

# 指数分布の順序統計量とその応用について<sup>(1)</sup>

## On the Order Statistics Volume of Exponential Distribution and Its Applications

島 田 正 三\*  
Shozo Shimada

### 内 容 梗 概

本報は変数  $x$  の確率密度が  $\{\exp(-x/L)\}/L$ , for  $x \geq 0$ ; 0, for  $x < 0$  なる指数分布にしたがう場合についての統計的問題を論じたものである。

第1章では大きさ  $N$  の標本を大きさの順にならべたいいわゆる順序統計量  $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(N)}$  の諸性質および統計的取り扱い方について述べた。まず最初  $x_{(i)}$  のモーメントおよび  $x_{(i)}$  と  $x_{(j)}$  ( $i \neq j$ ) との共分散を求め、ついで①  $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$  ( $n \leq N$ ) きりわかつていない場合および②ある値  $X$  に対して,  $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)} < X < x_{(n+1)}$  なる最小の  $n$  個のデータきりわかつていない場合について, 母数  $L$  の推定法, 検定法について論じた。

第2章では, 応用として上述の二つの場合についての  $L$  に関する抜取検査法, 管理図の書き方について述べ, 続いて, 真空管の寿命値の取扱い方について論じた。この場合①は一定個数  $n$  本の真空管が不良となったとき, 試験を中止する方法, ②は試験時間があらかじめ定めた  $X$  hr となったら, そこで試験を中止する方法に対応している。ここでは, まず実用試験および実験室内における寿命のデータをあげ, 前者がほとんど指数分布によって近似されることを述べ, ついで従来米軍規格 JAN-105 A に規定されている寿命の受入検査法 (いわゆる Average Life Percentage を用いたもの) についての性質を検討した。

### 緒 言

いくつかの測定値を大きさの順にならべたものを順序統計量といい, 特殊な目的に対してはきわめて有効な働きをなす。

本報では寿命の問題をとりあげている。これは順序統計量の応用として典型的なものであろう。たとえば真空管の寿命を調べる目的で 50 本の球を同時に寿命試験にかけたとすると, 中には早く寿命のくるものもあるが, 全部が不良となるまで試験を続けるとすると, その時間は平均寿命値の 10 倍乃至それ以上かかることもまれではない。これでは実用的に見たらお話にならないので, 50 本のうち 10 本くらいが不良となったところで試験を中止しなければならぬことが一般である。つまり 50 個のデータのうち, 値の小さな 10 個程度のデータ (順序統計量) から種々の推定なり検定なりを行う必要に迫られる。本報は, 寿命の分布がいわゆる指数分布にしたがう場合について, 種々の統計的処理法の理論ならびに応用について述べる。

### 第1章 基 礎

#### 1. 指数分布にしたがう母集団から抽出した順序統計量のモーメント

##### 指数分布

(1) 本報は筆者の学位請求論文「順序統計量の応用」の前半第1, 第2章の抄録である (原論文は全4章からなっている)。

\* 日立製作所中央研究所 工博

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{1}{L} e^{-x/L} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\} \cdots \cdots \cdots (1)$$

にしたがう母集団から大きさ  $N$  の標本を抽出し, その標本値を

$$x_{(1)} < x_{(2)} < x_{(3)} < \cdots < x_{(N)} \cdots \cdots \cdots (2)$$

とする。原点のまわりの  $x_{(i)}$  の  $\nu$  次モーメントおよび  $x_{(i)}$  と  $x_{(j)}$  ( $i < j$ ) との積の期待値を求めると, 次式のごとくなる (簡単のために  $L=1$  とおいた)。

$$E(x_{(i)}^\nu) = \frac{N! \nu!}{(i-1)!(N-i)!} \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s \binom{i-1}{s} \times \frac{1}{(N-i+1+s)^{\nu+1}} \cdots \cdots (3)$$

$$E(x_{(i)} x_{(j)}) = \frac{N!}{(i-1)!(j-i-1)!(N-j)!} \times \left\{ \left( \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^s \binom{j-i-1}{s} \frac{1}{N-j+1+s} \right) \times \left( \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{2}{(N-i+1+r)^3} \right) + \left( \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^s \binom{j-i-1}{s} \frac{1}{(N-j+1+s)^2} \right) \times \left( \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{(N-i+1+r)^2} \right) \right\} \cdots \cdots (4)$$

ついで, 上式の計算に必要な

$$I_p(a, b) \equiv \sum_{s=0}^a (-1)^s \binom{a}{s} \frac{1}{(b+s)^p} \cdots \cdots (5)$$

(ここに  $a$  は 0 または正の整数,  $b$  は正整数を表わす) を求めると次式のごとくなる<sup>(1)</sup>。



$$\begin{aligned}
I_1(a, b) &= \frac{a!(b-1)!}{(a+b)!} \\
I_2(a, b) &= I_1(a, b) S_1^* \\
I_3(a, b) &= I_1(a, b) \frac{1}{2!} (S_2 + S_1^2) \\
I_4(a, b) &= I_1(a, b) \frac{1}{3!} (2S_3 + 3S_2S_1 + S_1^3) \\
I_5(a, b) &= I_1(a, b) \frac{1}{4!} (6S_4 + 3S_2^2 + 8S_3S_1 \\
&\quad + 6S_2S_1^2 + S_1^4) \\
I_6(a, b) &= I_1(a, b) \frac{1}{5!} (24S_5 + 30S_4S_1 \\
&\quad + 20S_3S_2 + 20S_3S_1^2 + 15S_2^2S_1 + 10S_2S_1^3 + S_1^5) \\
I_7(a, b) &= I_1(a, b) \frac{1}{6!} (120S_6 + 144S_5S_1 \\
&\quad + 90S_4S_2 + 90S_4S_1^2 + 40S_3^2 + 120S_3S_2S_1 \\
&\quad + 40S_3S_1^3 + 15S_2^3 + 45S_2^2S_1^2 + 15S_2S_1^4 \\
&\quad + S_1^6)
\end{aligned}$$

.....(6)

ここに

$$\begin{aligned}
S_q \equiv S_q(b, a+b) &\equiv \frac{1}{b^q} + \frac{1}{(1+b)^q} + \frac{1}{(2+b)^q} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{(a+b)^q}
\end{aligned}$$

この式を使って  $x_{(i)}$  のモーメントを求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
E(x_{(i)}) &= S_1(N-i+1, N) \\
\mu(2; N, i) &= S_2(N-i+1, N) \\
\mu(3; N, i) &= 2S_3(N-i+1, N) \\
\mu(4; N, i) &= 6S_4(N-i+1, N) \\
&\quad + 3S_2^2(N-i+1, N) \\
\mu(5; N, i) &= 24S_5(N-i+1, N) \\
&\quad + 20S_3(N-i+1, N)S_2(N-i+1, N) \\
\mu(6; N, i) &= 120S_6(N-i+1, N) \\
&\quad + 90S_4(N-i+1, N)S_2(N-i+1, N) \\
&\quad + 40S_3^2(N-i+1, N) \\
&\quad + 15S_2^3(N-i+1, N)
\end{aligned}$$

.....(7)

$\mu(\nu; N, i)$  は  $x_{(i)}$  の母平均のまわりの  $\nu$  次モーメントを表わす。また  $x_{(i)}$  と  $x_{(j)}$  ( $i < j$ ) との共分散は  $x_{(i)}$  の分散に等しい。

$$\text{cov}(x_{(i)}, x_{(j)}) = S_2(N-i+1, N) \dots\dots\dots(8)$$

これはおもしろい結果と思われる。

## 2. 指数分布にしたがう変量の母平均 $L$ の推定

本節では大きさ  $N$  の標本の特性値のうちで利用できるものが

(A) 最も小さい  $n(< N)$  個のデータに限られる場合

(B) ある値  $X$  (既知) よりも小さな値きり求められていない場合  
について述べる。

工業方面への応用としては寿命試験があげられる。真空管, ball-bearing そのほかの製品の寿命分布は指数分布で近似されることが知られている。寿命試験の場合には (A) は  $N$  個の試料について同時に寿命試験を開始し, そのうち  $n$  個が不良となったとき試験を中止する方式に対応する。(B) は試験時間  $X$  をあらかじめ定めておいて,  $X$  hr となったら試験を中止し, それまでのデータから推定を行う方式に対応する。

### 2.1 (A) 方式の場合の母数 $L$ の推定

大きさ  $N$  の標本の順序統計量  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  の同時確率密度函数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
p(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}) &= \frac{N!}{(N-n)!} \\
&\quad \times \frac{1}{L^n} e^{-\frac{1}{L} \left\{ \sum_{i=1}^n x_{(i)} + (N-n)x_{(n)} \right\}} \dots\dots\dots(9)
\end{aligned}$$

ここで, 統計量

$$y = \sum_{i=1}^n x_{(i)} + (N-n)x_{(n)} \dots\dots\dots(10)$$

を定義し, さらに  $2y/L$  の  $mgf$   $\phi(\theta)$  を求めると

$$\phi(\theta) \equiv E\left(e^{\frac{2y\theta}{L}}\right) = (1-2\theta)^{-n} \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。つまり  $2y/L$  が自由度  $2n$  の  $\chi^2$ -分布にしたがうことを知る。そこで,  $L$  の推定量として

$$\hat{L} = y/n \dots\dots\dots(12)$$

( $2n\hat{L}/L$  が自由度  $2n$  の  $\chi^2$ -分布に従う)

をとることとすれば,  $\hat{L}$  が不偏かつ充足推定量となること, さらに, 有効推定量であることも証明することができる。

また, 変量の確率密度が

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} e^{-\frac{1}{L}(x-A)/L} & \text{for } x \geq A \\ 0 & \text{for } x < A \end{cases} \dots\dots\dots(13)
\end{aligned}$$

の場合の  $A, L$  および  $A+L$  ( $x$  の期待値) の有効推定量を求めると, つぎのごとくなる。  $A, L, A+L$  の推定量をそれぞれ  $u_A, u_L, u_{A+L}$  にて表わす。

$$u_A = \frac{n}{n-1} x_{(1)} - \frac{1}{N(n-1)} \{x_{(1)} + x_{(2)} + \dots\}$$

脚注 \*  $I_p(a, b)$  の右辺に用いた  $S_1, S_2, \dots, S_6$  は正しくは  $S_1(b, a+b), S_2(b, a+b), \dots$  と書くべきところであるが簡単のため  $(b, a+b)$  を省略した。



$$\begin{aligned} & \cdots + x_{(n-1)} + (N-n+1)x_{(n)} \} \\ \text{var}(u_A) &= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{L^2}{N^2} \\ u_L &= -\frac{N}{n-1}x_{(1)} + \frac{1}{n-1}\{x_{(1)} + x_{(2)} \\ & \quad + \cdots + x_{(n-1)} + (N-n+1)x_{(n)}\} \\ \text{var}(u_L) &= \frac{1}{n-1}L^2 \\ u_{A+L} &= -\frac{N-n}{n-1}x_{(1)} + \frac{N-1}{(n-1)N}\{x_{(1)} + x_{(2)} \\ & \quad + \cdots + x_{(n-1)} + (N-n+1)x_{(n)}\} \\ \text{var}(u_{A+L}) &= \left\{1 + \frac{(N-1)^2}{n-1}\right\} \cdot \frac{L^2}{N^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

信頼区間:  $2n\hat{L}/L$  が自由度  $2n$  の  $\chi^2$ -分布に従うことを使えば,  $L$  の信頼区間を求めることは容易である。すなわち, 信頼度  $1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$  の信頼区間は次式によって与えられる。

$$\left\{ \frac{2y}{\chi_{\varepsilon_2}^2(2n)}, \frac{2y}{\chi_{1-\varepsilon_1}^2(2n)} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに  $\chi_{\varepsilon}^2(f)$  は自由度  $f$  の  $\varepsilon$ -点を示す。

$N, n$  の選定  $\hat{L}$  の精度は  $n$  によってきまり,  $N$  には無関係である。したがって  $n$  は  $\hat{L}$  の精度を所望の値に保つ必要からきまってくる。一方  $N$  は試験に要する時間に関係する。試験時間の平均値は  $E(x_{(n)})$  に等しい。これは前節に  $Ex_{(n)}$  として与えてある。このような平均値でなく, 試験を遅くとも何時間以内に終らせたいという場合も多い。そこで

$$Pr\{x_{(n)} > x_0\} = \alpha \quad \dots\dots\dots (16)$$

によって定まる  $x_0$  の値を求めると次のごとくなる。

$$x_0 = -\log \frac{f_2}{f_2 + f_1 F_{f_2 f_1}(\alpha)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに  $f_1 = 2n, f_2 = 2(N-n+1), F_{f_2 f_1}(\alpha)$  は自由度  $f_1, f_2$  の  $F$ -分布の  $\alpha$ -点を表わす。

許容限界: ここでは「ロットから取り出した  $N$  個の試料のうち, その寿命値が  $k\hat{L}$  に満たないユニットの数はたかだか  $r$  個にすぎない」ということがある信頼度  $1-\alpha$  をもっていえるためには  $k$  の値をいくらに選んだらよいかという問題を取り上げる。 $N, n, r, \alpha$  の間には次の関係式が成立する。

$$1-\alpha = \sum_{s=0}^r \binom{N}{s} \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} \left\{ \frac{n}{n+k(N-s+i)} \right\}^n \quad \dots\dots\dots (18)$$

種々の  $N, n, r$  の組合せに対する  $k$  の値については文献(6)を参照されたい。

この応用としては, たとえば真空管を用いた装置をもって何日かの間補給のきかぬ土地に作業に行くような場

合, 何個スベアを準備していったらよいかなどがこれにあたる。

## 2.2 (B) 方式の場合の $L$ の推定

(B) 方式の場合には統計量

$$Z \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (N-n)X \quad \dots\dots\dots (19)$$

に基いて推定を行う。ここに  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は  $X$  時間までに不良となった真空管の寿命値を表わす。まず  $Z$  の分布函数を求める。簡単のために, 時間の単位を平均寿命  $L$  に等しくとった場合の寿命値を  $x'$ ,  $Z$  の値を  $Z'$  にて表わす。また  $X$  を  $h$  にて表わす

$$x' \equiv x/L, Z' \equiv Z/L, h \equiv X/L \quad \dots\dots\dots (20)$$

さらに  $x'$  の代りに, 次の変数  $t'$  を定義する

$$\begin{aligned} t' &= x' & \text{for } x' < h \\ t' &= h & \text{for } x' \geq h \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

すると,  $Z'$  は

$$Z' = \sum_{i=1}^N t_i' \quad \dots\dots\dots (19')$$

と表わされ,  $t_i'$  と  $t_j' (i \neq j)$  とは独立である。

$t'$  の  $mgf$   $\phi_{t'}(\theta)$  は

$$\phi_{t'}(\theta) = \frac{1}{1-\theta} - \frac{\theta}{1-\theta} e^{-(1-\theta)h} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$Z'$  の  $mgf$  は  $\{\phi_{t'}(\theta)\}^N$  で与えられるから, これから逆に  $Z'$  の累積分布函数を求めると次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} F(Z') &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^k \frac{N!}{(N-k)! i! (k-i)!} (-1)^{k-i} G(Z'; k, i) \\ &+ e^{-hN} \varepsilon(Z' - Nh) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに  $Z' \equiv Z/L, h = X/L$

$$\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{for } \xi < 0 \\ 1 & \text{for } \xi \geq 0 \end{cases}$$

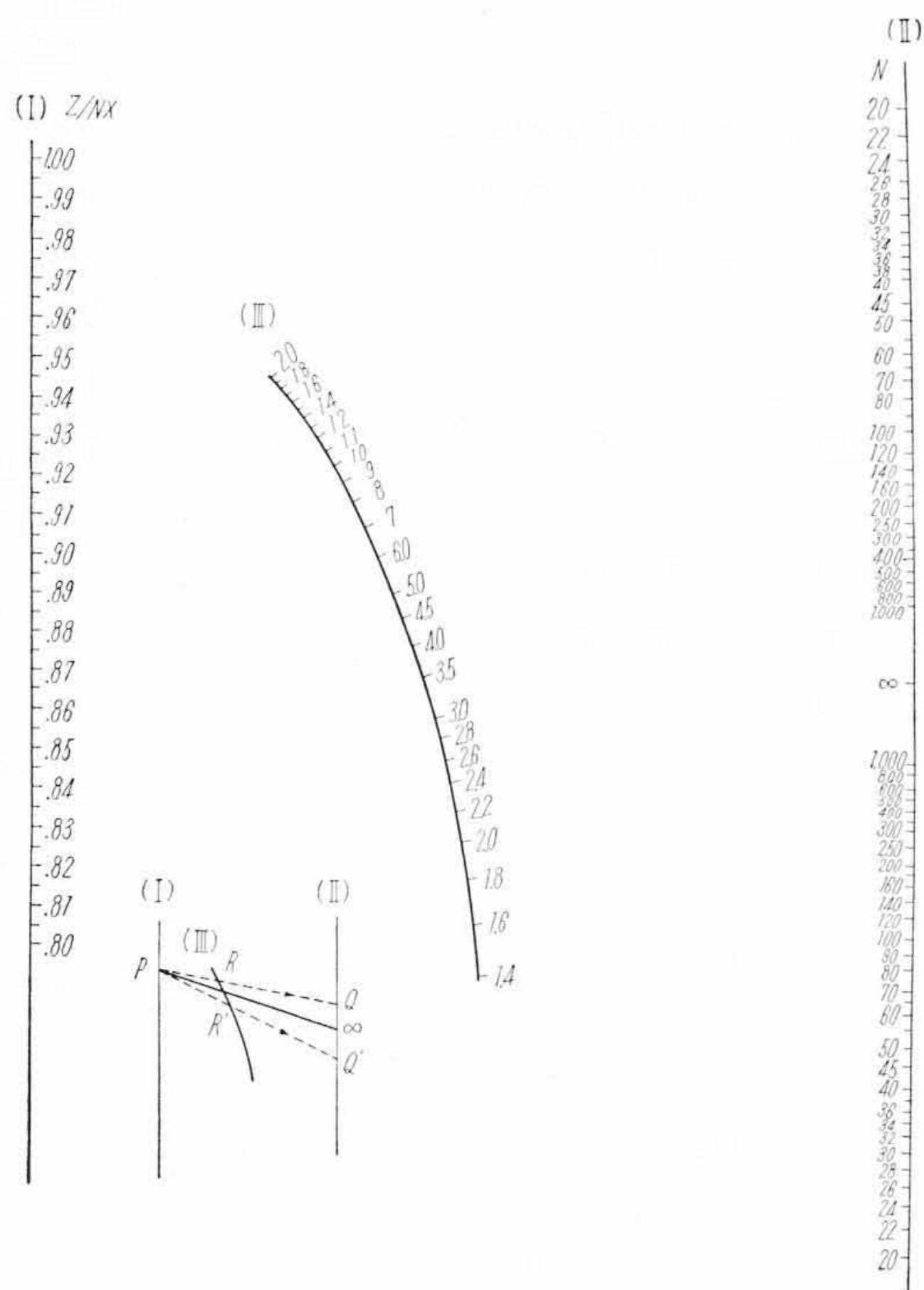
また

$$\begin{aligned} G(Z'; k, i) &\equiv \int_0^{Z'} g(u; k, i) du \\ g(u; k, i) &\equiv \begin{cases} e^{-u} \{u - h(N-i)\}^{k-1} / \Gamma(k) & \text{for } u \geq h(N-i) \\ 0 & \text{for } u < h(N-i) \end{cases} \end{aligned}$$

$L$  の信頼区間を求めるには  $Z$  の分布函数が相当やっかいな形をしているため, その形をそのまま用いないで,  $Z$  が正規分布で近似できる程度に  $N$  が十分大きな場合について求めた。それが第1図である。このノモグラフの使い方は次のとおりである。

- (i) (I) 尺度上に  $Z/NX$  をとる。これを  $P$  とする。  
(左下のヒナ形参照)
- (ii) (II) 尺度の中央の点 ( $\infty$ ) の上下に  $N$  点を求め, それぞれ  $Q, Q'$  とする
- (iii)  $\overline{PQ}, \overline{PQ'}$  と (III) 尺度との交点をそれぞれ  $R, R'$  とする





第 1 図 一定時間方式における平均寿命の信頼限界 (信頼係数 0.95) を求めるためのモノグラフ (時間の単位: 試験時間)

(iv)  $R, R'$  の目盛  $L_u, L_l$  を読みとる。区間  $(L_l X, L_u X)$  が  $L$  の信頼区間を与える。信頼度は 0.95

なお、信頼度として 0.95 以外の信頼区間を求めるには、(II) 尺度上の  $\infty$  と  $Q$  (または  $Q'$ ) との距離に次の  $r$  を乗じてやればよい

| 信頼度   | $r$  |
|-------|------|
| 0.999 | 1.68 |
| 0.99  | 1.32 |
| 0.9   | 0.84 |

次に  $L$  の点推定  $\hat{L}$  を求めるには、 $P$  と  $\infty$  との間を結んだ直線と、(III) 尺との交点の目盛り  $L_\infty$  をとり  $L_\infty X$  を計算すればよい。この推定値は不偏性を満たしていない。

## 第 2 章 応 用

### 3. 抜 取 検 査

本節は第 1 章に述べた二つの方式 (A), (B) のそれぞれについて、 $H_0: L=L_0$  なる統計的仮説を  $H_1: L=L_1 (L_0>L_1)$  なる対立仮説に対して危険率  $\alpha, \beta$  で検定する方法 (いわゆる規準形一回抜取検査方式に相当する) を述べたものである。

#### 3.1 一定不良個数方式 ((A) 方式の場合)

この方式では第 1 章 (10) 式で定義した統計量  $y$  について  $2y/L$  が自由度  $2n$  の  $\chi^2$ -分布に従う性質があるので、これを使う。すなわち

$$H_0 \text{ が正しい場合: } Pr\{2y < L_0 \chi^2_{2n}(1-\alpha)\} = \alpha$$

$$H_1 \text{ が正しい場合: } Pr\{2y > L_1 \chi^2_{2n}(\beta)\} = \beta$$

が成立するから

$$L_0 \chi^2_{2n}(1-\alpha) = L_1 \chi^2_{2n}(\beta) (\equiv 2A \text{ とおく})$$

となるように  $n$  を選び、さらに合格判定値として  $A$  をとればよい。つまり、 $y > A$  なら  $H_0$  を  $y < A$  なら  $H_1$  を採択する。なお  $n, A$  を求めるためのグラフおよびその OC 曲線を求める手順については文献 (3), (7) を参照されたい。

試験の中途打ち切り: 所定の  $n$  個不良となる前に、もし試験経過時間  $X(\geq x_{(k)}: k < n)$  において

$$x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(k)} + (N-k)X$$

を計算して、この値が  $A$  より大きくなれば  $H_0$  を採択して差しつかえない。

#### 3.2 一定時間方式 ((B) 方式の場合)

この方式では、第 1 章 (19), (19') 式で定義した統計量  $z$  または  $Z'$  を使う。なお  $Z$  の正確な分布関数は、かなりやっかいな級数 (23) 式で与えられるため、その代りに、その分布関数を Gram-Chalier の級数に展開し、三次の項までを考慮に入れたものを近似式として用いることにする。

まず分布の母平均  $L$  を単位にとれば、 $Z$  の平均値、分散、平均値のまわりの三次モーメントはそれぞれ次のようになる。ただし標本の大きさを  $N$  とし、試験時間を  $h$  にて表わした。

$$\left. \begin{aligned} N(1-e^{-h}) \\ N(1-2he^{-h}-e^{-2h}) \\ N(2-3h^2e^{-h}-6he^{-2h}-2e^{-3h}) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (24)$$

そこで、仮説  $H_0, H_1$  が正しい場合の  $Z$  の基準形  $w$  の分布関数をそれぞれ  $H_{0N}, H_{1N}$  にて表わし、 $Z$  の単位として  $L_0$  をとることとすれば、 $H_{0N}, H_{1N}$  を Gram-Chalier の級数に展開し、その三次までをとったものは、次のようになる。

$$H_{0N}(w) \doteq \Phi(w) - \frac{1}{6} \frac{2-3h^2e^{-h}-6he^{-2h}-2e^{-3h}}{\sqrt{N}(1-2he^{-h}-e^{-2h})^{3/2}} \times \Phi^{(3)}(w) \cdots \cdots (25)$$

$$H_{1N}(w) \doteq \Phi(w) - \frac{1}{6} \frac{2-3h^2r^2e^{-hr}-6hre^{-2hr}-2e^{-3hr}}{\sqrt{N}(1-2hre^{-hr}-e^{-2hr})^{3/2}} \Phi^{(3)}(w) \cdots \cdots (26)$$

$$\text{ここに } \Phi(w) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



$$\phi^{(3)}(w) \equiv -\frac{d^3}{dw^3} \phi(w)$$

$$r \equiv L_0/L_1$$

さて、 $H_{0N}(w_0) = \alpha$ ,  $H_{1N}(w_1) = 1 - \beta$  のごとく  $w_0, w_1$  を選んだとすれば、これは  $N$  の関数である。これをそれぞれ  $-d_\alpha(N)$ ,  $d_\beta(N)$  にて表わすとする。そこで、もし

$$\left. \begin{aligned} \frac{B - N(1 - e^{-h})}{\sqrt{N(1 - 2he^{-h} - e^{-2h})}} &= -d_\alpha(N) \\ \frac{B - N(1 - e^{-hr})/r}{\sqrt{N(1 - 2hre^{-hr} - e^{-2hr})/r}} &= d_\beta(N) \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

が満たされるように  $N, B$  の値をきめてやったとすれば、 $H_0, H_1$  が正しい場合の  $Z$  の基準形  $w$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} H_0 \text{ が正しい場合} \\ w &= \frac{Z - N(1 - e^{-h})}{\sqrt{N(1 - 2he^{-h} - e^{-2h})}} \\ H_1 \text{ が正しい場合} \\ w &= \frac{Z - N(1 - e^{-hr})/r}{\sqrt{N(1 - 2hre^{-hr} - e^{-2hr})/r}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (28)$$

であるから、与えられた条件  $L_0, L_1, \alpha, \beta$  を満たす抜取方式の合否判定として

$Z > B$  の場合には、 $H_0$  を採択する ( $H_1$  を棄却)

$Z < B$  の場合には、 $H_1$  を採択する ( $H_0$  を棄却) を採用することができる。

なお文献 (3) に  $N, B$  の値をきめるに便利な図表を、試験時間が  $0.05 L_0, 0.10 L_0, 0.15 L_0$  の三つの場合について与えた。

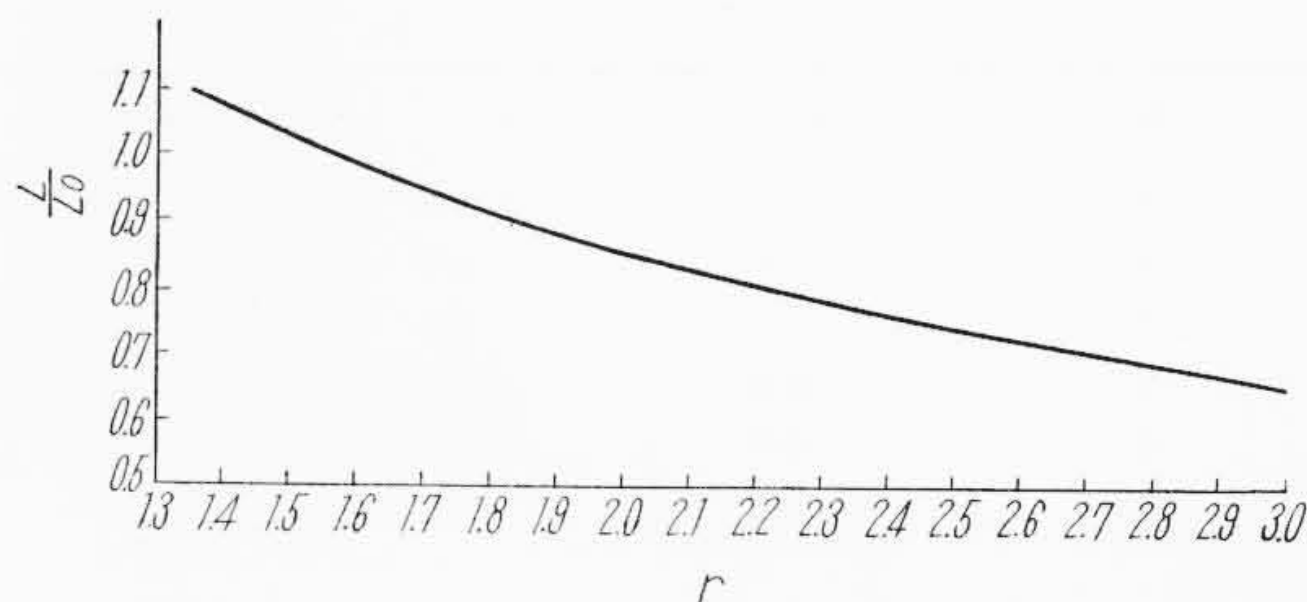
試験の中途打ち切り

この方式は、試験時間が  $X$  となって試験を終る方式であるが、 $X$  に達する以前において次の条件のいずれかが満たされれば、そこで試験を打ち切り、判定を下して差しつかえない。

$$\left. \begin{aligned} x_{(1)} + x_{(2)} + \dots + x_{(k)} + (N - k)x_{(k)} > B: H_0 \text{ を採択} \\ \text{(ただし } x_{(k)} < X) \\ x_{(1)} + x_{(2)} + \dots + x_{(k)} + (N - k)X < B: H_1 \text{ を採択} \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

### 3.3 一定不良個数方式と一定試験時間方式との試験時間の比較

一定の  $r (\equiv L_0/L_1)$  に対し ( $\alpha = 0.05, \beta = 0.10$  とする) 一定不良個数方式と一定時間方式とに要する試験時間を比較すると、次のごとくなる。前者に要する試験時間  $x_{(n)}$  は変量となるため、ここではその母平均をとることとし、また試験の中途打ち切りは考慮しないとする。後者の方式としては  $h = 0.10$  をとった。第2図は両者を比較した曲線である。この曲線の意味は次のとおり。 $r = 1.8$  の場合を例にとると、 $L$  が  $0.91 L_0$  より大きな場合には一定時間方式の方が試験時間が短く、 $0.91 L_0$  より小さな場合には、一定不良個数方式の方が (平均において)



第2図 一定不良数検査方式の平均試験時間と一定時間検査方式の試験時間とが等しくなるところの lot 平均寿命 (単位  $L_0$ )

短い。 $h = 0.05, h = 0.15$  の場合の曲線も、これとほとんど一致する。

## 4. 管 理 図

計量値の管理図として現在最も広く用いられているのは、いわゆる  $\bar{x}, R$  チャートであろう。しかし、いまわれわれが当面している特性値に対しては、 $\bar{x}, R$  チャートをそのまま使うことには、以下に述べるような二つの難点がある。

(1)  $\bar{x}, R$  チャートでは計量値の分布が正規分布からあまり離れていないことが要望されているにもかかわらず、指数分布形は、およそ正規分布からはかけ離れている。

(2) 従来の管理図では、試料全体の特性値が求められなければならないが、特性値が寿命の場合には、試験時間の関係から、試料全体が不良となるまで試験を続けることは一般に困難である。したがって、試料内の何個かが不良となったところでその試験を中止し、そのような不完全なデーターに基いて判断しなければならない。

本節は、試験時間を平均寿命の  $1/10$  にとった場合の管理図の限度線を与えたものである。限度線の引き方を以下に述べる。

(i) 一定不良個数方式によって母平均  $L$  を推定する。これを  $\hat{L}$  とする。

(ii) ロットから抽出すべき試料の数  $N$  を次定する (ここでは  $N = 5 \sim 10$  に対する数表を与えた)

(iii) 第1表から  $N$  に対する係数  $C, C_1', C_2'$  を求める。限度線は次式によって与えられる

$$\begin{aligned} \text{管理限度線} & C \hat{L} \\ \text{第一警戒線} & C_1' \hat{L} \\ \text{第二警戒線} & C_2' \hat{L} \end{aligned}$$

(iv)  $N$  個の試料を抽出し、同時に寿命試験を開始する。

(v) 時間  $\hat{L}/10$  になったら試験を中止し、それまでに不良となった試料の寿命値  $x_1, x_2, \dots, x_n (n \leq N)$  を求める。



第1表 管理限度の係数

| $N$ | $C$   | $C_1'$ | $C_2'$ |
|-----|-------|--------|--------|
| 5   | 0.342 | 0.402  | 0.448  |
| 6   | 430   | 490    | 538    |
| 7   | 519   | 575    | 630    |
| 8   | 608   | 662    | 723    |
| 9   | 699   | 752    | 817    |
| 10  | 781   | 842    | 913    |

(vi)  $Z = x_1 + x_2 + \dots + x_n + (N-n)\hat{L}/10$  を計算し、これを図上に打点する。

$Z' \equiv Z/L$  の分布函数を  $F_N(Z')$  とすると、 $C$ 、 $C_1'$ 、 $C_2'$  は次式の根である。

$$F_N(C) = 0.01$$

$$F_N(C_1') = 0.05$$

$$\{F_N(C_2')\}^2 = 0.05$$

したがって

(1)  $Z$  が  $C\hat{L}$  以下になったら、現在のロットの平均寿命は従来のそれより小さいと判定する。

(2)  $Z$  が  $C_1'\hat{L}$  以下になったら警戒を要する。

(3)  $Z$  が  $C_2'\hat{L}$  以下に2度続けて出たら警戒を要する。

という指針をうることができる。

一方この試験では、試験時間中1個も不良とならぬことがしばしば起る。それに対しては、次のルールに従って判定を下すことができる。

(1) 時間  $\hat{L}/10$  までに1個も不良とならぬ事象が第2表の  $r$  回以上続けて起ったら、現在のロットの平均寿命は従来のそれよりもすぐれていると判定することができる。

(2) また、引き続いて  $p$  回のうち  $q$  回(第3表)このような事象が起ったら、一応現在のロットの優秀性を考慮する必要がある。

第2表の数値は、次のごとくして求めたものである。試料として抽出した  $N$  個のユニットが  $\hat{L}/10 (\equiv L/10)$  までの間に、全然不良とならない確率は  $e^{-N/10}$  に等しい。したがって、このような事象が引き続いて  $r$  回起る確率は  $e^{-Nr/10}$  に等しい。第2表の  $r$  の値は

$$e^{-Nr/10} = 0.01$$

として求めたものである。

また引き続いて  $p$  回のうち、このような事象が  $q$  回起る確率は

第2表 管理図の判定表(I)

| $N$ | $r$ | $N$ | $r$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 5   | 10  | 8   | 6   |
| 6   | 8   | 9   | 6   |
| 7   | 7   | 10  | 5   |

第3表 管理図の判定表(II)

| $p \backslash N$ | $q$ |   |   |   |   |    |
|------------------|-----|---|---|---|---|----|
|                  | 5   | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3                | —   | — | — | — | — | 3  |
| 4                | —   | — | — | 4 | 4 | 4  |
| 5                | —   | 5 | 5 | 5 | 5 | 5  |
| 6                | 6   | 6 | 6 | 6 | 5 | 5  |
| 7                | 7   | 7 | 7 | 6 | 6 | 6  |
| 8                | 8   | 8 | 7 | 7 | 6 | 6  |
| 9                | 9   | 8 | 8 | 7 | 7 | 7  |
| 10               | 9   | 9 | 8 | 8 | 7 | 7  |

$$\frac{p!}{q!(p-q)!} (e^{-N/10})^q (1 - e^{-N/10})^{p-q}$$

に等しい。第3表の数値は、上式  $= 0.05$  とおいて求めた値である。

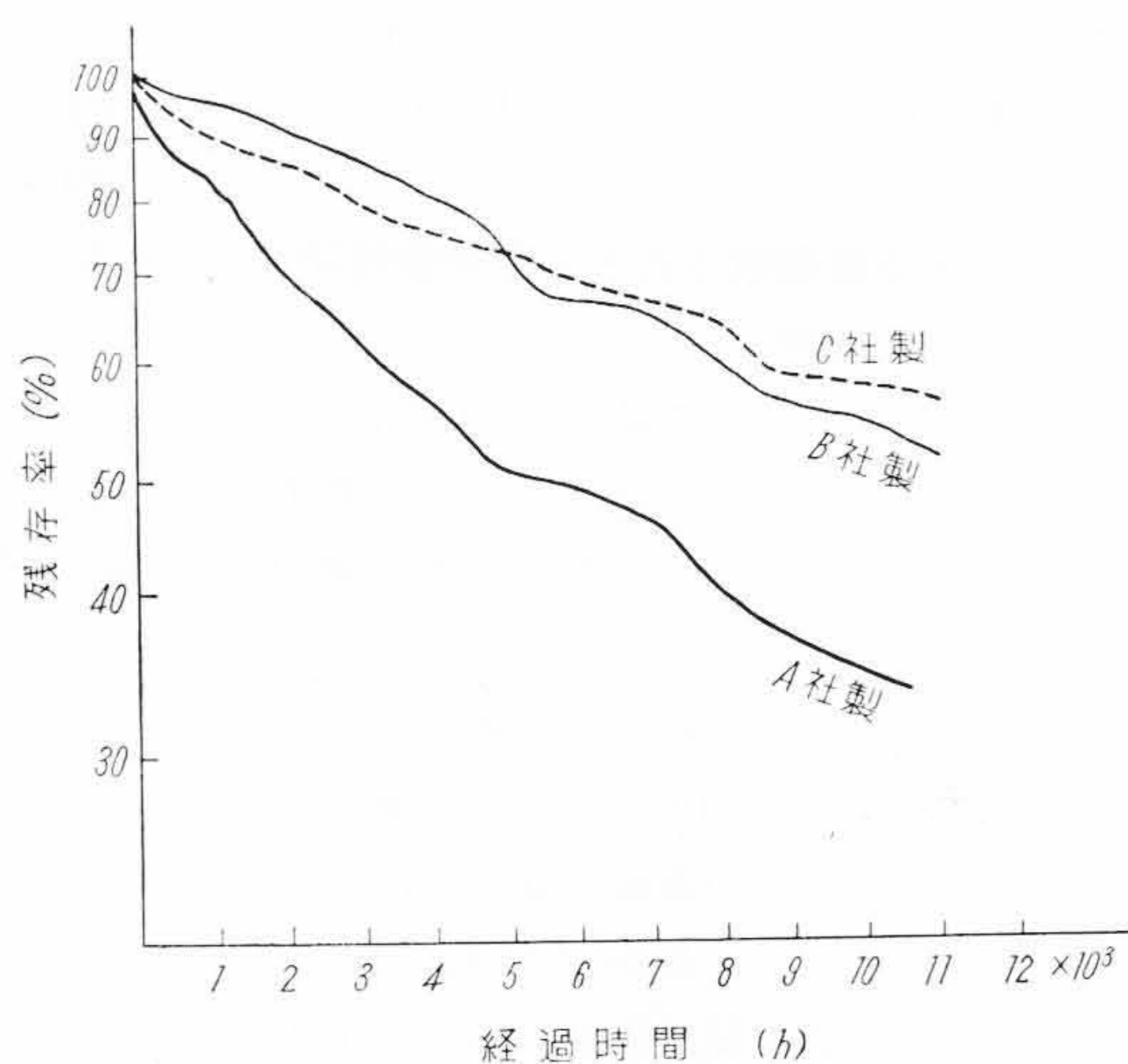
## 5. 真空管寿命への応用

### 5.1 真空管寿命の分布について

真空管の寿命試験データはすでにいくつか発表されているが、それを大別すると、実際の使用に供して得られたいわゆる、実用試験データと、実験室で計画的に行われた寿命試験のデータとになると思う。

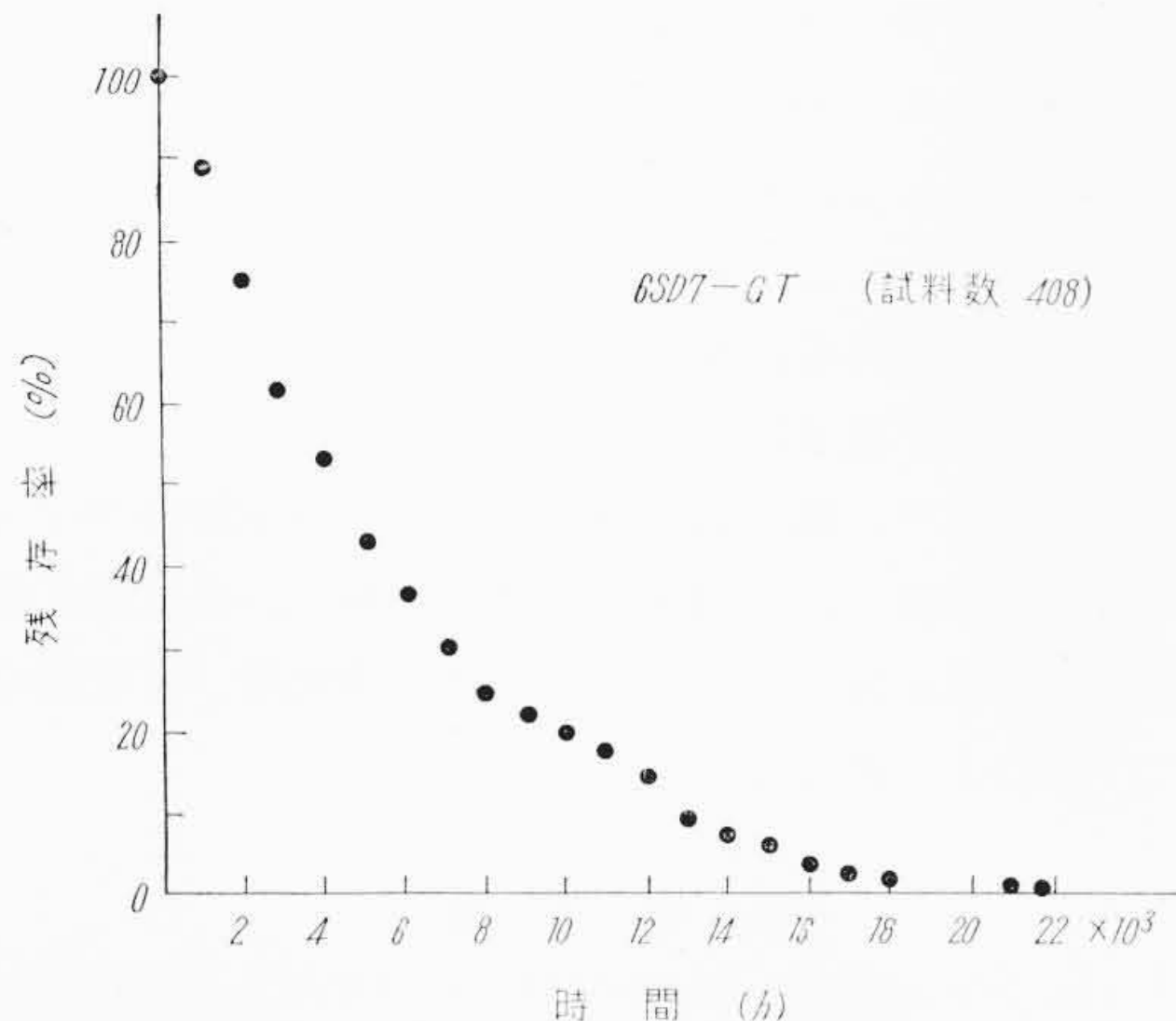
実用試験のデータとしては、わが国においても、国警、NHK、電通省などにおいて調査したいくつかのデータが発表されている。その代表的なものを一、二掲げると第3図のとおりである。

実験室内で行われた実験結果としては、寿命試験そのものが、本来相当大がかりな規模と、長時間とを要するため、あまり組織的なデータは見当らぬ模様である。わが国においても、各メーカーでこれに相当する試験は行っているが、いずれも標本の大きさがあまり小さくなく、寿命の分布を云々するには不十分のように思われ



第3図 (a) CZ-501-D のロット別残存率曲線



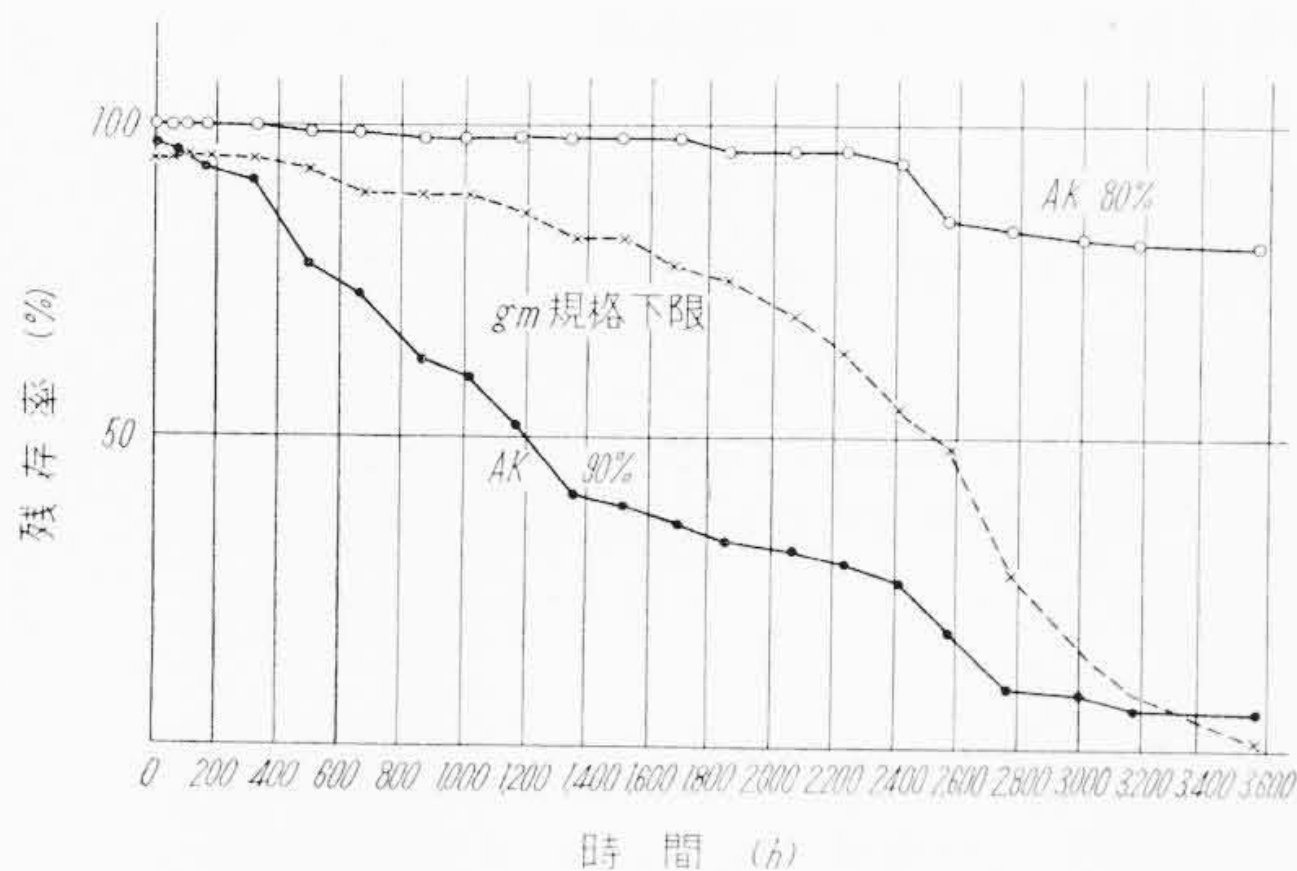


第3図 (b) 国警超波装置に用いた真空管寿命の残存率

る。筆者の知る限りにおいては、ただ一つの例外として、(学振)真空管委員会、寿命小委員会で企画立案し、国警通信学校において実施された寿命試験がある。これは供試管として一社一ロットの6SH-GT管100本を用い、特性の経時変化を求めている。第4図はその残存率を示したものである。第1図の(I), (II), (III)はそれぞれ寿命の定義として、次の時点をとっている。

(I) Mutual conductance が 3.9 m $\mu$  を切ったとき  
(II) Cathode activity の値が 90% を切ったとき  
(III) Cathode activity の値が 80% を切ったとき  
寿命の定義によって、残存率の形が変わるのは興味深い。外国の例としては米国の General Electric Co. で実施中の実験が、おそらく最も大規模のものではないかと思われる。まだこの実験は継続中で詳細な発表までにはなお数年を要するとのことである。

これらの図を見てわかる最も大きな特長は、前者の分布がほとんど指数形とみなしうることに對し、後者のデータは指数形から離れたものが少なくないということである。これは、両者の試験条件に大幅な差があるからと思われる。



第4図 真空管委員会寿命小委員会における寿命試験結果

## 5.2 平均寿命率による真空管寿命の抜取検査

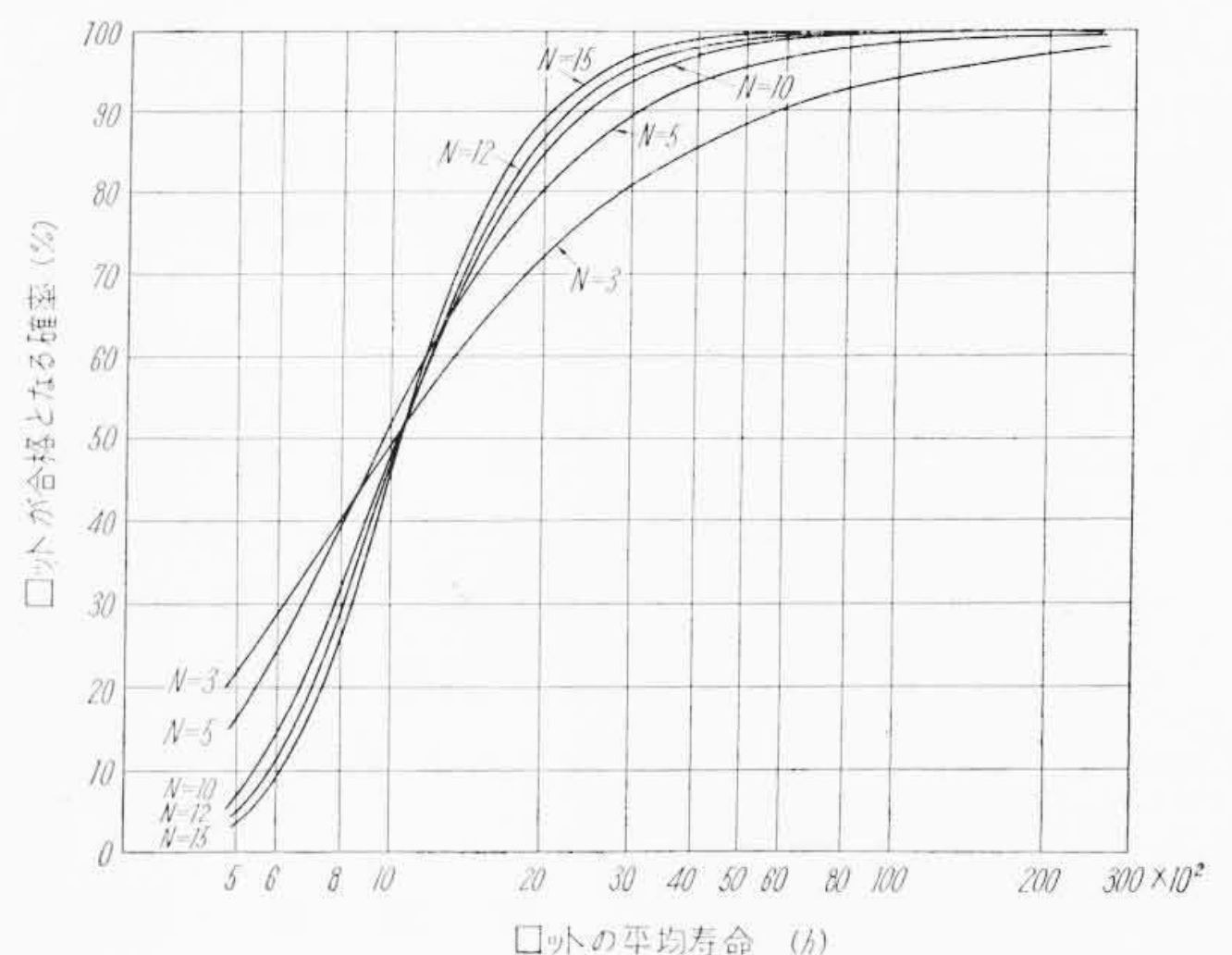
従来真空管寿命の抜取検査としてもっぱら用いられてきた方式に、いわゆる平均寿命率に基くものがある。これは米軍規格 JAN-IA に規定されており、日本でもこれにならっているところが多い。平均寿命率とは

$$\frac{(\text{各真空管の寿命値の和})}{(\text{被検査真空管の数}) \times (\text{試験時間})} \times 100(\%)$$

(なお、所定の試験時間内に不良とならなかった真空管の寿命値は、その試験時間に等しいとおく) で定義されるもので、標本の大きさ  $N$  としては 3~10 また合否の判定には平均寿命率 80% をとっているのが一般である。しかし、この方式は生産者、消費者に対してどのような保証を与えているかという点に対しては、ほとんど検討されていない模様である。平均寿命率とは、とりもなおさず、第1章 (19) 式で定義した  $Z$  を  $NX$  で割ったものにほかならない。それで  $Z$  の分布函数 (23) 式を用いて exact な OC 曲線を求めた、 $N$  としては 3, 5, 10, 12, 15 の 5 通りをとった。これが第5図である。これらの曲線からわかることは、 $N$ が増せばその検出力が大きくなることというまでもないが、そのまし方が  $N=3$  から 10 までの間、かなり大幅であるに對し、 $N$ を 10 から 15 まで変えても、その性能はその割に改善されない。したがって、結論としては、 $N$ としては少なくとも 10 程度をとるべきであろうと思われる。

## 5.3 母集団分布がガンマ形の場合、これを指数分布とみなして母数を推定したとき、推定値に含まれる偏りについて

真空管の実用試験から求めた寿命分布は、大体指数形であるといえることができるが、中にはむしろガンマ形と見た方がよい場合もある。このような場合、これを誤って指数形とみなし、(12) 式または (14) 式によって寿



第5図 平均寿命率による抜取検査の OC 曲線(合格判定値 80%)  $N$ : 被検査真空管個数



命の平均値を推定したとき、その中に含まれる偏りについて述べよう。寿命の分布関数を

$$\frac{1}{\Gamma(1+\delta)} x^{(1+\delta)-1} e^{-x}$$

なる形で与えるものとする、(12)式(14)式による推定はともに over estimate となること、特に  $n/N$  が小さい場合然り。また(12)式の方が(14)式によるよりも偏りが大きく、 $\delta < 1.0$  の範囲では、偏りはほぼ  $\delta$  に比例する。それ故、結論としては、分布がガンマ形と思われる場合  $n/N$  は少なくとも 0.3 くらいをとる必要があること、また推定の式としては(14)式によるべきことなどがあげられる。

## 6. 結 言

真空管の寿命の統計的取扱いというものを常に念頭において指数分布の順序統計量の応用について述べた。応用の面からみて最も重要なことは、仮定として立てた寿命分布の形の問題であろう。第3図の残存率曲線から見て、実際の使用状態における真空管の寿命分布は、大体指数形とみなして差しつかえなさそうである。しかし、実験室内で行われた結果では、その分布を指数形と見るには相当無理があるようである。それは、動作の場が違うためであろう。General Electric において行われた実験は、衝撃そのほかの条件を付加して、実際の使用状態に近づけようと努めてはいるが、これとても、実験計画における one factor at a time のわりつけである。実際の使用状態では、衝撃もあろうし、振動もあろう。さらに電圧の変動、on-off なども付加される。実用の場

に供した真空管の寿命には、これら数々の因子が交錯しながら作用する。G. E. の実験では、これらの因子の一つだけに着目して、その水準を変えるという手段をとっているにすぎない。実験室内における試験としては、将来実用の使用条件を再現したような、いわゆる等価試験の生れることが望まれる。

本研究に当り、種々御指導を賜った日立製作所中央研究所菊田所長、浜田副所長、高田部長に、また常に御激励、御鞭撻を賜ったトランジスタ研究所、宮城副所長に、衷心より御礼を申し上げます。

## 参 考 文 献

- (1) S. Shimada: Moments of Order Statistics drawn from Exponential Distribution, Rep. Stat. Appl. Res. Vol. 1957
- (2) 高田、島田: 少数例による真空管寿命の推定法, 電通誌 Vol 34, No. 6
- (3) 高田、島田: 真空管寿命の抜取検査, 電通誌 Vol 35, No. 12
- (4) 高田、島田: 真空管寿命の管理図, 電通誌 Vol 36, No. 4
- (5) 島田: 平均寿命率による真空管寿命の抜取検査についての考察 昭和32年, 電気4学会連合大会, 講演論文集
- (6) 島田: 真空管の推定寿命に対する保証および予備量の決定, 電通誌 Vol. 40 No. 8
- (7) S. Takada & S. Shimada: Statistical Analysis of Life of Vacuum Tubes, Part 1, 2, 3, Hitachi Review July, Aug. Sep. 1954
- (8) 真空管研究委員会, 寿命小委員会資料 昭和29年
- (9) 浜田ほか: 真空管委員会寿命小委員会における寿命試験中間報告, 昭和35年度電気通信学会全国大会論文予稿

Vol. 41

日立評論

No. 6

◎大容量火力発電所機器配置の要点  
 ◎川崎製鉄株式会社千葉製鉄所納 15,000kW 復水タービンおよび発電機  
 ◎パイロットワイヤリレー方式の進歩  
 ◎E O I 形 調 節 計  
 ◎釜石市におけるテレビジョン共同聴視  
 ◎新形熱陰極水銀整流管  
 ◎防衛庁技術研究所納超低温低圧装置  
 ◎定電圧電源によるアーク制御とアーク特性

◎ポリビア向蒸気機関車の油焚装置について  
 ◎電車用直角カルダン駆動装置に生ずる動荷重について  
 ◎電力ケーブル用クラフト絶縁紙の熱劣化特性  
 ◎ブチルゴム電力ケーブルの熱的特性  
 ◎鑄鉄のガス含有量  
 ◎ダクタイル鑄鉄のピンホールについて  
 ◎陰イオン交換樹脂としての高分子錯塩  
 ◎マグネットワイヤの見かた選びかた

発行所 日立評論社 東京都千代田区丸の内1丁目4番地 振替口座 東京 71824 番  
 取次店 株式会社オーム社書店 東京都千代田区神田錦町3丁目1番地 振替口座 東京 20018 番