

リングポテンシャルの概念と流体力学への応用

A General Idea of Ring-Potentials and Its Application to Hydraulic Engineering

栗 須 正 登*
Masato Kurisu

内 容 梗 概

工学上でのポテンシャルの応用は枚挙にいとまがない。もちろん流体力学でもこれが利用されており、未知の流れを理論的に解明している。しかしながら三次元流れを取り扱う場合は、きわめて特殊な流れについてのみ簡明な数式で示されるが、一般的には非常に複雑な関数の形をとる。筆者はたまたま既知ポテンシャルをリング状に配列することにより新しいポテンシャルが誘導され、このようにして得られたポテンシャルが、流体力学上三次元問題の解明に有力な関数であることに気付いた。

上述の手法を吹出しからの流れおよびうず運動のポテンシャルについて応用したところ、前者からは一般三次元のうず無し流れを解明できるリング吹出し系列のポテンシャル群が得られた。これらの関数は、楕円積分の形をとり数式上から等価半径を導入すれば、リング吹出しを点吹出しへ等価できる便利が生ずる。また後者からは“リングうず”のポテンシャルが求められ、これはうず理論に新分野を与えるであろうことが推測されるに至った。

1. 緒 言

三次元流れの理論的解明には従来一般に点吹出し流れ系列のポテンシャルに平行流れを組み合わせる方法が用いられており、飛行船まわりの流れ⁽¹⁾など無限大空間内に置かれた回転対称体の流れが解決されている。筆者は、このことから類推して、リング状に吹出し流れを配列しこれに平行流れを加えることにより管内流れをあらわすことを考えた。幸に数式の誘導過程においては、楕円積分の導入により点吹出しへ等価できる簡明な形となすことができ、ここに得られたリング吹出し流れのポテンシャルはよく管内流れの諸問題を解明するものであることを知った。

また、リング上でのポテンシャルの分布が一様でないものを想定すれば、これは一般三次元流れを示すポテンシャルとなる。その簡単な例として Sin または Cosin 分布のリングポテンシャルが前と類似の方法で求められた。したがって、これらを組み合わせることによりフーリエ級数分布のリングポテンシャルが作られることを意味し、一般三次元物体でもその断面がフーリエ級数に展開可能な形状であれば解明できることとなる。さらにこの理論を拡大してゆけば、点吹出しのポテンシャルばかりでなく、棒状吹出しや、ダブレット(複泉)や、さらにうず糸など一連の既知ポテンシャルについても同じ方法が適用できる。

このようにし得られる新ポテンシャルは従来解決し得なかった多くの問題に寄与するものと考えられる。筆者は、この新ポテンシャルをここではリングポテンシャル(Ring-Potential)と呼ぶことにする。この報告では、この理論の一般的概念と流体力学への応用の一端とを述べる。

2. 記 号

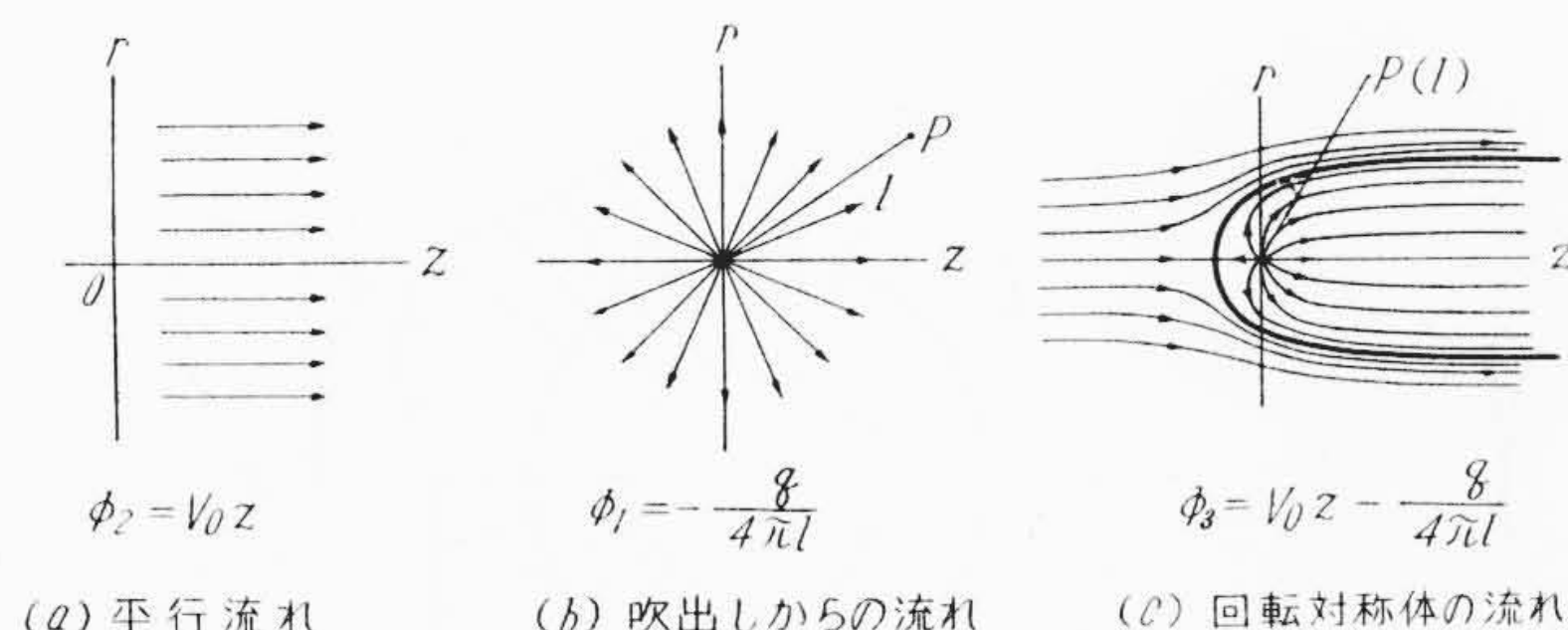
- x, y, z : 三次元直角座標
 r, θ : 原点を中心とした円柱座標
 a : リングの半径
 x', y' : 原点を中心としたリングの直角座標
 P : 空間上の任意点
 Q : リング上の任意点
 l : 原点より P 点に至る距離

- l' : P 点より Q 点に至る距離
 l_R : リング吹出しの等価半径
 q : 点およびリングの全吹出し量
 q_i : 吹出しの分布関数
 Δq_i : 任意点の微小吹出し量
 q_{1i}, q_{2i} : フーリエ係数
 u, v, w : 各軸方向の速度成分
 V : 合成速度
 V_r : 半径方向の速度成分
 V_0 : 平行流れの速さ
 V_{q0} : 全吹出し量がリング a を通過する速さ
 $W_{r=0}$: z 軸上の速さ
 W_c : 臨界速度
 $S = V_0 / V_{q0}$: 速度比
 S_c : 臨界速度比
 ϕ : 任意ポテンシャル
 $\Delta \phi_i$: リング上の任意微小ポテンシャル
 ϕ_R : リングポテンシャル
 F, E : 第 1, 2 種楕円積分記号
 k : 楕円積分の母数
 Γ : 単位幅の xy 平面内のうずの強さ
 Γ_i : うずの分布関数
 $\Delta \Gamma_i$: 任意点の微小うずの強さ
 θ_p : PQ と x 軸とのなす角
 θ_0 : PO と x 軸とのなす角
 $\theta', \theta_p', \Theta, t$: 積分の媒介変数
 α, β, γ : 積分過程の一時常数
 $\oint_a$: リング a の全周積分記号
 i, m, n : Suffix

3. 従来の三次元流れポテンシャルとの関連

三次元流れポテンシャル論の手法は、次のように二つに大別されよう。その一つは、ラプラスの方程式が線形である性質を利用したもので、既知の特別解を重畳して問題の解決を企図する方法であり、ほかは一般解を先に求めておき、この解の境界条件を物体形状に合

* 日立製作所日立研究所



第1図 平行流れと吹出しとの組合わせ

わせる手法である。軸対称の三次元流れについては、一般解⁽²⁾がベッセル関数の形で明らかなので、これを応用することにより境界の簡単な直管内流れ⁽³⁾の解明に成果が得られつつある。両手法それぞれに優劣はあろうが、後者によるときは、一般解の中に特異点も含まれる恐れがあり数式の関数論的検討が繁雑となる難点がある。前者によるときは、重ね合わせる特別解の個々について検討を行える便があるので、筆者はこれに従った。この理論に導入した第1, 2種の楕円積分は、いずれも1個性の単調関数に限定して⁽⁴⁾使用可能であり、したがって特異点が導入される心配はなくなる。またこの理論から求められる“リングうず”は円電流のポテンシャルから得られた従来の“うず環”とはその本質を異にするものである。混同される恐れがあるので特に述べておく。

4. リングポテンシャルの概念

工学上の諸問題を理論的に解明するにあたり、ポテンシャル関数の導入は、数式上の取り扱いを著しく簡略にすることは周知のとおりである。ポテンシャルは一般に、その関数が示している問題の境界条件が物理的に重ね合わせが可能であり、かつ考えている領域において不連続点を含まない場合には、微分方程式論の線形条件を満足し重畳の原理が成立するというすぐれた性質をもっている。このことは従来より周知のことではあるが、本文での説明に必要であるし、またこの概念の根底をなしているものである。流体力学の吹出し流れを一例に取り具体的に述べることにする。

流体力学では一点より無限大の空間に向って吹出す流れを考えて、これを吹出し流れ(第1図(b)参照)と呼んでいる。この流れは、吹出し点を原点に取れば(1)式で示される ϕ_1 なる形のポテンシャルで表わされる。

$$\phi_1 = -\frac{q}{4\pi l} \quad (1)$$

ただし、 q =吹出し量、 $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

また、平行流れのポテンシャルは、流れの方向に z 軸を取れば、 $\phi_2 = V_0 z$ (V_0 は平行流れの速さ、第1図(a)参照) なるポテンシャルで示されることも明らかである。この二つのいずれの流れにも渦運動を含んでおらず、したがって全領域において連続である。かつ、物理的に重ね合わせることに意味がある。この場合は前述の線形条件が満足されるので、両ポテンシャルは重畳されて新たに別のポテンシャルを形成する。すなわち

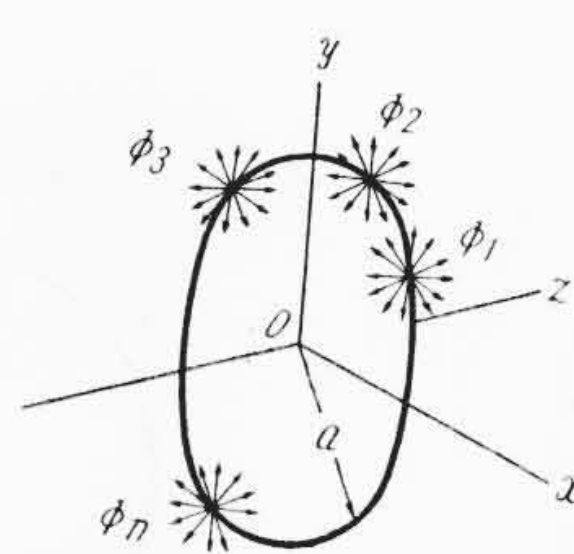
$$\phi_3 = \phi_2 + \phi_1 = V_0 z - \frac{q}{4\pi l} \quad (2)$$

となる。 ϕ_3 は無限大容器内での回転対称体の流れ(第1図(c)参照)を表わす基本のポテンシャル関数で、これが実験結果に合致する⁽¹⁾ことも確認されている。またさらに一般的に線形境界条件が満足される限り

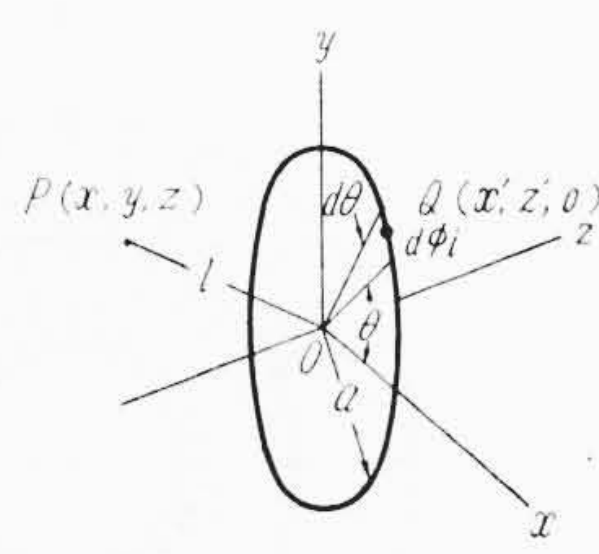
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_n \quad (3')$$

で求まるポテンシャル関数が存在することが証明される。

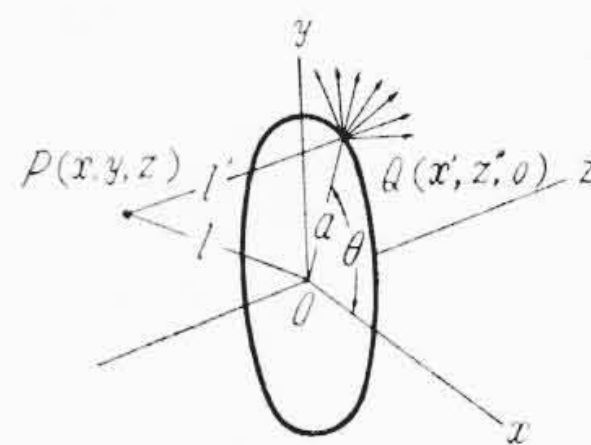
いま空間上に半径 a なるリングを考えて、この上に n 個の既知ポ



第2図



第3図



第4図

テンシャルを並べても(第2図参照) (3')式が成立することには変わりはない。このようにリング上に配列して求められた新しいポテンシャルをここではリングポテンシャルと呼ぶことにする。これを ϕ_R にて示せば

$$\phi_R = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_n \quad (3)$$

(3)式が得られる。しかし、(3)式で示されるリングポテンシャルが存在するためには、前述の線形境界条件とは別に、既知ポテンシャルで示される現象が物理的にリング状の配列が可能であるという必要条件が追加される。

リング上に並ぶポテンシャルの数を次第に増した場合その極限において無限個の既知ポテンシャルを連続的に分布させたものが想定される(第3図参照)。この場合は(3)式の n を ∞ と置いて次式をうる。

$$\phi_R = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\phi_i = \oint_a d(\phi_i) \quad (4)$$

$\Delta\phi_i$ は三次元問題を取り扱う場合、一般に x, y, z およびリング a の座標 x', y' の関数として表わされる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi_i &= \Delta\phi_i(x, y, z, x', y') \\ \text{または} \\ \Delta\phi_i &= \Delta\phi_i(x, y, z, a, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{ただし } x' = a \cos \theta, \quad y' = a \sin \theta \quad (6)$$

(5)式の関数の形が決まり、(4)式の積分が可能であれば ϕ_R が求まる。こころみに二、三の簡単な場合に適用したところ、幸にもその積分に成功した。以下これらを吹出し系列のポテンシャルおよびうず糸系列のポテンシャルとにわけて概括的に述べる。

5. リング吹出しからの流れ

5.1 リング吹出し流れ

点状の吹出し流れをリング上に連続的に分布させた場合(第4図参照)を想定すれば、このような流れはリング吹出し(リングソース)を形成する。この場合は前章のリングポテンシャルの理論がそのまま適用できて流れを解明する関数を求めることができる。

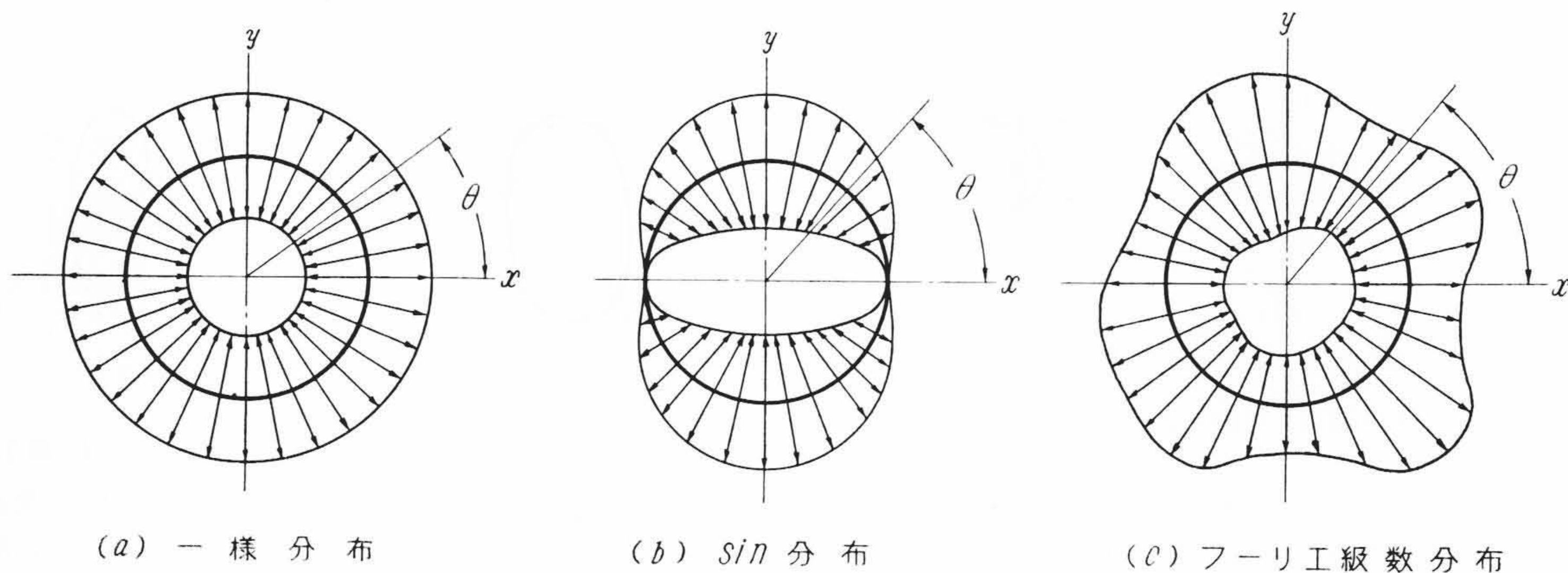
空間上の任意点 $P(x, y, z)$ とリングの任意点 $Q(x', y', 0)$ との距離を l' で表わせば、 Q 点近傍の微小吹出し Δq_i による P 点のポテンシャルは(1)式の l を l' と置いて、 $-\frac{\Delta q_i}{4\pi l'}$ で表わされる。したがって、この場合(5)式の $\Delta\phi_i$ は

$$\Delta\phi_i = -\frac{\Delta q_i}{4\pi l'} \quad (5-1)$$

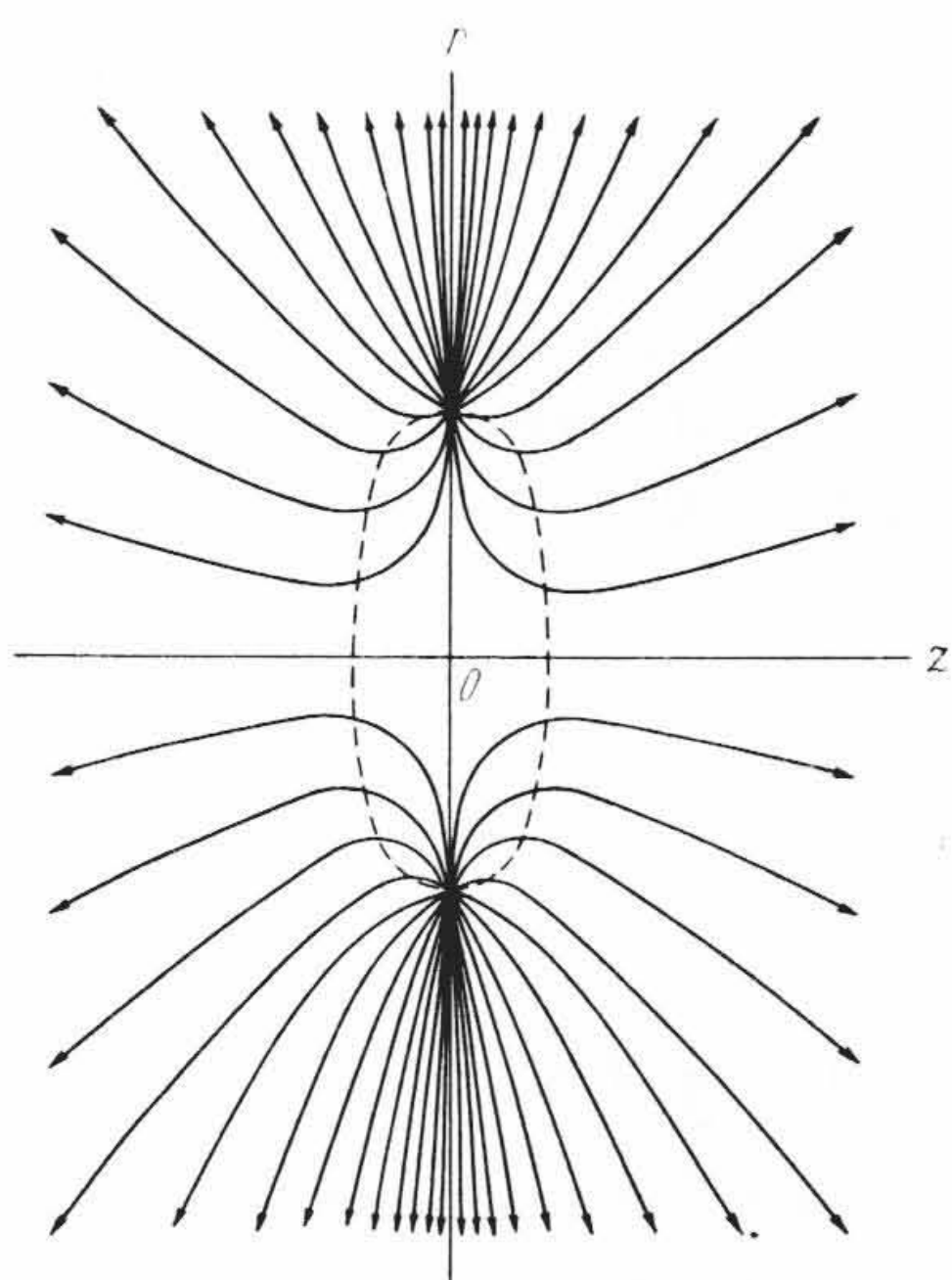
となる。これを(4)式に代入すれば次の(4-1)式が得られる。

$$\phi_R = \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta q_i}{4\pi l'} \right) = -\oint_a \frac{d(q_i)}{4\pi l'} \quad (4-1)$$

Δq_i はリング上の分布の方法によって決まる関数で、一般には



第5図 リング上の吹出し分布の3種類



第6図 リング吹出しからの流れ

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(x', y', z) \\ \text{または} \\ q_i &= q_i(a, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

で示される。(7)式で示される関数 q_i はその分布方法によっていろいろのものが考えられるが、ここでは次の基本的の三つの分布、すなわちリング上に一様分布した場合(第5図(a)参照)、Sin (または Cosin) 分布した場合(第5図(b)参照) およびフーリエ級数分布した場合(第5図(c)参照) についての説明にとどめる。

5.2 一様分布のリング吹出し

リング上の吹出し分布を一様とした場合には、分布関数を示す(7)式は

$$q_i = K \cdot \theta = \frac{q}{2\pi} \theta \dots\dots\dots (7-1)$$

ただし、 K = 常数、 q = リング上の全吹出し量となる。(7-1)式を(4-1)式に代入すれば

$$\phi_R = -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l'} \dots\dots\dots (4-2)$$

$$\text{ただし、} l' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$$

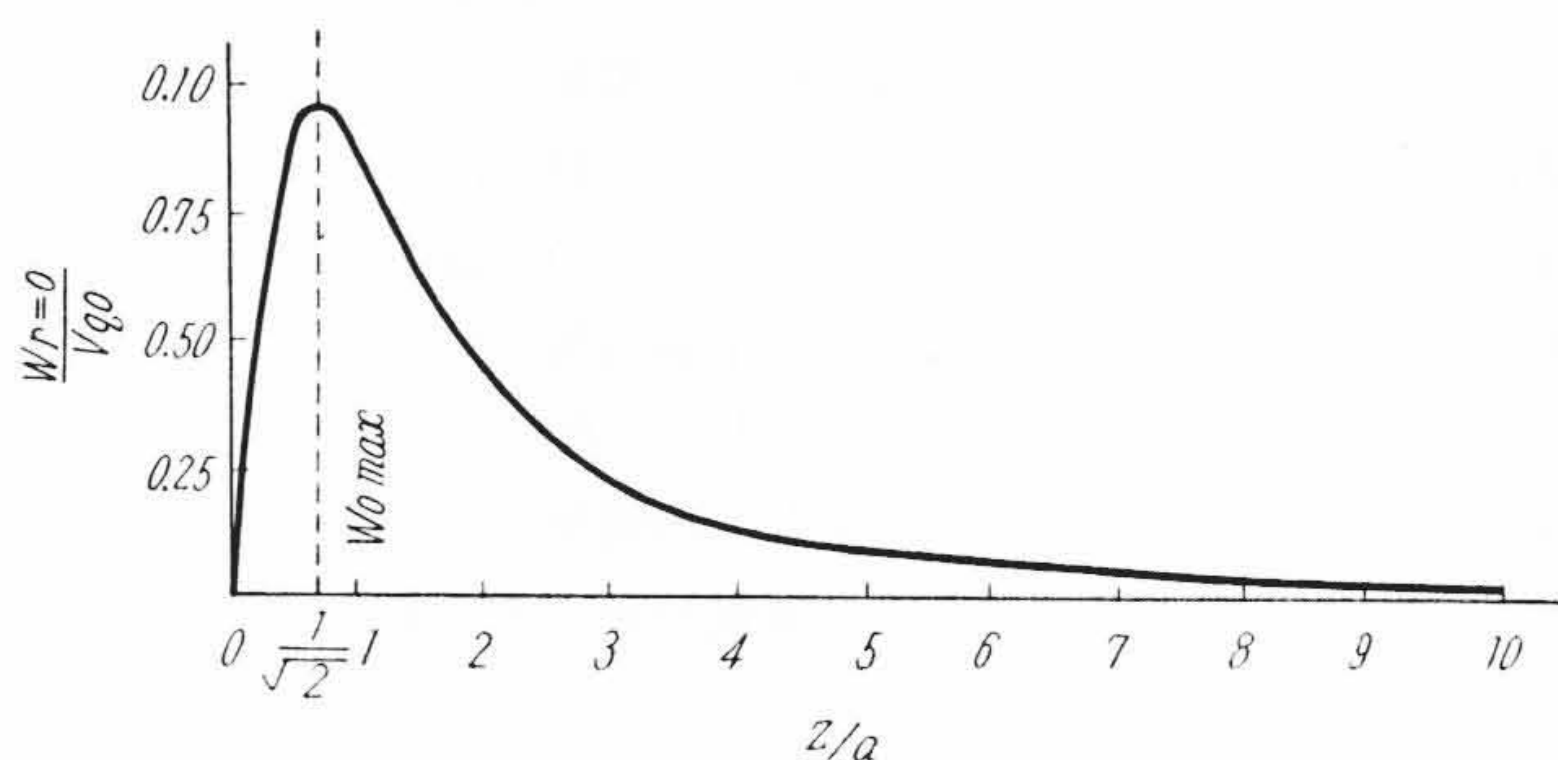
または

$$= \sqrt{r^2 + z^2 + a^2 - 2a(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

となる。上式の積分(8.1 節参照) は電磁気学^(4~6) の研究で明らかにされているが、これを流体力学で利用に便なるように書き改めれば、次の楕円積分の形をとる。

$$\phi_R = -\frac{q}{2\pi^2 l_R} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots\dots\dots (8)$$

または



第7図 z 軸上の流速の変化

$$\begin{aligned} \phi_R = & -\frac{q}{4\pi l_R} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \dots\dots\dots (8') \end{aligned}$$

または

$$\phi_R = -\frac{q}{4\pi l_R} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \times \frac{2}{\pi} \right] \dots\dots\dots (8'')$$

$$\text{ただし、} l_R = \sqrt{(r+a)^2 + z^2} \dots\dots\dots (9)$$

$$k = \sqrt{\frac{4ar}{(r+a)^2 + z^2}} \dots\dots\dots (10)$$

これが求める一様分布のリング吹出しからの流れを示すポテンシャルとなる。(8)式を変形した(8'')式と点吹出しを示す(1)式とを比較すれば、その形がよく似ていることに気付く。

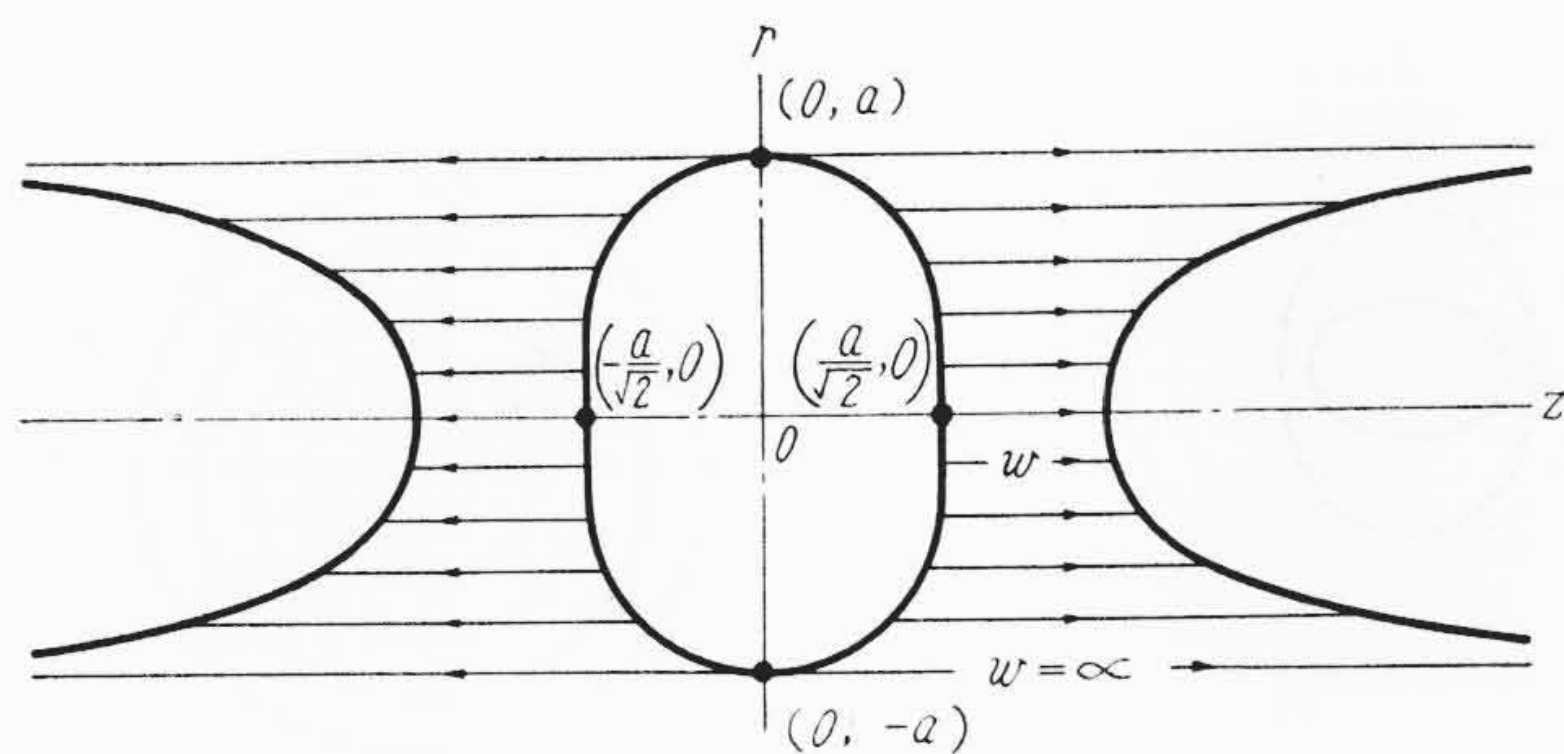
すなわち l を l_R に置き換え、かつこれに楕円積分を乗ずることにより、リング吹出しを点吹出しへ置換できることが数式上から明らかになる。ここで l_R を等価半径と呼ぶことにする。このようにすることにより、点吹出しに関して研究された従来の数式上の手法がそのままリング吹出しについても応用できてはなはだ好都合である。

次にこのポテンシャルの利用について簡単に述べよう。(8)式で求めたポテンシャル関数の偏微分を行うことにより、各軸方向の速度成分、 $u = \frac{\partial \phi_R}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \phi_R}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \phi_R}{\partial z}$ が得られることはもちろんである。数値計算の結果を概略図示すれば、第6図の如き流れとなる。これに点吹出しで行われたと同じように、平行流れのポテンシャル $V_0 z$ を加えて見よう。このときは

$$\phi_R = V_0 z - \frac{q}{2\pi^2 l_R} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots\dots\dots (11)$$

(11)式をうる。この式の流れが、どのようになるか二、三の検討を加えよう。これにはリング吹出し流れの次の重要な性質を知らねばならぬ。

第6図から明らかなように、この流れには流線に変曲点(第6図の



第8図 変曲点回転面上の流速分布

点線参照)が生ずる特長を有する。この変曲点は(8)式より

$$V_r = \frac{\partial \phi_R}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

において、半径方向の速度成分 V_r が零となる点として求まる。この点を結んだ曲面は z 軸を軸とする楕円関数の回転面で、長軸の長さは a に等しく、短軸は $a/\sqrt{2}$ となる。この曲面には数式的にいろいろと面白い性質があるが、各流線がこの面を通過するときの流速について考えてみよう。これを一般的に述べることは繁雑となるので、いま特殊の場合として $r=0$ なる流線、すなわち z 軸上での速さの変化を求めるに、これは(8)式の $r \rightarrow 0$ とおき、 z について偏微分を行えばよい。

$$w_{r=0} = \frac{\partial \phi_R}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \dots \dots \dots (13)$$

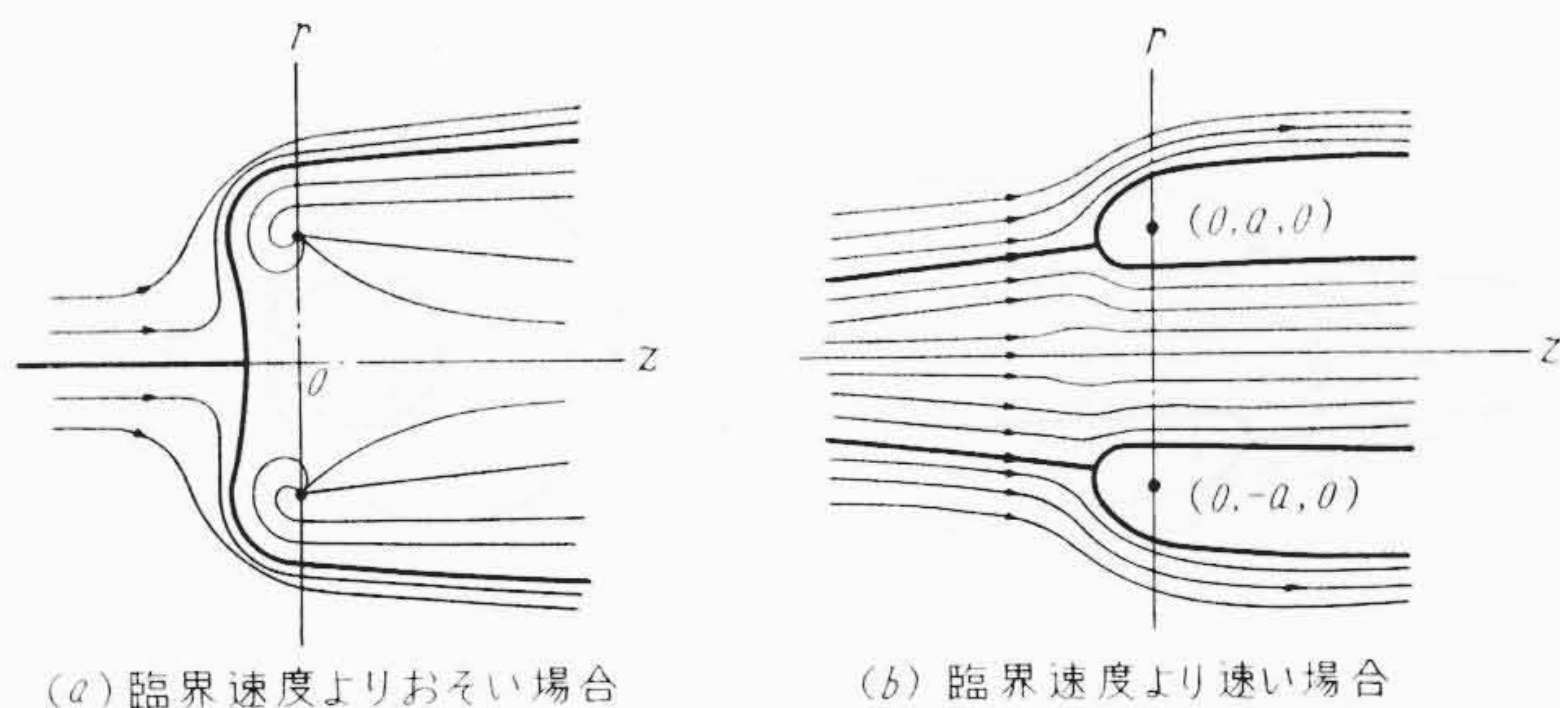
すなわち(13)式をうる。この式を使って z 軸上の流速の変化を求めたのが次の第7図である。同図より明らかなように、 $w_{r=0}$ は $a/\sqrt{2}$ なる点で最大流速 $w_{0\max}$ となり、かつこの点が変曲点回転面を通過する点となる。一般的に各流線はこの回転面を通過するとき z 軸方向の流速が最大となることがいえる。またこの曲面上では $V_r = 0$ なので、合成流速は z 軸成分と等しくなる ($V=w$)。つぎに、回転面上での流速の変化の有様を第8図に表わしたが、この図から次の重要な性質が知れる。すなわち、流線の変曲点を結んだ回転面上の流速は、 z 軸に平行でありかつその向きは外向である。また流速の絶対値は z 軸上で最小で半径の増加とともに速くなり、吹出しリング上では無限大となる。

以上の検討によってリング吹出し流線の変曲点回転面に関する特性を明らかにし得たが、これに平行流れを重ね合わせる場合、加える流速の大小によって合成流れは、その様相を異にする。この関係を知るため(11)式から z 軸上の合成流速を求めれば次式をうる。

$$w_{r=0} = V_0 - \frac{q}{4\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = V_0 - w_{r=0} \dots \dots \dots (11-1)$$

上式で求められる $w_{r=0}$ が零となる点は、 z 軸上での合成流線の分岐点となることは容易に肯定されよう。(11-1)式の第2項の $w_{r=0}$ は(13)式および第7図から明らかなように、 $z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ なる点で最大流速となる。これを $w_{0\max}$ で表わすものとすれば、 $V_0 = w_{0\max}$ なる流速を境として流れの様相を異にする。すなわち、 $V_0 < w_{0\max}$ なる範囲では、分岐点は前述の回転面外方の z 軸上にできる。この領域における合成流線の概略を第9図(a)に示した。これに反し $V_0 > w_{0\max}$ の領域に入れば、流線の分岐は z 軸上から回転面上のリング上に移って行われる。したがって平行流れはリングの内部へも流入することになる。このときの合成流線の一例を第9図(b)に示した。ここで、 $V_0 = w_{0\max}$ なる流速は合成流線が物体内部へ流入するか、そうでないかのわかれ道となる。これを臨界速度、 w_c と呼ぶことにする。特に一様分布のリング吹出しの場合には

$$w_c = w_{0\max} \dots \dots \dots (14)$$



第9図 平行流れとリング吹出し流れとの組合わせ

(14)式の関係が成立する。さらに、吹出し量と平行流れとの大小を無次元量で表示するため、次の量の定義を行う。 z 軸上での流速を表わす(13)式は次の

$$\begin{aligned} w_{r=0} &= -\frac{q}{4\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{z/a}{\{1 + (z/a)^2\}^{3/2}} \\ &= -\frac{V_{q0}}{4} \frac{z/a}{\{1 + (z/a)^2\}^{3/2}} \dots \dots \dots (13') \end{aligned}$$

(13') 式に書き換えることができ、この式に導入した $V_{q0} = q/\pi a^2$ なるものは、全吹出し量がリング a の断面を流れるものと考えたときの平均流速を示すものである。ここで定義した V_{q0} に対する平行流れとの比を $S = V_0/V_{q0}$ で示すことにする。特に、臨界速度のときの流速比を臨界流速比と呼ぶことにして、これを S_c で表わせば、 S_c には次の

$$S_c = \frac{w_c}{V_{q0}} = \frac{w_{0\max}}{V_{q0}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \dots \dots \dots (15)$$

(15)式なる関係がある。

以上で、(11)式のリングポテンシャルが表わす流れの検討を終えるが、点吹出しで用いられた同じ手法、すなわち同式の第2項以下に同じ強さのリング吹出しとリング吸込みとを加えれば、合成流線の示す物体形状が閉じることはもちろんであり、また両リングの半径を変えれば、漸縮管や拡大管流れの解明にも役だつ。さらに、棒吹出し流れのポテンシャルを加えることより、管内流れの諸問題の解決に寄与することになる。第9図(b)で解るように、この流れは中空体内の流れを示している。このことは、リングポテンシャル流れの大きな特長の一つである。従来の三次元速度ポテンシャルによっては回転体外部の流れは示しえたが、有限容器内の流れは一般に表わすことが困難であった。このような意味において、リングポテンシャルは流体工学へ空器を与えるものであるといってもよい。

5.3 Sin (または Cosin) 分布のリング吹出し

リング上の吹出しの配列を Sin (または Cosin) の分布にした場合には、分布関数の一般式はこれをフーリエ級数に応用するに便利なる形として、

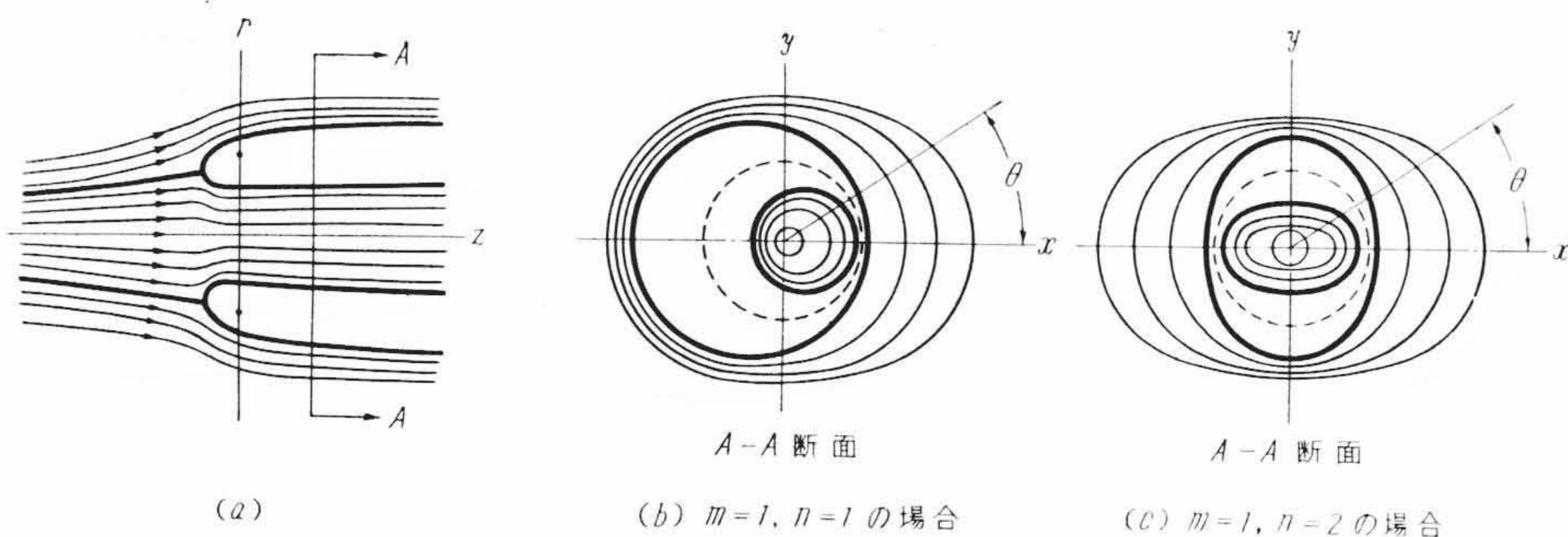
$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{q}{2\pi} \{ \theta - (\sin n\theta)^m \} \\ q_i &= \frac{q}{2\pi} \{ \theta - (\cos n\theta)^m \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7-2)$$

ただし、 $n=1, 2, 3, \dots$, $m=1, 2, 3, \dots$

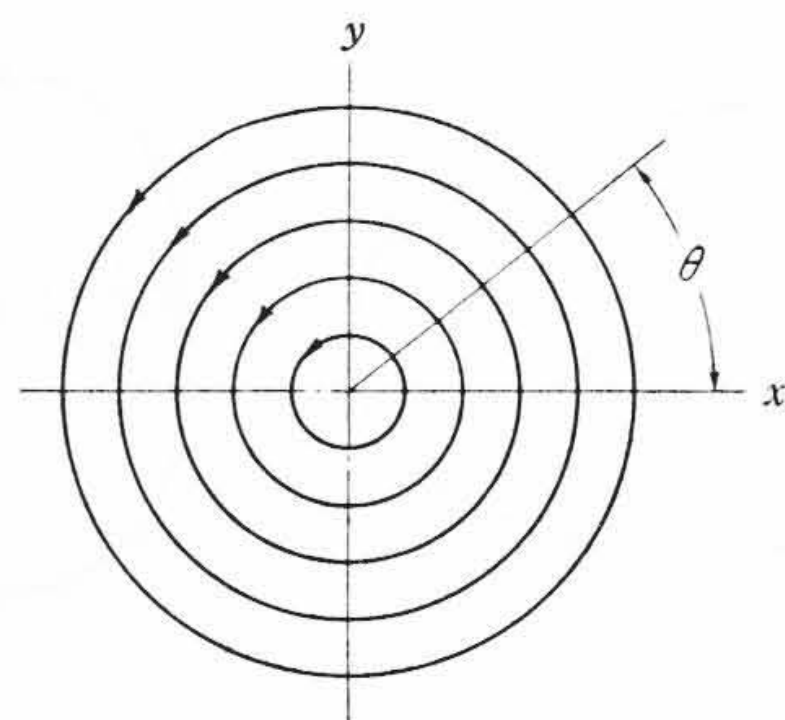
(7-2)式で表わすことができる。この式のべき指数 m を大きくとれば、勾配の急なる分布が得られる。(第5図(b)参照)いま、簡単な例として ($m=1$, $n=1$) とすれば

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{q}{2\pi} (\theta - \sin \theta) \\ q_i &= \frac{q}{2\pi} (\theta - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7-2-1)$$

となる。これを(4-1)式に代入すれば



第 10 図 平行流れと Sin 分布リング吹出しとの組合わせ



第 11 図 うず糸の流れ

$$\left. \begin{aligned} \phi_R &= -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos \theta)}{l'} d\theta \\ \phi_R &= -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(1+\sin \theta)}{l'} d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-3)$$

となる。これらの積分(8.2 節参照)を行えば、求めるポテンシャルが得られる。この場合も積分の結果は楕円積分の形をとる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_R &= \frac{-q}{2\pi^2 l_R} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{x}{r} \left\{ \frac{2}{k^2} \left(F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right\} \right] \\ &\quad \text{(ただし Sin 分布の場合)} \\ \phi_R &= \frac{-q}{2\pi^2 l_R} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{y}{r} \left\{ \frac{2}{k^2} \left(F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right\} \right] \\ &\quad \text{(ただし Cosin 分布の場合)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(16)式が $m=1, n=1$ とした場合の Sin (または Cosin) 分布のリング吹出しからの流れを示すポテンシャルである。これに臨界速度より速い平行流れのポテンシャルを加えた場合には、第 10 図 (b) のように偏心中空体の流れをうる。また、 $m=1, n=2$ において得られるポテンシャルは同図 (c) のような楕円中空体の流れを示すことになる。

第 10 図より明らかなように、ここに得られた流れは三次元非対称体であることが注目される。完全な理論式としてこれを表示し得たことは三次元非対称流れ解明への足がかりを与えたことになる。

5.4 フーリエ級数分布のリング吹出し

一般に周期性のある物体の断面形状はフーリエ級数で表示できる。前節により、Sin および Cosin 分布のリング吹出し流れのポテンシャルが求められた。したがって、フーリエ級数分布のリング吹出しからの流れも求めることができる。

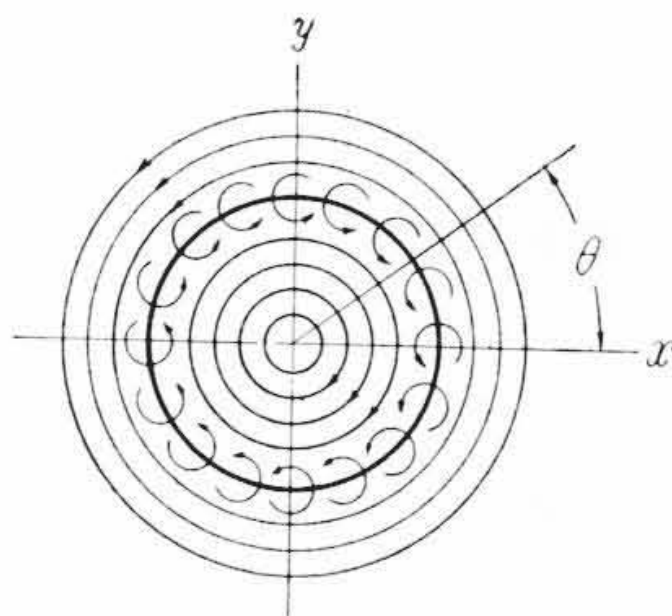
この場合 (7) 式の分布関数 $q_i(\theta)$ は、

$$q_i(\theta) = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{i=1}^n (q_{1i} \cos i\theta + q_{2i} \sin i\theta) \dots\dots\dots (7-3)$$

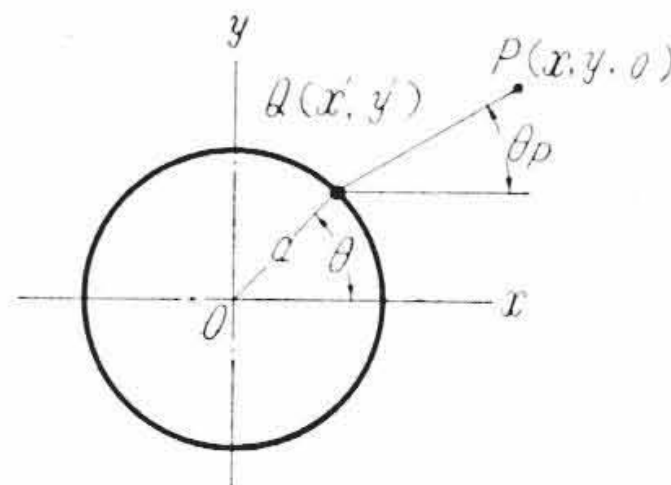
ただし、

$$\left. \begin{aligned} q_{1i} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_i(\theta) \cos i\theta d\theta \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots) \\ q_{2i} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_i(\theta) \sin i\theta d\theta \quad (i=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(7-3)式で示される。したがって、断面の形が決まれば(17)式で示されるフーリエ係数 q_{1i} および q_{2i} が求まる。これらは複雑ではあるが、Sin と Cosin との級数の組合わせであるため、(7-2)式より(4-3)式を経て(16)式を誘導するため前節で用いたと類似の手法を



第 12 図 リングうずの流れ



第 13 図

繰返し行うことにより積分が可能である。これと平行流れとを組合せることにより任意形状の中空断面(第 5 図(c)参照)の流れが求まる。たとえば、一様分布のリング吹出しの後方に短形断面フーリエ級数分布のリング吸い込みを組合わせれば、円管より短形断面への流れの変化が求まる。また両リングの中心位置をずらしてリング軸の交角を変えることにより水車吸出管のごとき、三次元一般弯曲流れへの解明にも役だつ。もちろん実物形状に合わせるには、これら両リングの中間に補助のリング吹出しや吸い込みが必要であろう。

6. リングうずの流れ

三次元流れの既知ポテンシャルには、前章で用いた吹出し流れ系列とは別にうず糸のポテンシャルがある。これにこの理論を応用してみよう。

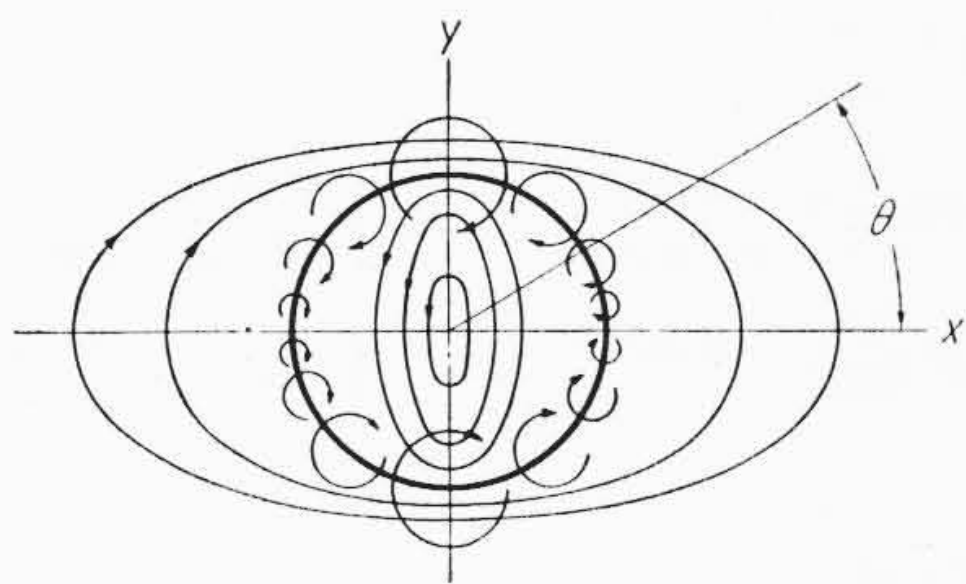
無限大空間において、一軸の周りに自由うず運動を行っている流れは、うず糸と呼ばれている。この流れは回転軸を z 軸にとって示せば(第 11 図参照)、

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \dots\dots\dots (18)$$

(18)式なるポテンシャルの形をとる。ここに Γ は単位幅の xy 平面内におけるうずの強さ、 θ は z 軸を通る任意の一平面と x 軸とのなす角 ($0 < \theta < 2\pi$) である。この流れは、任意の xy 平面についてまったく同じ運動を行っているもので、本質的には二次元問題として重要な意味をもつ。しかしながら、流体力学で利用されている三次元ポテンシャルとして既知のものは、大別すれば前述の吹出し流れ系列のものを除き、残りはこの種類だけである。

このうず糸を一つのリング状 (二次元で考えれば、リング状であり、三次元を考えればシリンダ状となる) に並べた場合、これからの流れは第 12 図のように想定される。リング上に任意点 $Q(x', y')$ 、第 13 図参照)を考え、この近傍の微小うず $\Delta\Gamma_i$ による空間上の任意点 $P(x, y, z)$ のポテンシャルは、 θ_p (第 13 図、 PQ と zx 平面とのなす角度) で表わされる。したがって、(5)式の $\Delta\phi_i$ は(18)式を考えて

$$\Delta\phi_i = \frac{\Delta\Gamma_i}{2\pi} \theta_p \dots\dots\dots (5-2)$$



第14図 Sin分布のリングうず

となる。

分布を一様とした場合の微小うずは

$$\Delta\Gamma_i = \frac{\Gamma}{2\pi} \Delta\theta \quad (7-3)$$

上式で与えられる。これら2式より、リングうずのポテンシャルは

$$\phi_R = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \oint_a \theta_p d\theta \quad (4-4)$$

で求まる。上式の積分を行えば(8.3節参照)

$$\phi_R = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \left[2\pi \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{\pi^2}{2} \frac{(r+3a)}{(r+a)} - \pi \left(\tan^{-1} \frac{a}{r} - \tan^{-1} \frac{r+a}{r-a} \right) - \frac{4(r-a)}{(r+a)} \left(\tan^{-1} \frac{r+a}{r-a} \right)^2 \right] \quad (19)$$

(19)式をうる。これが求めるリングうずのポテンシャルであり、第2項を除きほかは双曲線関数の形をとっている。上式は第12図が示すように有限円筒内のうず運動を与えるものである。水車、ポンプ、蒸気タービンなどの流体機械の大多数は有限筒内を回転しており、この式を基本として作られるポテンシャルで解明される問題が多いであろう。

リング吹出しで考えたと同じように、一様分布でないリングうずも考えられる。これについての数式的な説明は省略するが、Sin分布のリングうずは第14図のように想定される。同図よりわかるように、この流れは楕円通路のサーキュレーションを示すことが注目される。この性質はうず理論への将来の利用が期待されよう。

7. この理論の応用面と将来の問題点

以上のべたように、既知ポテンシャルを一つのリング状に配列することにより得られるリングポテンシャルのうち、吹出し系列のポテンシャルは回転対称体ばかりでなく一般三次元うず無し流れを解明する有力な関数になることを知った。またうず糸のポテンシャルから得られたリングうずの流れは、うず理論に有限の境界を与える意味で従来のうずと異なる。さらに、このうずでは円形でないサーキュレーションを作りうる特長を有し、この方面への新分野の開拓が期待される。

また数式上の手段として、ここでは楕円積分を用いることにより、リングポテンシャルの積分を手軽にした。楕円積分によって、リングの周りの楕円流れが表わされることは興味深いことである。三次元問題の解法として、ポテンシャル配列の通路をここではリングに選んだが、これを球面にとることも意味があり、数式的にも簡明になれば将来球ポテンシャル(仮称)も考えられて有力な関数となり得よう。この場合前のことから類推して、ルジャンドルの球関数が数式上の有力な武器となることが推測される。

ポテンシャルの理論は、流体力学のみならず、一般力学や、熱力学および電気工学などに広く利用されているものである。したがって、ここでの手法で得られる新ポテンシャルは、それぞれの分野について別の物理的現象を表わし、かつそれらを理論的に解明するであろうことが容易に類推されるところである。

8. 数式の誘導

前章までは、数式の誘導は繁雑をさけて省略したが、ここではこれらをまとめて述べる。

8.1 リング吹出し流れのポテンシャルの誘導

$$\phi_R = -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{l'} \quad (4-2) \text{再出}$$

$$= -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2+z^2+a^2-2a(x\cos\theta+y\sin\theta)}}$$

上式の積分を、 $P(x, y, z)$ 点について求めるときは、 x, y, z を常数と考えてよい。したがって

$$\alpha = r^2+z^2+a^2, \quad \beta = 2ax, \quad \gamma = 2ay \quad (20)$$

とおける。

$$= -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - \beta \cos\theta - \gamma \sin\theta}}$$

ここで、平面三角法の関係から

$$\delta = 2ar, \quad \Theta = \tan^{-1} \frac{\gamma}{\beta} = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \theta' = \theta - \Theta \quad (21)$$

なる関係を代入すれば

$$= -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha - \delta \cos(\theta - \Theta)}} = -\frac{q}{8\pi^2} \int_{\Theta}^{2\pi+\Theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha - \delta \cos\theta'}}$$

被積分が π を周期とする関数であることからして

$$\int_{\Theta}^{2\pi+\Theta} = \int_0^{2\pi} \quad (22)$$

となることは明らかで、かつ偶関数であることを考えて

$$= -\frac{q}{8\pi^2} 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha - \delta \cos\theta'}} \\ = -\frac{q}{4\pi^2 \sqrt{\alpha + \delta}} \int_0^{\pi} \frac{2 d\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta'}{2}}}$$

となる。ここで、 $\frac{\theta'}{2} = \frac{\pi}{2} - t$ なる変数置換により

$$= -\frac{q}{2\pi^2 \sqrt{\alpha + \delta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

をうる。これに(9)および(10)式の関係を用いれば(8)式の形をとる。また、楕円積分の母数 k が1より小なることは容易に証明できる。すなわち

$$k^2 = \frac{4ar}{(r+a)^2+z^2} < 1 \quad (23)$$

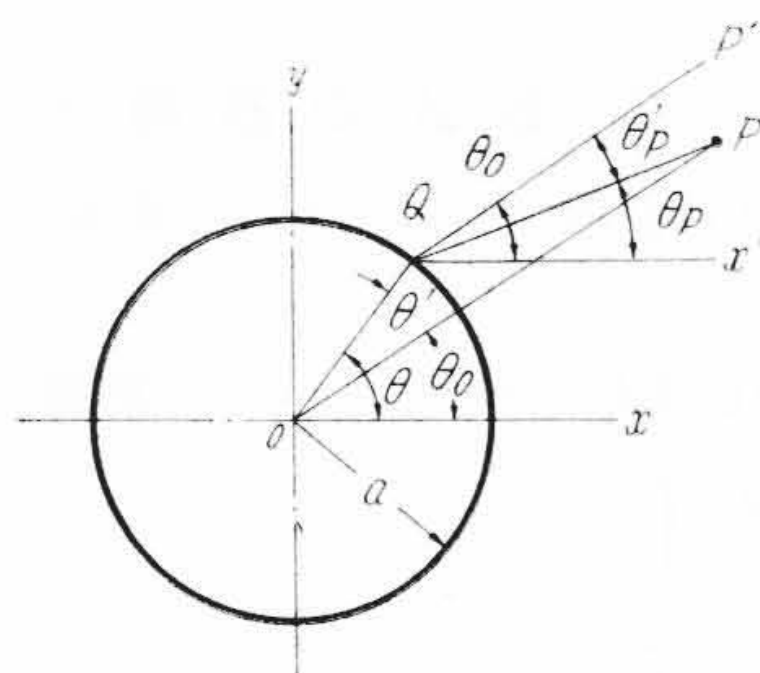
なんとならば、 $(r+a)^2+z^2-4ar = (r-a)^2+z^2 > 0$ である。これより、 $\alpha = \delta$ すなわち $r=a$ はリング上を示すことが明らかで、上式は、吹出しリング上を除き積分が可能であることを意味する。

8.2 Sin分布のリング吹出し流れポテンシャルの誘導

$$\phi_R = -\frac{q}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos\theta)}{l'} d\theta \quad (4-3) \text{再出}$$

上式の第1項は(4-2)式と同形であり、したがって第2項のみを求めればよい。これには、(20)および(21)式の関係を用いれば

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{l'} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\alpha - \delta \cos(\theta - \Theta)}} \\ = \int_{\Theta}^{2\pi+\Theta} \frac{\cos(\theta' + \Theta) d\theta'}{\sqrt{\alpha - \delta \cos\theta'}} = \frac{\beta}{\delta} \int_{\Theta}^{2\pi+\Theta} \frac{\cos\theta' d\theta'}{\sqrt{\alpha - \delta \cos\theta'}} \\ - \frac{\gamma}{\delta} \int_{\Theta}^{2\pi+\Theta} \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{\alpha - \delta \cos\theta'}}$$



第 15 図

となる。上式の第 2 項は奇関数であるため零となる。また第 1 項に (22) 式の関係を利用すれば

$$= -\frac{\beta}{\delta} \int_0^{2\pi} \frac{(2 \cos^2 \frac{\theta'}{2} - 1) d\theta'}{\sqrt{\alpha + \delta - 2\delta \cos^2 \frac{\theta'}{2}}} = -\frac{\beta}{\delta \sqrt{\alpha + \delta}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(2 \cos^2 \frac{\theta'}{2} - 1) d\theta'}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta'}{2}}}$$

となる。ここで、 $\frac{\theta'}{2} = \frac{\pi}{2} - t$ なる置換を行い、かつ被積分が偶関数である性質を利用すれば

$$= -\frac{\beta}{\delta \sqrt{\alpha + \delta}} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 t - 1) dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

$$= -\frac{4\beta}{\delta \sqrt{\alpha + \delta}} \frac{1}{k^2} \left[(2 - k^2) F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - 2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right]$$

上式と (8) 式を (4-3) 式に代入して整理すれば (16) 式をうる。

8.3 リングうずのポテンシャルの誘導

$$\phi_R = -\frac{\Gamma}{4\pi^2} \oint_a \theta_p d\theta \dots\dots\dots (4-4)$$

第 15 図のように、座標をとって表わすものとする。すなわち、空間上の任意点を $P(x, y)$ とし、リング上の任意点を $Q(x', y')$ または a, θ とする。また Q を通り、 x 軸および OP の平行線をそれぞれ Qx' および QP' で表わすものとすれば、 $\theta, \theta_0 (< POx)$, $\theta' (< QOP)$ および $\theta_p (< PQx')$, $\theta_p' (< P'QP)$ との間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \theta' \\ \theta_p &= \theta_0 - \theta_p' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

この関係を用いれば、(4-4) 式は

$$\phi_R = -\frac{\Gamma}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} (\theta_0 - \theta_p') d\theta' = -\frac{\Gamma}{4\pi^2} \left[\int_0^{2\pi} \theta_0 d\theta' - \int_0^{2\pi} \theta_p' d\theta' \right] = -\frac{\Gamma}{4\pi^2} \left[2\pi\theta_0 - \int_0^{2\pi} \theta_p' d\theta' \right] \dots\dots\dots (4-4')$$

ここで、 θ_p' には次の関係式が成立する。

$$\theta_p' = \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式を (4-4') 式に代入し、 Q 点は OP 軸についての対称点のあることを考慮すれば

$$\int_0^{2\pi} \theta_p' d\theta' = 2 \int_0^{\pi} \theta_p' d\theta'$$

ここで被積分関数の物理的意味より

$$= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} d\theta' + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} d\theta' \right] \dots\dots\dots (26)$$

となる。(26) 式の不定積分を部分積分法により求めれば

$$\int \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} d\theta'$$

$$= \theta' \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} - \frac{1}{2} \int \frac{\theta' (ar \cos \theta' - a^2) d\theta'}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta'}$$

$$= \theta' \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} + \frac{1}{2} \int \theta' d\theta' - \frac{r^2 - a^2}{2}$$

$$\int \frac{\theta' d\theta'}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta'}$$

$$= \theta' \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} + \frac{\theta'^2}{4} - \frac{r^2 - a^2}{2} \left[\left\{ \theta' \frac{2}{r^2 - a^2} \right. \right.$$

$$\left. \tan^{-1} \left(\frac{r+a}{r-a} \tan \frac{\theta'}{2} \right) \right\} - \frac{2}{r^2 - a^2} \int \tan^{-1} \left(\frac{r+a}{r-a} \tan \frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \right]$$

$$= \theta' \tan^{-1} \frac{a \sin \theta'}{r - a \cos \theta'} + \frac{\theta'^2}{4} - \theta' \tan^{-1} \left(\frac{r+a}{r-a} \tan \frac{\theta'}{2} \right)$$

$$+ \frac{r-a}{r+a} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{r+a}{r-a} \tan \frac{\theta'}{2} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (27)$$

となる。(27) 式を (26) 式に代入し、さらに (4-4') 式の関係を用いれば (19) 式をうる。

9. 結 言

吹出し流れの既知ポテンシャルを一つのリング状に配列して得られるリングポテンシャルなる新ポテンシャルは管内流れの諸問題に解決を与えるものであることを知った。この概念をさらに拡大することにより、回転対称体の流ればかりでなく、一般三次元問題やうず理論へも新分野がひらけることを知った。このような手法により、現在までに明らかになし得たことは、

(i) 吹出し流れ系列の既知ポテンシャルをリング状に配列することにより、楕円積分で表わされるリングポテンシャル群が得られる。配列の方法を変えれば、多数の関数が得られるが、これらの例として、一様分布、Sin または Cosin 分布およびフーリエ級数分布のリングポテンシャルを求めることができた。これらは一般三次元のうず無し流れの解明に有力な関数である。

(ii) 吹出し系列のリングポテンシャルは、数式上から等価半径なるものが導入される。これを用いれば、リング吹出しが点吹出しと同じように利用されて、従来点吹出しに関して研究された手法がそのまま適用できることとなった。

(iii) リング吹出しとこれに重畳する平行流れの流速との間には、臨界速度比があり平行流れがこれより速いときには、合成流線は中空体流れを形成するが、おそいときには中空体流れとはならない。

(iv) うず糸のポテンシャルより、リングうずのポテンシャルが得られる。これはうず理論に円筒周縁を与える意味で従来のうずポテンシャルとは異なった用途がひらける。また、リング上の分布の強さを変えることにより、真円でなくうず運動が想定されるに至った。

終りにのぞみ、この概念をまとめるについて、この研究の端緒を与えて下され、かつご懇切なる指導を賜った日立製作所日立研究所山崎部長に厚く感謝の意を表する次第である。また図面そのほかで福沢君の労をわずらわしたところがはなはだ多い。ここに記して謝辞に代える。

参 考 文 献

- (1) 藤本：応用流体力学
- (2) Lamb H: Hydrodynamics, 6th Ed.
- (3) Philip Levine: J. Aero Sciences, Vol. 25, Jan. 1958, p. 356
- (4) 竹内：楕円関数論
- (5) 竹内：関数論(下)
- (6) 安宅：高等関数