚部の二つの方程式に分けたとき、それぞれの方程式の係数に含まれる可変定数を座標軸とした平面上に、安定臨界曲線を作図しうる系においては、Hermite の定理を用いてきわめて簡単にかつ厳密に安定判別ができる。この際の安定判別法は Hurwitz の定理と等価であるゆえ、本安定判別法は Hurwitz の定理の図式表現と考えられる。

また本安定判別法は飽和、バックラッシュなどの非線型要素を含んだ非線型制御系に対しても適用され、非線型要素の可変定数を座標軸にとつて、系の安定判別を行うことができる。

最後に本研究に対し御便宜、御鞭撻をいただいた日立製作所中央研究所只野文哉部長、日立工場泉千吉郎副部長、日立研究所今尾隆部長、小林栄二主任研究員、中央研究所三浦武雄研究員をはじめ日立製作所自動制御研究会関係の方々に厚く御礼申し上げ、また計算機の実験に際し御援助いただいた中央研究所衣川武研究員、永田穰研究員に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- (1) 沼倉, 三浦: 電学誌 76, 256 (昭 31)
- (2) 沼倉, 三浦: 電学誌 77, 1 (昭 32)
- (3) 沼倉: 自動制御 4, 275 (昭 32)