U. D. C. 534.15 : 621-252.5

回　転　翼　の　振　動

Vibration of Turbine Moving Bucket Blade

小　堀　与　一*　大　森　基　次*
Yoichi Kobori　Motoji Ōmori

内　容　梗　概

回転中の翼の固有振動数 f が静止時の振動数 f_0 より高くなることは $f^2=f_0^2+B\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2$ なる関係として知られている。遠心力係数 B は翼断面が均一か特定の場合のみ理論上既知であるが，大形タービン翼のような変断面翼では不明である。大形タービン翼の設計資料とするため，翼幅一定で，厚さがくさび状に先薄となった翼の B について計算ならびに実験を行った。その結果，B は計算実験ともに翼の厚さ比（先端厚/根本厚）が小になるとともに増す傾向があり，厚さ比が 0.5～1.0 では実験値は計算値と大差がないが，厚さ比が 0.5～0 となった場合は実験値は計算値より 8～22% 大となることがわかった。

1. 緒　　言

蒸気タービンブレード，電動機冷却ファン，送風機ファンなどの設計においては回転時の翼の固有振動数を回転数ならびに外部からの刺激たとえば回転にともなう蒸気，空気の脈動あるいは電気的機械的トルクの変動などのサイクルに一致させてはならない。そのためには回転時の翼の固有振動数がどうなるかをあらかじめ知っておく必要がある。周知のようにこの振動数 f は遠心力の作用により静止時の振動数 f_0 より高くなり，一般に遠心力係数を B，回転角速度を ω とすれば

$$f^2=f_0^2+B\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2$$

なる形で表わされる[1][2]。B は翼が取付けられてあるボスの半径と翼長の比，振動形および翼の形状により異なった値をとる。B の値は均一断面および特定な変断面翼の場合は計算上既知であるが[3][4]，大形タービン翼のような断面の場合は不明である。本論文では主として大形タービン翼に対して設計資料をうるため翼断面を幅一定，厚さ先薄状のくさび状とみなし，かかる翼の B について計算と実験から検討することにした。

2. 供試翼および実験方法[5]

2.1 供　試　翼

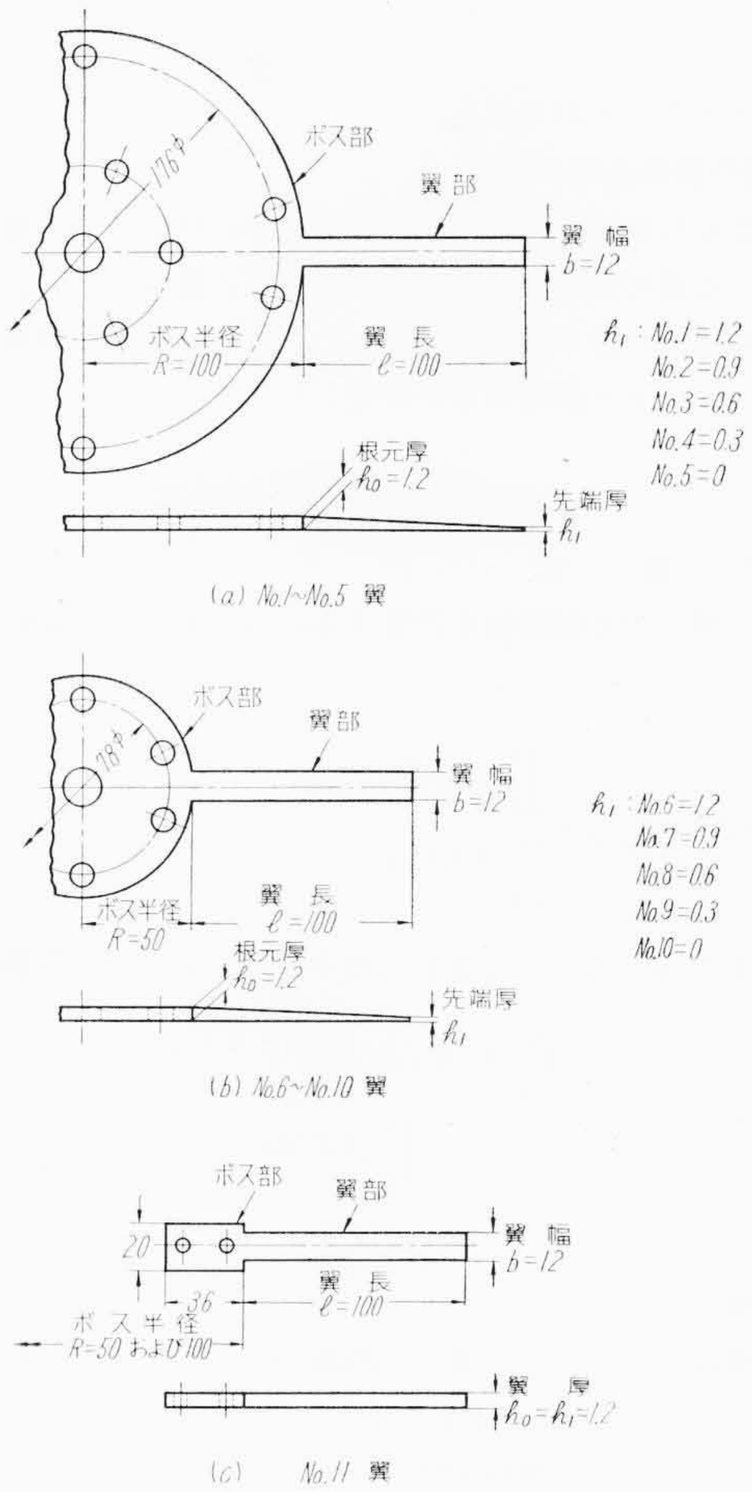
第1図(a)～(c)に実験に供した翼の形状および寸法を示す。翼はボス部分を一体とし，最初2種(No. 1 および No. 6)を作り，必要な測定をなし，その測定が終了したのちそれぞれ翼部のみ先端方向にテーパ状に削り，所要の測定を逐次行った。そこで翼はテーパの大なるにしたがって番号を No. 2～No. 5 および No. 7～No. 10 を付してある。翼の製作にあたっては，翼厚を翼根元から先端まで 5 mm 間隔に翼幅の中央部，両端部の計60点についてマイクロメータで測定しつつ翼を仕上げることにより，No. 5 および No. 10 を除いて，厚さの誤差を±3%以下とすることができた。No. 5 および No. 10は先端厚 0 のくさび形翼であるが，先端厚は工作上 0 となしえず，それぞれ 0.07 および 0.06 mm となっている。

以上の翼 (No. 1～No. 10) は回転面に平行に取付けられた場合(取付角 $\theta=0$)であるが，B は同一翼でも取付角が変わると変わる。この影響を検討するため，均一断面翼 No. 11 (翼部の寸法は No. 1 または No. 6 と同様)を用いて，取付角を変えた場合についても実験した。

2.2 回転中の振動数測定

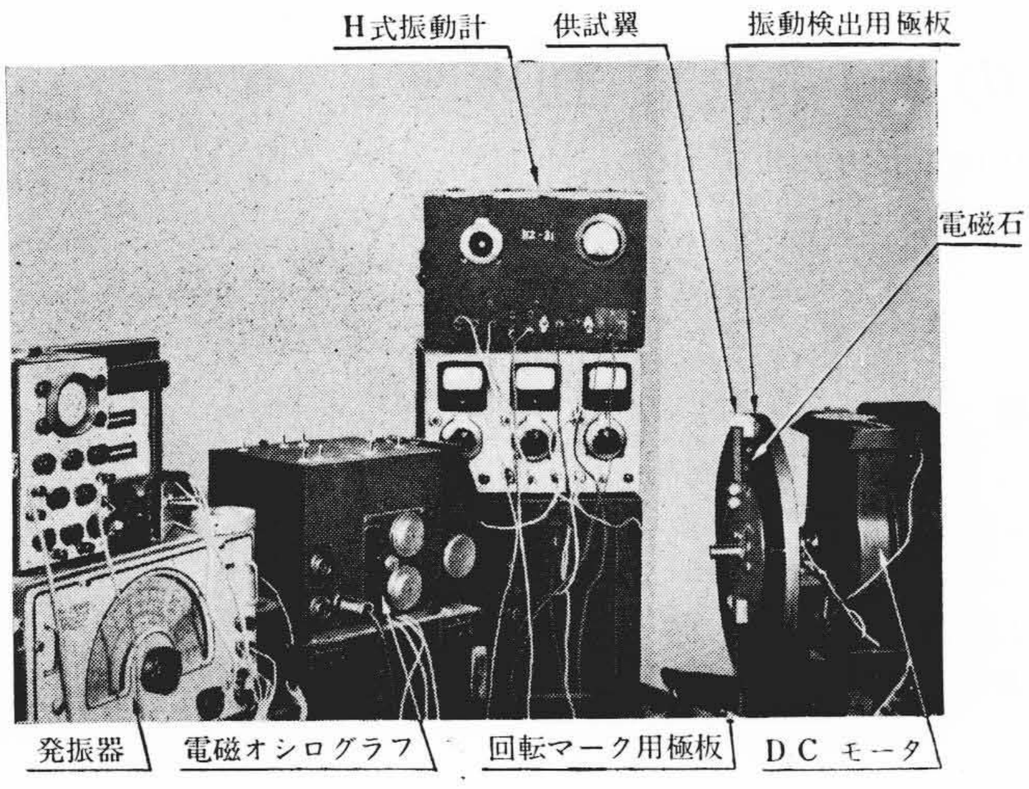
第2図に実験装置を示す。図は No. 11 翼が回転面に $\theta=45$ 度の傾きをもって取付けられた場合である。**第3図**は翼の取付け状況および振動測定装置の詳細である。ボス半径 R，翼長 l なる翼をDCモータの軸端に取付け，速度 ω で回転しながら翼を発振器および電磁石により加振する。翼の振動は翼先端付近に設置した容量形振動計の電極板により電気容量変化として変換され，振動計に導かれたのち電磁オシログラフにより記録される。翼の固有振動数と発振器のサイクルが一致したときは振幅は極大となる。このときの振動の振動数をオシログラムから読みとり，回転時の固有振動数 f を求める。静止時の固有振動数 f_0 は別に測っておき既知であるので，f，f_0 および ω が既知となり，計算式

$$f^2=f_0^2+B\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

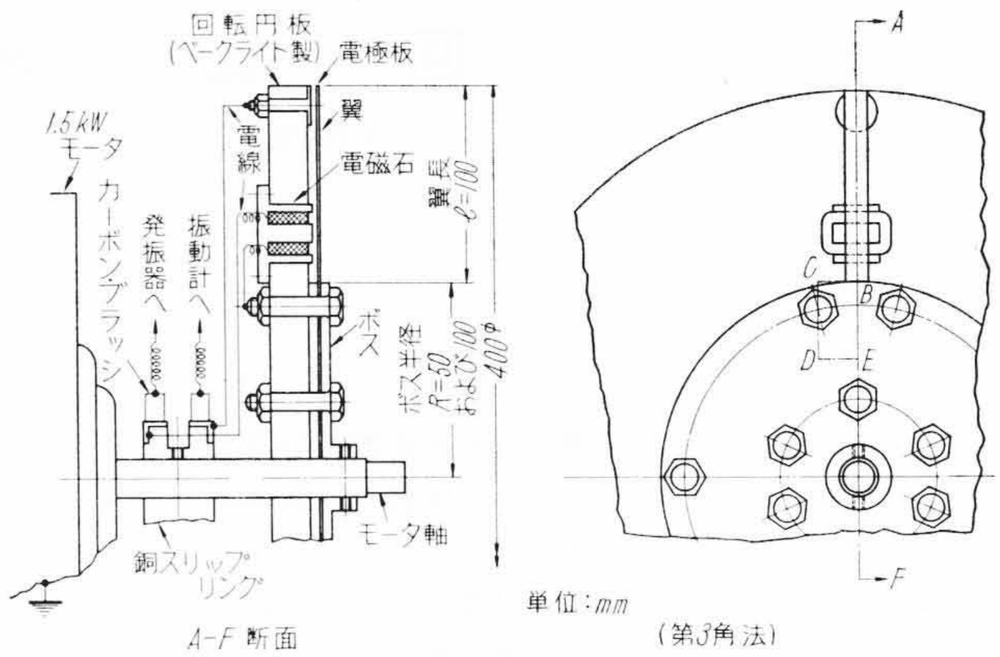


第1図　翼の寸法（単位 mm）

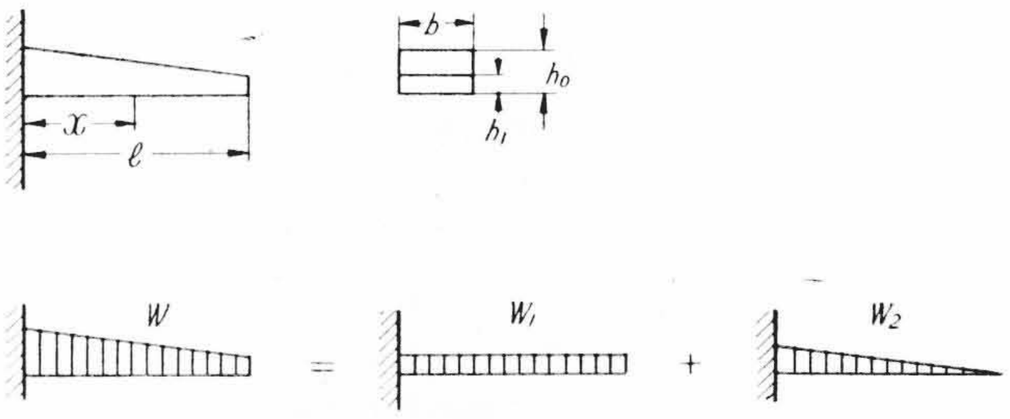
* 日立製作所日立研究所



第2図　実　験　装　置



(図は No.1～No.10 翼の取付状態を表わす)
第3図　回転部の詳細図



第4図　くさび状翼の荷重分布

よりBを求めることができる。

2.3　翼の振幅分布の測定

Bを計算から求めるには，後述するように回転しない場合の共振状態における翼の振幅分布が知られていると都合がよい。各翼を静止状態で電磁石により共振振動せしめ，このときの振動状況を写真撮影することにより振幅分布を決定した。

3.　計算方法ならびに結果

3.1　計　算　式

回転時の翼の固有振動数を計算するには，静止時の振動数f_0を関係式

$$f_0^2=\frac{g}{(2\pi)^2}\cdot\frac{\int_0^l AX\,dx}{\int_0^l AX^2\,dx}\quad\cdots\cdots(2)$$

により，また遠心力による復原力のみ作用した場合の振動数を

$$B\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2=\frac{\int_0^l A(R+x)\,dx\int_0^x\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx}{\int_0^l AX^2dx}\quad\cdots\cdots(3)$$

ただし

l：翼長

x：翼根元から測った翼上の距離($l=1.0$とするとxは0から1.0の間の範囲の値をとる)

A：x点における翼断面積

X：xの関数で，翼自重によるたわみ曲線を表わす(実際にこれを求めるには翼の共振振動時における振幅の翼長に対する分布を求め，これをxの簡単な関数として表わせばよい)。

R：ボス半径

g：重力の加速度

により求める必要がある[6]。(3)式より

$$B=\frac{\int_0^l A(R+x)\,dx\int_0^x\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx}{\int_0^l AX^2dx}\quad\cdots\cdots(4)$$

である。本実験においてはくさび状翼なるゆえ，翼断面積Aは根元断面積A_0に対して次式で表わすことができる。

$$A=A_0(1+mx)\quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，mは厚さのこう配を表わす定数である。

3.2　回転面に対する取付角$\theta=0$の場合のBの計算

(a)　Xを理論的に与える場合

たわみ曲線Xは“片持ばりのたわみ曲線の微分方程式”[7]

$$M=EI\frac{d^2X}{dx^2}\quad\cdots\cdots(6)$$

よりみいだすことができる。上式でMは任意断面の曲げモーメント，EIは曲げこわさ，d^2X/dx^2は曲率である。くさび状翼のMは**第4図**のように，分布荷重の総量Wを等分布荷重と三角形の分布荷重の二つに分けて考え，両荷重の総量をそれぞれW_1およびW_2とすれば

$$M=\frac{W_1}{2l}(l-x)^2+\frac{W_2}{3l^2}(l-x)^3\quad\cdots\cdots(7)$$

また，断面二次モーメントIは翼幅をb，根元の厚さをh_0とすれば

$$I=\frac{1}{12}bh_0^3(1+mx)^3\quad\cdots\cdots(8)$$

となる。(7)および(8)を(6)式に代入して

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{2\gamma}{Eh_0^3l}\left\{\frac{-(h_0-h_1)x^3+3h_0lx^2-3(h_0+h_1)l^2x+(h_0+2h_1)l^3}{(1+mx)^3}\right\}\quad\cdots\cdots(9)$$

ただし，

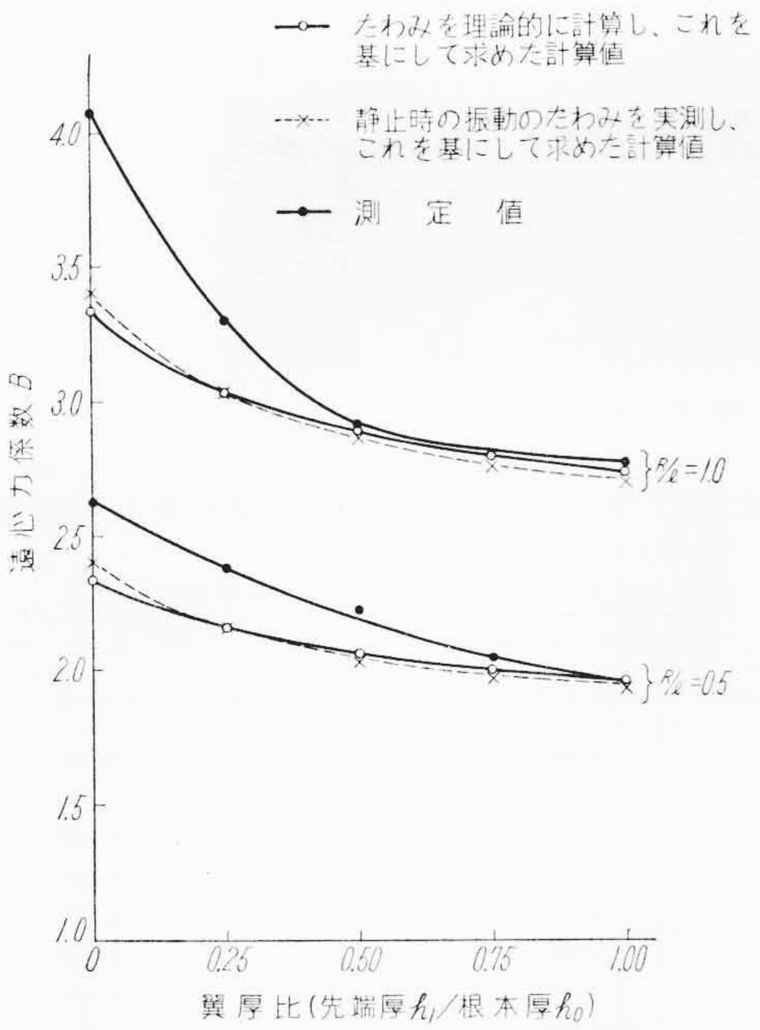
γ：材料の単位体積の重量

h_1：翼先端の厚さ

が得られる。(9)式からたわみ曲線を表わすXの式を求めることができる。

各翼について(4)，(5)および(9)式を用いてBの値を計算すると**第1表**(a)のようになる。計算過程の一例を付録(1)に示す。

$R/l=1$および$R/l=0.5$のときのBの翼厚比に対する関係を**第5図**(○印の実線)に示す。



第5図　翼厚比と遠心力係数の関係

(b)　Xを実測振幅から与える場合

たわみ曲線の式として各翼を通じ

$$X=ax^2+bx^3+cx^4 \quad \cdots\cdots(10)$$

とおく。係数a，bおよびcは翼種に特有な値を有し，無次元な値である。a，b，cを実際に求めるにはxが翼長の 1，0.75 および0.5 倍の位置での振幅を求め，三元一次方程式を作ればよい。この結果Xがきまったら (10)，(5) および(4)式よりBは求まる。各翼に対する計算結果を**第1表**(b)に示す。また計算の詳細を付録(2)に示す。$R/l=1$ および $R/l=0.5$ のときのBの翼厚比に対する関係を**第5図**の×印破線に示す。

3.3　回転面に対する取付角$\theta \neq 0$の場合の計算

回転面に対しある角度をもって取付けられた均一断面翼については次式が与えられている[8]。

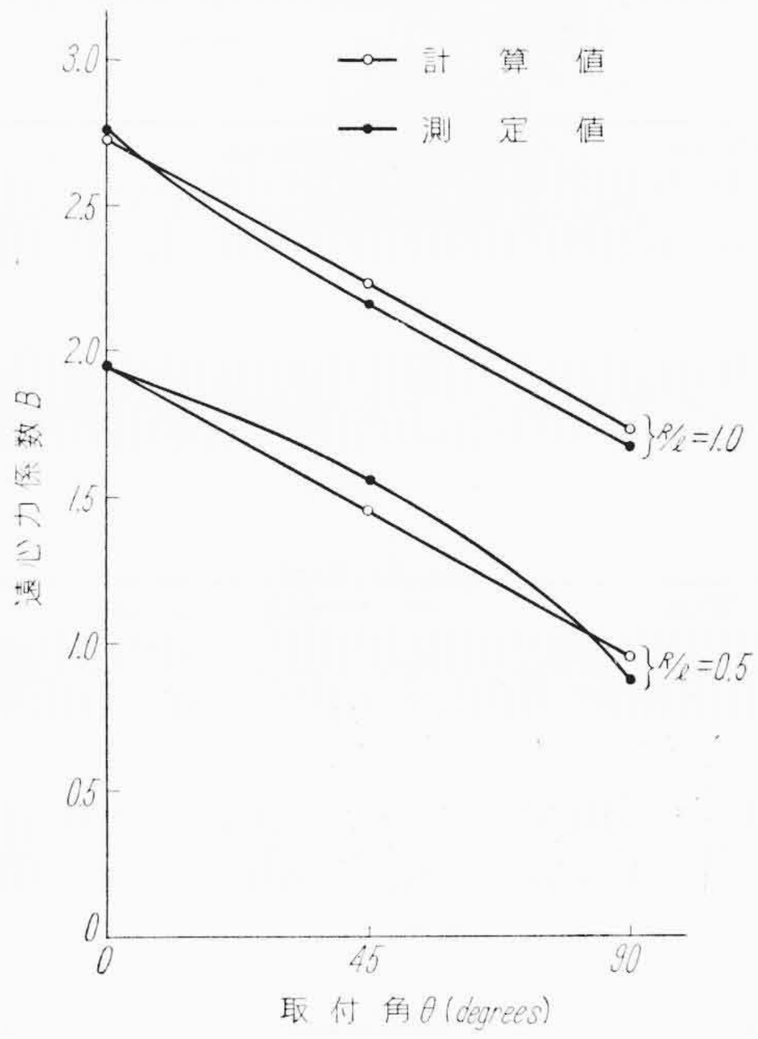
$$B=1.558\left(\frac{R}{l}\right)+1.173-\sin^2\theta \quad \cdots\cdots(11)$$

この式から $R/l=1$ および 0.5，また $\theta=45$ 度および 90 度の場合について計算した結果を**第6図**の○印実線に示す。

第1表(a)　B の 計 算 値

(たわみを理論計算し，これを基にして計算した値)

翼 No.	翼 先端厚h_1	B の 式	備考(Bの値) 翼No.	$B\left(\frac{R/l=1.0}{R=100}\right)$	翼No.	$B\left(\frac{R/l=0.5}{R=50}\right)$
1. 6.	1.2	$1.558\left(\frac{R}{l}\right)+1.173$	1	2.731	6	1.952
2. 7.	0.9	$1.596\left(\frac{R}{l}\right)+1.198$	2	2.794	7	1.996
3. 8.	0.6	$1.652\left(\frac{R}{l}\right)+1.232$	3	2.884	8	2.058
4. 9.	0.3	$1.749\left(\frac{R}{l}\right)+1.280$	4	3.029	9	2.155
5. 10.	0	$2.000\left(\frac{R}{l}\right)+1.333$	5	3.333	10	2.333



(均一断面翼 No.11 の場合)

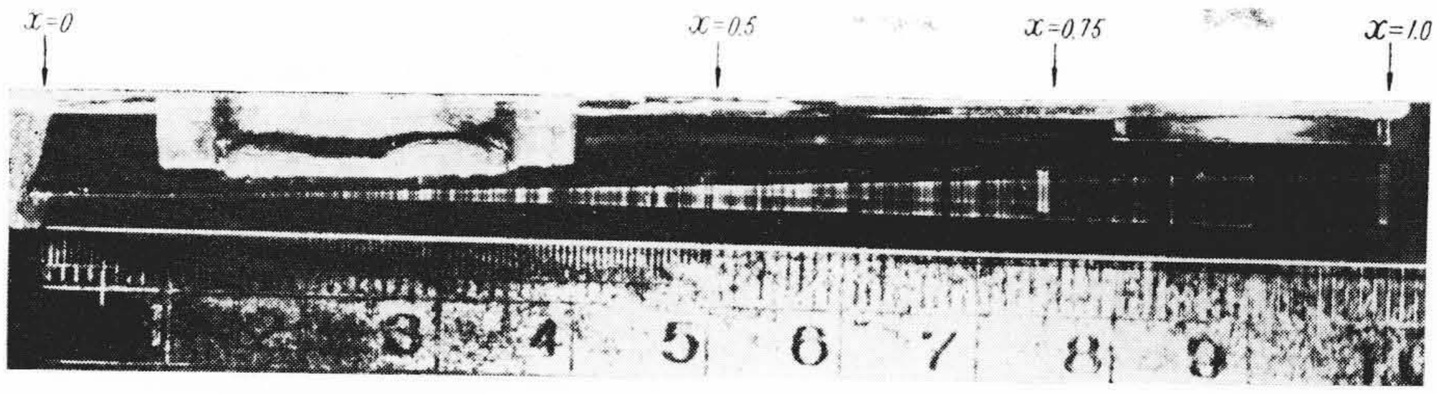
第6図　取付角と遠心力係数の関係

第1表(b)　Bの計算値　(静止時の振動振幅を実測し，これを基にして計算した値)

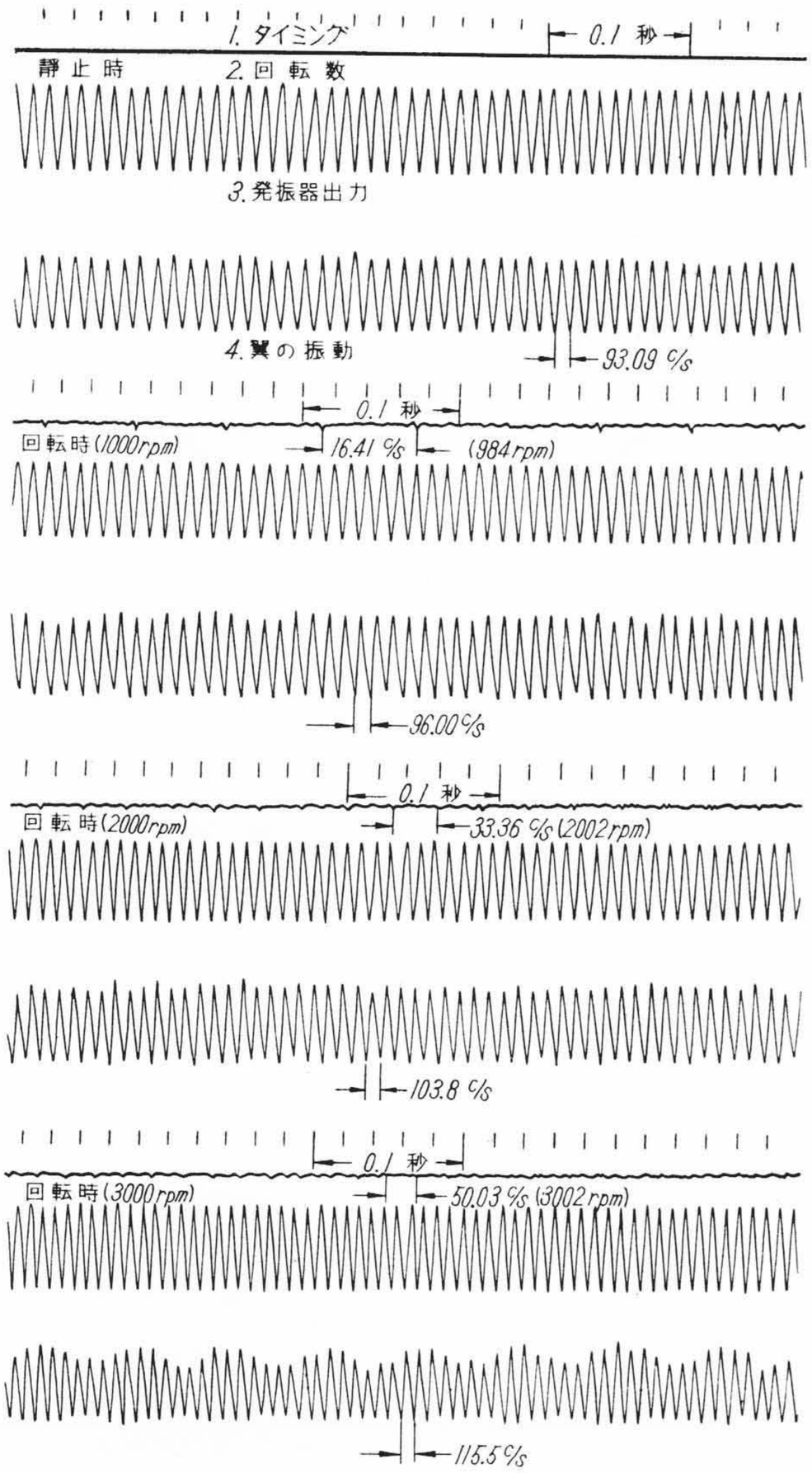
翼* No.	先端厚 h_1	ボス半径 R	B の 式	翼 No.	先端厚 h_1	ガス半径 R	B の 式	平均 B の式	備考(Bの値) $R/l=1.0$ No.	B	$R/l=0.5$ No.	B
1	1.2	100	$1.547\left(\frac{R}{l}\right)+1.154$	6	1.2	50	$1.551\left(\frac{R}{l}\right)+1.163$	$1.549\left(\frac{R}{l}\right)+1.159$	1	2.708	6	1.934
2	0.9	100	$1.565\left(\frac{R}{l}\right)+1.158$	7	0.9	50	$1.599\left(\frac{R}{l}\right)+1.193$	$1.582\left(\frac{R}{l}\right)+1.176$	2	2.758	7	1.967
3	0.6	100	$1.610\left(\frac{R}{l}\right)+1.173$	8	0.6	50	$1.678\left(\frac{R}{l}\right)+1.267$	$1.644\left(\frac{R}{l}\right)+1.220$	3	2.864	8	2.042
4	0.3	100	$1.692\left(\frac{R}{l}\right)+1.228$	9	0.3	50	$1.796\left(\frac{R}{l}\right)+1.341$	$1.744\left(\frac{R}{l}\right)+1.285$	4	3.029	9	2.157
5	0.0	100	$2.026\left(\frac{R}{l}\right)+1.399$	10	0.0	50	$1.969\left(\frac{R}{l}\right)+1.406$	$1.998\left(\frac{R}{l}\right)+1.403$	5	3.401	10	2.402

注：1.　翼長はすべて $l=100$ mm，翼根元厚はすべて 1.2 mm

2.　平均 B は $B=B_1\left(\frac{R}{l}\right)+B_2$ として B_1，B_2 は同一寸法の翼 (h_1 の等しい No.1 と No.6……No.5 と No.10) について別々に平均したものである。



第7図　No.6 翼の振動振幅分布



第8図　No.6 翼のオシログラム

4. 実験結果

4.1 振動振幅分布

静止翼の共振振動の振幅分布の写真から，$X=0.5l, 0.75l, 1.0l$ の位置の振幅を読みとり，自由端の振幅に対する比として表わした結果を**第2表**左方に示す。参考までに(9)式を積分して得られるたわみXの $x=0.5l,\ 0.75l,\ 1.0l$ の各位置における計算値も**第2表**右方に示す。また共振振動の写真の一例を**第7図**に示す。

4.2 回転中の振動数および遠心力係数

回転数が0(静止)，1,000, 2,000, 3,000 rpm のときの各翼の固有振動数の測定結果を**第3表**(a)(b)に示す。またこの測定結果から(1)式により各回転数別に B を求めた結果もあわせて**第3表**(a)(b)に示す。この表のBは回転数により相当のばらつきがあるので

第2表　$x=1$, 0.75 および 0.5 の位置の実測振動振幅ならびにたわみ計算値
($x=1$ の位置の振幅またはたわみに対する比で表わす)

翼番号	実測振動振幅			たわみ計算値		
	$x=1$	$x=0.75$	$x=0.5$	$x=1$	$x=0.75$	$x=0.5$
1	1	0.668	0.361	1	0.668	0.354
2	1	0.656	0.358	1	0.656	0.337
3	1	0.648	0.348	1	0.638	0.314
4	1	0.583	0.294	1	0.609	0.284
5	1	0.456	0.192	1	0.563	0.250
6	1	0.660	0.353	1	0.668	0.354
7	1	0.678	0.351	1	0.656	0.337
8	1	0.626	0.296	1	0.638	0.314
9	1	0.595	0.261	1	0.609	0.284
10	1	0.447	0.191	1	0.563	0.250

(Bは回転数に関係しないはずである)，これを平均して各表の終りに示した(この平均値は表の横および縦欄の各測定値を相互に比較し，著しく異なるものは除外して算出した)。**第3表**(a)(b)のBの平均値より，翼厚比とBの関係および取付角とBの関係をそれぞれ**第5図**および**第6図**(いずれも・印実線)に示す。また振動のオシログラムの一例を**第8図**に示す。

5. 結果の検討

5.1 取付角 $\theta=0$ の場合

翼厚比が1の場合のBについては，Campbell[9]，小野[2]および鈴木氏[10]などのいくつかの理論式があり，それぞれ異なった値を与える。Campbellの式は(4)式(Rayleigh 法による式)を用いて翼厚比が1および0についてだけ計算しており，その結果は本報の計算結果(**第1表**(a)の $1.558\left(\frac{R}{l}\right)+1.173$ および $2.000(R/l)+1.333$)と一致している。ここでは上記3者の理論式と実験から得た式とを比較してみる。

第3表(a)より，$R/l=1$ および 0.5 のときの実験値(No.1は2.766, No.6は1.935)は(4)式による計算値(No.1で2.731, No.6で1.952)に対して，それぞれ+1.3%および−0.9%の差があり，小野氏の式による値(No.1で2.45, No.6で1.725)に対してそれぞれ+12.9%および+12.2%，また鈴木氏の式による値(No.1で2.764, No.6で1.979)に対してそれぞれ+0.1%および−2.3%の差があり，本報の実験値は(4)式または鈴木氏の式による計算値とほとんど一致する。したがって回転翼の固有振動数を計算するに当り，Bとして諸氏のいずれの式を採用するかにより値が異なってくるが，均一断面翼については上記計算値と実験値との比較結果から(4)式による $B=1.558\ (R/l)+1.173$ なる式，または鈴木氏の式 ($B=1.5709(R/l)+1.1934$)のいずれかを用いるのが妥当と思われる。

第5図からBは実験値，計算値ともに翼厚比が小になるにつれ，曲線をなして上昇することがわかる。しかも実験値と計算値との差は翼厚比が小になるほど大きくなり，実験値は計算値に対し $R/l=1$ の場合で，翼厚比が 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0 についてそれぞれ +1.3% +0.6%，+0.8%，+8.8%，+22.2% であり，また $R/l=0.5$ の場合はそれぞれ −0.9，+2.0，+7.9，+10.2，+12.2% 大である。す

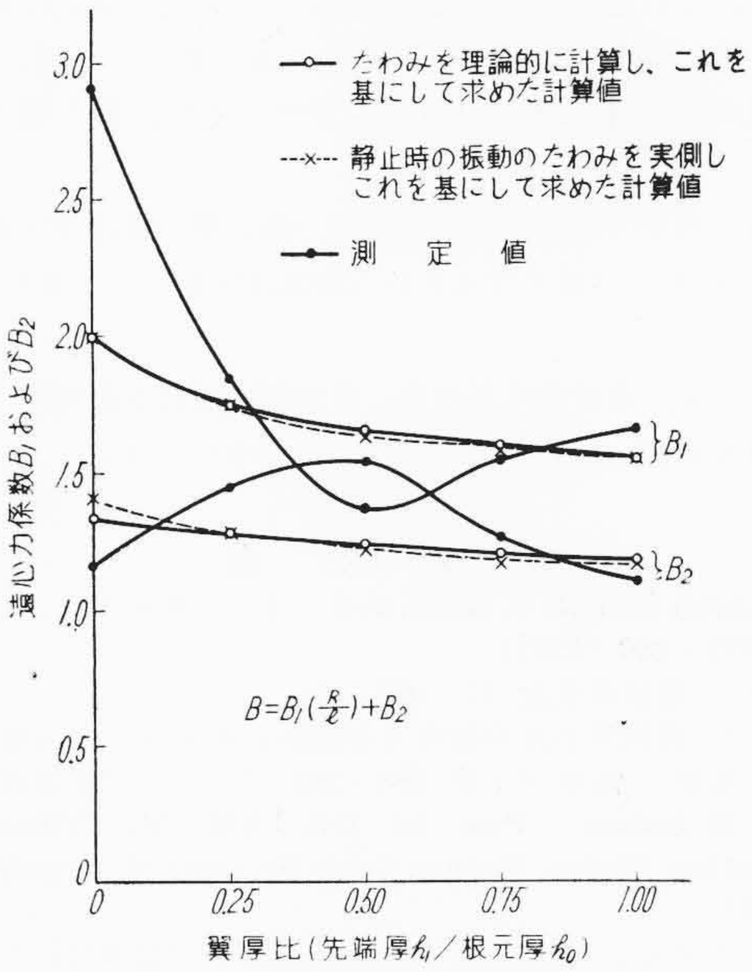
第3表(a)　固有振動数および遠心力係数の測定値　(取付角 $\theta=0$)

		翼 No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
翼寸法 (mm)		翼長 l	100					100				
		先端厚 h_1	1.2	0.9	0.6	0.3	0	1.2	0.9	0.6	0.3	0
		根元厚 h_0	1.2					1.2				
		翼幅 b	12					12				
		ボス半径 R	100					50				
		R/l	1.0					0.5				
固有振動数 (c/s)	f_0	静止	93.04	97.46	103.1	114.5	143.4	93.09	96.31	102.6	113.2	144.2
	f	1,000 rpm	97.38	101.6	107.1	118.7	147.4	96.00	99.36	106.0	116.2	147.7
		2,000 rpm	108.8	112.9	118.7	129.7	158.9	103.8	107.3	114.2	123.8	154.5
		3,000 rpm	126.1	130.2	134.3	146.8	176.5	115.5	118.9	126.4	137.0	163.8
遠心力係数 B		1,000 rpm	2.797	2.795	2.889	3.381	4.092	2.043	2.127	2.495	2.546	3.753
		2,000 rpm	2.734	2.775	2.955	3.253	4.060	1.895	1.999	2.261	2.227	2.812
		3,000 rpm	2.768	2.861	2.876	3.258	4.069	1.868	1.981	2.180	2.352	2.423
		平均	2.766	2.810	2.907	3.297	4.074	1.935	2.036	2.221	2.375	2.618

第3表(b)　固有振動数および遠心係数の測定値
翼No.11，取付角 $\theta=45°$ および 90° の場合)

		回転数 (rpm)	$R/l=1.0$		$R/l=0.5$	
			$\theta=45°$	$\theta=90°$	$\theta=45°$	$\theta=90°$
固有振動数 (c/s)	f_0	静止	92.50	93.69	92.54	93.61
	f	1,000	95.38	94.87	95.10	94.92
		2,000	104.7	103.1	101.4	98.71
遠心力係数 B		1,000	2.024	0.8232	1.684	0.8719
		2,000	2.296	1.677	1.430	0.8909
		平均	2.160	1.677	1.557	0.8814

備考：翼 No.11 の寸法は翼 No.1 または翼 No.6 と同様



第9図　B_1 および B_2 と翼厚比の関係

なわち翼厚比が 1.0～0.5 では＋8％以下で計算値と比較的よく合うが，翼厚比が 0.5～0 では 8％～22％の差を生じ一致しない。

このように，実験値が計算値に対し，翼厚比が小の場合ほど大きくなるのは，主として回転中の翼の振動形が静止時の振動形と異なるためと思われる。すなわち先薄の翼は回転時においてはフラッタのように不安定な振動現象を生じて，先端部のみ，とくにたわみやすくなり，その結果 B が増大すると想像される。

$R/l=1$ および 0.5 の場合の測定結果から，B_1 および B_2 を算出し($B=B_1(R/l)+B_2$ としてある)，**第9図**(・印実線)に示す。実験値は計算値(○印実線)に比較してかなりのばらつきを示している。この理由は主として上述の不安定な振動現象によるものと思われる。

静止時の振幅分布の測定値を(10)式で表わし，これを(4)式に適用して決定した B_1，B_2 の平均値を**第9図**(×印破線)に示す。**第9図**より，振幅分布の測定値を基にして得た B は各翼比を通じ，X に理論値(たわみの式による計算値)を与えた場合の B と比較的よく一致し，$R/l=1.0$ および 0.5 について，各翼厚比を通じ差は最大3％である。これよりくさび状翼の B を求めるには，たわみ曲線を表わす式として，$X=ax^2+bx^3+cx^4$ を用いることは実用上さしつかえないことがわかる。(10)式で実測振幅のかわりにたわみの計算値(**第2表**右の各値)を用い，(10)式の a，b，c を定め，しかるのち(4)式により B を計算した結果は，翼厚比 0.5 の場合は $B=1.657(R/l)+1.240$ となる。一方(9)式を積分して X を決定し，この X を用いて(4)式により B を求めた結果は $B=1.652(R/l)+1.232$ となり，前記の値とほぼ一致している。したがって翼断面積を簡単な x の関数とし，3点の位置の X を静止時の実測振幅または図式計算により与えることができれば，くさび状断面翼に限らず，別な変断面翼についても，比較的容易に(4)式を計算し，B を求めることができる。こころみに三角形先細翼(翼厚比＝1，翼幅比＝先端幅/根元幅＝0)の実測振幅分布 $X_{x=1}:X_{x=0.75}:X_{x=0.50}=1:0.603:0.320$ から前と同様に(10)式の各係数を求め($a=2.103$，$b=-2.189$，$c=1.086$ となる)(10)式を決定し，これを用いて(4)式より B を計算すると

$$B=1.924(R/l)+1.191$$

となり，またたわみ曲線を理論的に与えて，すなわち

$$X=\frac{2\gamma}{3Eh_0^2}\left(\frac{x^4}{4}-lx^3+\frac{3}{2}l^2x^2\right)$$

として計算すると

$$B=1.944\left(\frac{R}{l}\right)+1.194$$

となり，前記 B とほぼ一致する。

5.2　取付角 $\theta\neq0$ の場合

$\theta=45$ 度および 90度について実験値と計算値と比較すると，**第6図**よりわかるように，$R/l=1$ のとき実験値は計算値よりいずれも，それぞれ 3.2％および3.1％低目であり，$R/l=0.5$ のときは 7.2％高目および 7.4％ 低目で，計算値を上下してばらつくが，だいたい

一致しているとみてよい。したがって，均一断面翼が回転面に対し角度θをもつ場合の遠心力係数Bは$\theta=0$のときのBより$\sin^2\theta$だけ低下すること((11)式が理論上正しいこと)が実験的にも証明されたことになる。

6. 結　　言

回転面に対する取付角度0なるくさび状断面翼の遠心力係数Bに関し，Rayleigh の計算法による計算と実験を，また回転面に対する取付角度が45度および90度の場合の均一断面翼のBに関し実験し理論値と比較した。

(1)　取付角が0なる場合，Bは翼厚比(先端厚と根元厚の比)が小になると計算値，実験値ともに増す(**第5図**参照)。

(2)　翼厚比の減少に対し，Bの増す割合は実験値が計算値より大である。すなわち，R/l(ボス半径と翼長の比)=1 および 0.5 のBの実験値は，翼厚比が 1～0.5 では計算値より 0～8％高く，0.5～0 では 8～22％高くなる。(**第5図**参照)。

(3)　Bの計算で，翼のたわみ曲線を近似的に$X=ax^2+bx^3+cx^4$と仮定し，これを静止翼の実測結果から求めて計算式に採用した場合と，Rayleigh の計算法からBを正規に算出した場合とでは，各翼厚比の翼を通じ，誤差は3％以下で一致する(**第1表**(a)(b)参照)。

(4)　取付角が$\theta \neq 0$なる場合の均一断面翼のBは$\theta=0$なる場合より$\sin^2\theta$だけ低下するという理論は実験的にも正しい(**第6図**参照)。

終りにのぞみ，本研究にあたり，日立製作所日立研究所今尾部長よりご指導を賜わったことに対し厚くお礼申しあげる。

参　考　文　献

(1)　H. Lamb and R. V. Southwell: Proc Roy. Soc., London, **99**, 272～280 (1921)
(2)　小野: 機械学会誌 27, 467～479 (大 10)
(3)　渡辺: 機械学会東京臨時大会講演会前刷 7～13 (昭 25-10)
(4)　妹沢克惟: 振動学上巻 288～293 (昭 24, 岩波書店)
(5)　Yoichi Kobori: Proc. Ist JNCTAM, 547 Vibration of Rotating Blades Having Cross Sections of Several Kinds (1952)
(6)　ティモシェンコ(谷下訳): 工業振動学 322(昭27 コロナ社)
(7)　南日実: 材料強弱および弾性学 164～165 (昭 18 養賢堂)
(8)　M. J. Schilhansl: Jl, of Applied Mechanics **25**, 28～30 (1958)
(9)　W. Campbell, W. C. Heckman: General Electric Co., Reprint from A. S. M. E Paper No. 1925
(10)　鈴木: 航空学会誌 **8**, No. 75 713～722 (昭 16)

付録・遠心力係数の計算例

(1)　Xを理論的に与える場合の計算

No. 4 翼について計算する。$h_0=1.2$, $h_1=0.3$ であるから本文(5)式のmは

$$m=-\frac{h_0-h_1}{h_0 l}=-\frac{0.75}{l}$$

(9)式より

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0.9\,l^3K\left\{\frac{-x^3+4lx^2-5l^2x+2l^3}{(l-0.75x)^3}\right\}$$

ただし

$$K=\frac{2\gamma}{Eh_0{}^3l}$$

$$\frac{dX}{dx}=0.9l^3K\left\{\frac{4l^3}{81(l-0.75x)^2}-\frac{16l^2}{27(l-0.75x)}+\frac{64}{27}x+C_1\right\}$$

$x=0$ のとき $\dfrac{dX}{dx}=0$　$\therefore\ C_1=\dfrac{44}{81}l$

$$\therefore\ X=0.9l^3K\left\{\frac{16l^3}{243(l-0.75x)}+\frac{64}{81}l^2\log\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)+\frac{32}{27}x^2+\frac{44}{81}lx+c_2\right\}$$

$x=0$ のとき $X=0$　$\therefore\ C_2=\dfrac{-16l^2}{243}$

$$\therefore\ 分母=\int_0^l(1+mx)X^2\,dx=\left[\left\{-\frac{32}{3}l^5\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)^2\log\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)+\frac{32}{3}l^5\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)^2-9lx^4+\frac{21}{2}l^2x^3+12l^3x^2-\frac{484}{27}l^5\right\}\log\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)-\frac{16}{3}l^5\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)^2+\frac{1}{6{,}912}\left(\frac{-31{,}104}{l}x^6+15{,}552x^5+67{,}959lx^4+24{,}048l^2x^3-34{,}848l^3x^2-92{,}928l^4x\right)\right]_0^l=1.5053l^5$$

つぎに分子を計算する。

$$分子=\int_0^l(1+mx)(R+x)\,dx\int_0^x\left(\frac{dX}{dx}\right)^2dx=RI_1+(mR+1)I_2+mI_3$$

とおけば

$$I_1=\left[\frac{l^6}{54(l-0.75x)^2}-\frac{4l^5}{3(l-0.75x)}+\left(\frac{482}{3}l^3x-\frac{2{,}222}{9}l^4\right)\log\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)+12x^4+11lx^3+\frac{1{,}657}{32}l^2x^2-\frac{6{,}631}{36}l^3x\right]_0^l=6.3940\,l^4$$

$$I_2=\left[\left(\frac{241}{3}l^3x^2-\frac{5{,}080}{27}l^5\right)\log\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)+\frac{2l^7}{81(l-0.75x)^2}-\frac{148l^6}{81(l-0.75x)}+\frac{6{,}912}{720}x^5+\frac{5{,}940}{720}lx^4+\frac{24{,}855}{720}l^2x^3-\frac{37{,}390}{720}l^3x^2-\frac{100{,}640}{720}l^4x\right]_0^l=5.0145\,l^5$$

$$I_3=\left[\left(\frac{482}{9}l^3x^3-\frac{46{,}128}{243}l^6\right)\log\left(1-\frac{0.75}{l}x\right)+\frac{1}{77{,}760}\left\{622{,}080x^6+513{,}216lx^5+2{,}013{,}255l^2x^4-1{,}998{,}000l^3x^3-4{,}046{,}400l^4x^2-10{,}928{,}640l^5x+\frac{2{,}560l^8}{(l-0.75x)^2}-\frac{194{,}560l^7}{(l-0.75x)}\right\}\right]_0^l=4.1161\,l^6$$

$$\therefore\ 分子=2.6332\,l^4R+1.9274\,l^5$$

$$\therefore\ \boxed{B=1.749\left(\frac{R}{l}\right)+1.280}$$

(2)　Xを実測振動振幅から与える場合の計算

本文(4)式をみればわかるように断面積Aが常数かあるいはxの簡単な関数なら，(4)式の積分は比較的容易にできる。くさび状翼

は $A=A_0(1+mx)$ と表わされるので，一般式を導くことができる。(4)式で分母分子の A_0 は消去できるので，A_0 はないものとしてよい。

(a)　一般式

(4)式の分子から計算する。$X=ax^2+bx^3+cx^4$ であるから

$$\therefore\ 分子=\int_0^l\left\{R+(mR+1)x+mx^2\right\}\left\{\frac{4}{3}a^2x^3+3abx^4+\frac{1}{5}(9b^2+16ac)x^5+4bcx^6+\frac{16}{7}c^2x^7\right\}dx=RI_1+(mR+1)I_2+mI_3$$

ただし

$$I_1=\frac{1}{3}a^2l^4+\frac{3}{5}abl^5+\frac{1}{30}(9b^2+16ac)l^6+\frac{4}{7}bcl^7+\frac{2}{7}c^2l^8$$

$$I_2=\frac{4}{15}a^2l^5+\frac{1}{2}abl^6+\frac{1}{35}(9b^2+16ac)l^7+\frac{1}{2}bcl^8+\frac{16}{63}c^2l^9$$

$$I_3=\frac{2}{9}a^2l^6+\frac{3}{7}abl^7+\frac{1}{40}(9b^2+16ac)l^8+\frac{4}{9}bcl^9+\frac{8}{35}c^2l^{10}$$

つぎに分母を計算する。

$$分母=\int_0^l AX^2\,dx=\int_0^l(1+mx)(ax^2+bx^3+cx^4)^2dx=J_1+mJ_2$$

ただし

$$J_1=\frac{a^2}{5}l^5+\frac{1}{3}abl^6+\frac{1}{7}(b^2+2ac)l^7+\frac{1}{4}bcl^8+\frac{c^2}{9}l^9$$

$$J_2=\frac{a^2}{6}l^6+\frac{2}{7}abl^7+\frac{1}{8}(b^2+2ac)l^8+\frac{2}{9}bcl^9+\frac{c^2}{10}l^{10}$$

$$\therefore\ \boxed{B=\frac{RI_1+(mR+1)I_2+mI_3}{J_1+mJ_2}}$$

(b)　数値計算例

No. 7 翼について計算する。$h_0=1.2,\ h_1=0.9$ なるゆえ $m=-1/4l$ である。また**第3表**より振幅比は

$X_{x=1}:\ X_{x=0.75}:\ X_{x=0.5}=1:\ 0.678:\ 0.351$

である。この値を本文(10)式に入れると

$$\begin{cases}X_{x=1}=a+b+c=1\\ X_{x=0.75}=0.5625a+0.4219b+0.3164c=0.678\\ X_{x=0.5}=0.25a+0.125b+0.0625c=0.351\end{cases}$$

この方程式より

$$a=1.782,\quad b=-0.7273,\quad c=-0.0523$$

が求まる。したがってたわみ曲線を表わす式 X は

$$X=1.782x^2-0.7273x^3-0.0523x^4$$

となる。この係数 a，b および c の値を前記 $I_1\sim J_2$ に代入して

$$I_1=0.4219l^8$$
$$I_2=0.3122l^9$$
$$I_3=0.2495l^{10}$$
$$J_1=0.2620l^9$$
$$J_2=0.2106l^{10}$$

$$B=1.599\left(\frac{R}{l}\right)+1.193$$

特　許　と　新　案

最近登録された日立製作所の特許および実用新案　(その1)

種別	登録番号	名称	工場別	氏名	登録年月日
特許	257309	接触変流機運転自動制御装置	日立工場	吉岡孝幸	34. 12. 3
〃	257311	格子制御整流器の直流電圧調整装置	日立工場	平川克己 藤木勝美 浜島甫 斎藤奎二	〃
〃	257466	整流装置の過電流圧制装置	日立工場	石垣喜重郎	34. 12. 5
〃	257472	正負励磁用界磁調整器	日立工場	加藤春雄	〃
〃	257478	原子炉内タンク挿脱装置	日立工場	後藤二郎	〃
〃	257479	原子炉内試料送入装置	日立工場	後藤二郎	〃
〃	257480	原子炉しゃへい体	日立工場	大木新彦	〃
〃	257467	タップ切換器保護装置	国分工場	西本喜好	〃
〃	257469	交流電気機関車回路の直流遮断装置	国分工場	宮崎徳太郎 池田正一郎	〃
〃	257476	空気遮断器	国分工場	安藤卓郎	〃
〃	257481	限時動作油入制動器	国分工場	中川幸太郎	〃
〃	257761	装甲配電盤における電動機回路開閉装置	国分工場	安藤卓郎 小林吉治	34. 12. 11 〃
〃	257470	電動発電制御装置	水戸工場	一木利信 茂木正二 立川昭三	34. 12. 5
〃	257474	長大物輸送用中間台車	笠戸工場	中村陽一	〃
〃	257307	電動操作式ロータリープラグバルブ	亀有工場	寺田進	34. 12. 3
〃	257473	流体変速機の制御装置	亀有工場	渡部富治	34. 12. 5
〃	257475	逆止弁装置	亀有工場	木暮健三郎 山内章正	〃
〃	257468	時間に比例した電気的出力をうる装置	多賀工場	渡井三夫 伊藤誠二 平淳	〃
〃	257471	永久磁石着磁装置	戸塚工場	森山寛美	〃
〃	257477	継電器回路装置	戸塚工場	森山寛美 田村秋雄	〃

(次頁へ続く)

特許と新案

最近登録された日立製作所の特許および実用新案 （その2）

（前頁より続く）

種別	登録番号	名称	工場別	氏名	登録年月日
特許	257308	蛍光放電管点灯装置	中央研究所	中村純之助 三橋登	34. 12. 3
〃	257310	接触変流機保護装置	日立研究所	橋本英明	
実用新案	504108	竪軸発電機の軸受箱	日立工場	長尾善右衛門	34. 12. 15
〃	504111	原子炉燃料棒冷却調節装置	日立工場	松本政吉 吉柳清美	〃
〃	504120	電気車の接地用刷子装置	日立工場	佐々木義雄	〃
〃	504126	半導体整流器単位体	日立工場	人見男胤 中戸川武	〃
〃	504134	押ボタン開閉器	日立工場	白上義次 鈴木正明	〃
〃	504140	交流発電機の電圧調整装置	日立工場	高尾滋	〃
〃	504152	交流発電機の自動励磁調整装置	日立工場	今尾隆	〃
〃	504153	接触変流機開閉部潤滑装置	日立工場	甲賀正三 佐藤弘	〃
〃	504157	誘導同期電動機相差角調整装置	日立工場	桜井泰男	〃
〃	504161	手動開閉器と電磁接触器との電気的鎖錠装置	日立工場	松村睦夫 田所武夫	〃
〃	504114	水銀整流器運転装置	国分工場	池田正一郎	〃
〃	504115	複数機器の偏個運転を防止する切替開閉装置	国分工場	森井進 大音透	〃
〃	504116	水銀整流器運転装置	国分工場	池田正一郎	〃
〃	504119	故障選択遠方対応装置	国分工場	池田正一郎	〃
〃	504121	断路器固定接触装置	国分工場	加藤清次 羽藤昭一郎 宮崎尚文	〃
〃	504130	操作開閉器の単位スイッチ	国分工場	金井好延	〃
〃	504131	遮断器油槽昇降装置	国分工場	岸恒夫	〃
〃	504136	配電箱内相間隔壁引出装置	国分工場	中川幸太郎 野沢忠雄 滑川義三	〃
〃	504137	蓄電器油量調整装置	国分工場	斎藤亮二 宮沢寿郎	〃
〃	504138	油入蓄電器フィーデングタンク支持装置	国分工場	滑川清	〃
〃	504139	油入蓄電器端子引出装置	国分工場	斎藤亮二 山中敬二	〃
〃	504148	蓄電器の油量調整装置	国分工場	斎藤亮二	〃
〃	504163	空気遮断器	国分工場	安藤卓郎	〃
〃	504123	車載電動発電装置の電動機保護装置	水戸工場	河井貞治	34. 12. 15
〃	504124	蛍光灯負荷用車載電動発電装置	水戸工場	立川昭三 山崎佐喜之	〃
〃	504159	自動操炉装置	笠戸工場	松本憲治	〃
〃	504098	ロータリバルブ操作装置	亀有工場	木暮健三郎 山内章正 近藤澄雄	〃
〃	504112	流体接手のオイルシール検定装置	亀有工場	木暮健三郎 関英彦	〃
〃	504129	手動ゆるめ装置付油圧自動ブレーキを有する油圧制水弁	亀有工場	木暮健三郎 山内章正	〃
〃	504147	流体変速機の制御装置	亀有工場	渡部富治	〃
〃	504151	単索式バケット付クレーンにおけるバケットの開口操作装置	亀有工場	安河内春雄 松原為治	〃
〃	504155	コンベヤの中間駆動装置	亀有工場	青木勝 盛武賢	〃
〃	504160	流体変速機	亀有工場	寺本仁史	34. 12. 5
〃	504162	差圧測定装置	亀有工場	富田忠二	〃
〃	504113	分割面に油溝を設けたスラスト軸受	川崎工場	藤間平	〃
〃	504128	フライアッシュ取出装置	川崎工場	西岡富士夫 長田宏	〃
〃	504149	自動伸張覆	川崎工場	松本源次郎 佐野利夫	〃
〃	504150	往復動竪形二気筒酸素圧縮機の水切り装置	川崎工場	重松久 大谷巌	〃
〃	504099	磁気式酸素計	多賀工場	岩淵芳雄	〃
〃	504100	多点警報装置	多賀工場	河井陽一	〃
〃	504106	水位テレメーター送量装置	多賀工場	小沢重樹	〃
〃	504107	受量積算方式テレメーター	多賀工場	小沢重樹 鈴木一夫	〃
〃	504109	ホイスト用リミットスイッチ	多賀工場	後藤繁	〃

（第53頁へ続く）