

# 確率対応法の効率について

## On the Efficiency of the Method of Random Combination of Fractional Factorial Designs

山 川 典 宏\*  
Norihiro Yamakawa

### 内 容 梗 概

この報告は田口玄一氏によって提案されたいわゆる確率対応法の効率に対する理論的検討を主題としている。理論的検討は2水準系の直交配列の対応計画における第1段の検定の効率に及ぼす第2の要因効果群の影響について行われた。確率対応法において、計画行列は二つの直交配列に分解される。本論文では、この各々を第1直交配列および第2直交配列と称し、第1直交配列にわりつけられた要因群を第1要因群、また第2直交配列にわりつけられた要因群を第2要因群と、それぞれ称呼することとした。その結果、第1要因群の検定における検出力に対する第2要因群の影響は、実験の回数を30以上とし、さらに自由度をある程度以上大きくすれば、問題にならなくなるほど小さくなることを確めた。

以上の計算結果に基づいて、確率対応法は工場における諸実験、特に未知の多要因を考慮しなければならない開発段階の諸実験に有用であることを明らかにした。

### 1. 緒 言

実験計画の従来の方法では、実験の全変動の自由度以上の自由度を有する要因効果を推定することは不可能である。しかしながら、田口玄一氏<sup>(1)</sup>による確率対応法の顕著な特長の一つは、このことを可能にすることである、といわれている。しかし、この意見に対する合理的な証明を確立することは今日なお残されている。竹内啓氏<sup>(2)</sup>は、この問題に対して、実験データの解析における逐次修正の効率について理論的検討を加えた。

筆者は、未修正データによる有意差検定の際の検出力関数を通常の実験のそれと比較することが、この確率対応法の性能を論じ、かつ、実際統計応用家に対する勧告を与えるのに本質的なポイントであると考へた。

### 2. 問題の数学的表現

$q$  個の未知パラメータ  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{q-1}$  および  $\beta_q$  を含む線形回帰模型を考えよう。すなわち

$$\varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^p \beta_i x_i + \sum_{k=p+1}^q \beta_k x_k \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $x_1, x_2, \dots, x_{q-1}$  および  $x_q$  は指定変数である。

$q \times N$  計画行列を  $D$  とすれば

$$D = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots\dots\dots & x_{q1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots\dots\dots & x_{q2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{1\alpha} & x_{2\alpha} & \dots\dots\dots & x_{q\alpha} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots\dots\dots & x_{qN} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

である。点  $x_\alpha = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \dots, x_{q\alpha})$  における観測値  $y_\alpha$  は

$$y_\alpha = \sum_{i=1}^p \beta_i x_{i\alpha} + \sum_{k=p+1}^q \beta_k x_{k\alpha} + z_\alpha \dots\dots\dots (3)$$

となる。

ここで、 $\{z_\alpha\} (\alpha=1, 2, \dots, N)$  は、共通の未知母分散  $\sigma^2$  を有する正規分布  $N(0, \sigma^2)$  から独立に抽出された標本とする。

さて、(1)式に示された模型が完全には規定されない状態での実験者の立場<sup>(3)</sup>に注目しよう。さらに彼の対象の世界の収率関数が次式で表わされると仮定している立場を考えよう。

$$\varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^p \beta_i x_i \dots\dots\dots (4)$$

すなわち、 $p < q$  なる一定の数  $p$  個の未知パラメータ  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$  および  $\beta_p$  のみを考えている立場である。

この状態のもとで、彼は  $\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \dots = \beta_q = 0$  という仮定をたて、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$  および  $\beta_p$  の最小自乗推定を得ようとすることができる。

最小自乗推定の通常の手続により、正規方程式

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} b_j = B_i, (i=1, 2, \dots, p) \dots\dots\dots (5)$$

をうる。ここで

$$a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} x_{j\alpha}, (i, j=1, 2, \dots, p) \dots\dots\dots (6)$$

$$B_i = \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} y_\alpha, (i=1, 2, \dots, p) \dots\dots\dots (7)$$

である。ここで  $\{a_{ij}\}$  は  $i, j=1, 2, \dots, p$  に対してだけでなく、 $i, j=1, 2, \dots, q$  に対しても定義され得る点に注意すべきである。 $(a_{ij}) (i, j=1, 2, \dots, p)$  なる  $p \times p$  行列の階数は  $p$  に等しく、また  $p \times p$  逆行列は  $(c_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$  によって表わされることにしよう。

もし、 $\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \dots = \beta_q = 0$  が仮定されうるとすれば、単一の  $i (1 \leq i \leq p)$  に対して、帰無仮説  $H_0: \beta_i = 0$  の検定を

$$F = (N-p) b_i^2 / [c_{ii} \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \sum_{i=1}^p b_i x_{i\alpha})^2] \dots\dots\dots (8)$$

で定義される統計量  $F$  によって行うことができる。その場合、 $F$  は帰無仮説のもとで、自由度対  $[\nu_1, \nu_2]$  をもつ  $F$  分布に厳密に従って分布する。

しかしながら、われわれの現実の立場は、 $\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \dots = \beta_q = 0$  を十分に確実に仮定しえない状態であって、それでもなおかつ上述の統計量  $F$  に訴えて検定しようとする立場なのである。この手続は、 $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{q-1}$  および  $\beta_q$  が十分に小さいときのみ合法的である。したがって、 $\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \dots = \beta_{q-1} = \beta_q = 0$  という仮定から離れることによる検出力に対する影響を定量的に計算しなければならない。

### 3. $\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \dots = \beta_q \neq 0$ の場合の統計量 $F$ の分布関数

そこで、 $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{q-1}$  および  $\beta_q$  がかならずしも0で

\* 日立製作所笠戸工場

ない一般的な模型について計算を進めよう。この条件のもとで北川教授<sup>(4)</sup>は、

$$b_i = \beta_i + \sum_{k=p+1}^q \beta_k \Delta_{ik} + \sum_{j=1}^p c_{ij} \sum_{\alpha=1}^N x_{j\alpha} z_\alpha \dots\dots\dots (9)$$

および

$$\sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \sum_{i=1}^p \beta_i x_{i\alpha})^2 = \sum_{\alpha=1}^N (H_\alpha + z_\alpha)^2 - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p c_{ij} (\eta_i + L_i) (\eta_j + L_j) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p c_{ij} L_i L_j \dots\dots\dots (10)$$

を示した。

ここで

$$\Delta_{ik} \equiv \sum_{j=1}^p c_{ij} a_{jk} \dots\dots\dots (11.1)$$

$$A_{k\alpha} \equiv x_{k\alpha} - \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} x_{i\alpha} \dots\dots\dots (11.2)$$

$$H_\alpha \equiv \sum_{k=p+1}^q \beta_k A_{k\alpha} \dots\dots\dots (11.3)$$

$$L_i \equiv \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} H_\alpha \dots\dots\dots (11.4)$$

$$\eta_i \equiv \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} z_\alpha \dots\dots\dots (11.5)$$

これらの式から

$$K_1^2 = b_i^2 / (c_{ii} \sigma^2) \dots\dots\dots (12)$$

および

$$K_2^2 = \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \sum_{i=1}^p \beta_i x_{i\alpha})^2 / \sigma^2 \dots\dots\dots (13)$$

の両統計量は、それぞれ自由度  $\nu_1 = 1$  および  $\nu_2 = N - p \equiv \nu$ 、非心率

$$\lambda_1 = [E(K_1^2) - \nu_1] / 2 \dots\dots\dots (14)$$

および

$$\lambda_2 = [E(K_2^2) - \nu_2] / 2 \dots\dots\dots (15)$$

をもつ非心カイ自乗分布に従うことがわかる。

さらに、 $K_1^2$  と  $K_2^2$  とは通常の場合と同じく、互に独立に分布するので、これらの2つのカイ自乗の比は

$$F(y) = \int_0^y f(y) dy = \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \left( e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^c}{c!} \right) \left( e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^g}{g!} \right) I_y \left( \frac{\nu_1 + c}{2}, \frac{\nu_2 + g}{2} \right) \dots\dots\dots (16)$$

なる分布関数に従う。

ここで

$$y = \frac{K_1^2 / K_2^2}{1 + (K_1^2 / K_2^2)} \dots\dots\dots (17)$$

また、 $I_y(p, q)$  は不完全ベータ関数比

$$I_y(p, q) = B_x(p, q) / B(p, q) \dots\dots\dots (18.1)$$

$$B_x(p, q) = \int_0^x x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \dots\dots\dots (18.2)$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \dots\dots\dots (18.3)$$

を示す。そして(14)および(15)両式から

$$\lambda_{1i} = (\beta_i + \sum_{k=p+1}^q \beta_k \Delta_{ik})^2 / (c_{ii} \sigma^2) \dots\dots\dots (19)$$

および

$$\lambda_2 = \sum_{\alpha=1}^N H_\alpha^2 / 2 \sigma^2 \dots\dots\dots (20)$$

をうる。ここで直交配列の場合の

$$L_i = \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} H_\alpha = 0 \dots\dots\dots (21)$$

なる結果を用いた。

#### 4. 検出力関数

##### 4.1 確率対応法における $\lambda_{1i}$ および $\lambda_2$ の期待値

まず統計量  $b_i$  および  $e_\alpha$  の構造を考えよう。

ない一般的な模型について計算を進めよう。

この条件のもとで北川教授<sup>(4)</sup>は、

$$b_i = \beta_i + \sum_{k=p+1}^q \sum_{j=1}^p c_{ij} a_{jk} \beta_k + \sum_{j=1}^p c_{ij} \sum_{\alpha=1}^N x_{j\alpha} z_\alpha \dots\dots\dots (22)$$

$$e_\alpha = \sum_{k=p+1}^q \beta_k (x_{k\alpha} - \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} x_{i\alpha}) + z_\alpha - \sum_{i=1}^p x_{i\alpha} \sum_{j=1}^p c_{ij} \sum_{\alpha=1}^N x_{j\alpha} z_\alpha \dots\dots\dots (23)$$

これらの式における一つの確率変数は  $z_\alpha$  であり、これは平均値0、分散  $\sigma^2$  をもつ正規分布に従うと仮定した。ここでさらに、確率対応法の特質として  $x_{k\alpha}$  ( $k=p+1, p+2, \dots, q$ ) が次のような性質の確率変数である点に注目しよう。以後、 $x_{k\alpha}$  を指定変数である  $x_{i\alpha}$  ( $1 \leq i \leq p$ ) と区別するために  $\dot{x}_{k\alpha}$  とする。

そこで、計画行列  $D$  が

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1\alpha} & x_{2\alpha} & \dots & x_{p\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{pN} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

および

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{p+1,1} & \dot{x}_{p+2,1} & \dots & \dot{x}_{q1} \\ \dot{x}_{p+1,2} & \dot{x}_{p+2,2} & \dots & \dot{x}_{q2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{p+1,\alpha} & \dot{x}_{p+2,\alpha} & \dots & \dot{x}_{q\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{p+1,N} & \dot{x}_{p+2,N} & \dots & \dot{x}_{qN} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

なる2つの小行列からなるものと仮定し、さらに  $H^{(1)}$  および  $H^{(2)}$  は大きさ  $N$  および水準数2の直交配列から  $p$  列および  $q-p$  列をそれぞれ取出した直交行列であると仮定しよう。ここで、 $\{x_{i\alpha}\}$  および  $\{\dot{x}_{k\alpha}\}$  の要素は  $\pm 1$  となるものと仮定すると、直交配列の特質から、

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= N; & c_{ij} &= 1/N, & (i=j) \\ a_{ij} &= 0; & c_{ij} &= 0, & (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

を得る。

確率対応法の特質として、 $H^{(1)}$  の各行の固定された順序に対応する  $H^{(2)}$  の各行の順序は、次のような確率化の操作によって決定される。すなわち、可能な  $N!$  個 ( $H^{(1)}$  の各行の順序の可能な総数) の順列の中から1つの順列を等確率的に抽出する操作 (対応の確率化にほかならない) によって決定される。

これによって、 $\dot{x}_{k\alpha}$  は  $P_r(\dot{x}_{k\alpha} = \pm 1) = 1/2$  および  $P_r(\dot{x}_{k\alpha} = -1, \dot{x}_{k,\alpha+1} = -1) = (1/2) \{[(N/2) - 1] / (N-1)\}$  なる性質を有する確率変数となる。これから、

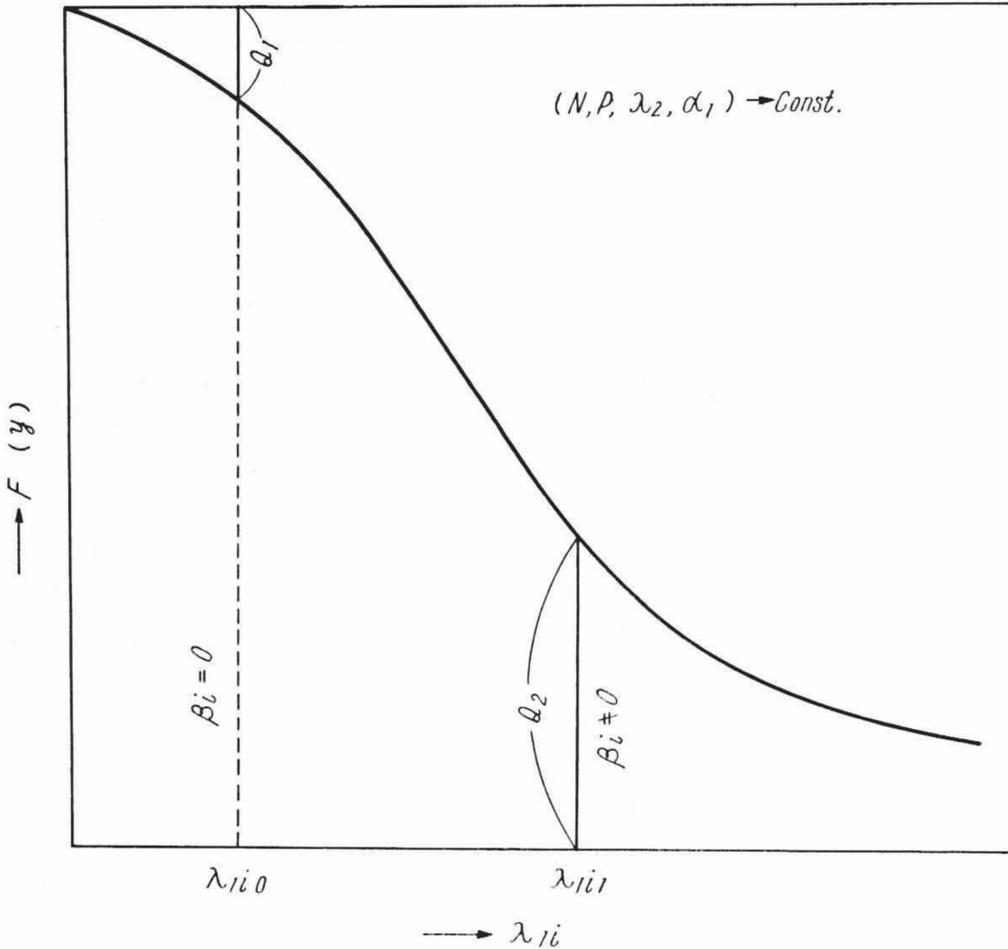
$$\xi(\dot{x}_{k\alpha}) = (-1) \frac{1}{2} + (+1) \frac{1}{2} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$\xi(\dot{x}_{k\alpha}^2) = (-1)^2 \frac{1}{2} + (+1)^2 \frac{1}{2} = 1 \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} \xi(\dot{x}_{k\alpha} \dot{x}_{l\beta}) &= (-1) \frac{N}{N-1} + (+1) \frac{N-1}{N-1} \\ &= \frac{-1}{N-1}, & (\alpha \neq \beta) \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\xi(\dot{x}_{k\alpha} \dot{x}_{l\beta}) = (-1) \frac{1}{2} + (+1) \frac{1}{2} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

$$(k \neq l; k, l = p+1, \dots, q)$$



第1図 過誤の確率の説明図

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_{1i}) &= N \xi(\beta_i + \sum_{k=p+1}^q \beta_k \Delta_{ik})^2 / 2 \sigma^2 \\ &= N \xi\{\beta_i^2 + 2 \beta_i \sum_k \beta_k \Delta_{ik} + (\sum_k \beta_k \Delta_{ik})^2\} / (2 \sigma^2)^{-1} \\ &= \left[ N \beta_i^2 + \sum_k \beta_k^2 \left(1 + \frac{1}{N-1}\right) \right] / 2 \sigma^2 \dots\dots (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_2) &= \sum_{\alpha=1}^N \xi(H_{\alpha}^2) / 2 \sigma^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \xi\left\{ \left[ \sum_k \beta_k (\dot{x}_{k\alpha} - \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} x_{i\alpha}) \right]^2 \right\} / 2 \sigma^2 \\ &= \left( N - p - \frac{p}{N-1} \left( \sum_k \beta_k^2 / 2 \sigma^2 \right) \right) \dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここで

$$\xi(\Delta_{ik}) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} \xi(\dot{x}_{k\alpha}) = 0 \dots\dots (33)$$

$$\xi(\Delta_{ik}^2) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N(N-1)} \dots\dots (34)$$

$$\xi(\Delta_{ik} \Delta_{il}) = \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N x_{i\alpha} x_{i\beta} \xi(\dot{x}_{k\alpha} \dot{x}_{l\beta}) = 0 \dots (35)$$

という結果を使った(付録I参照)。

4.2 確率対応法の検出力関数

確率対応法の性能を議論するとき、 $\{\dot{x}_{k\alpha}\}$ によって変動する非心率  $\lambda_{1i}$  および  $\lambda_2$  をもつ分布関数について計算したのでは不相当であって、むしろ  $\lambda_{1i}$  および  $\lambda_2$  の期待値を有する分布関数によって、 $\beta_{p+1} = \beta_p \dots = \beta_q$  が必ずしも0でないという一般的な模型のもとでの平均化された視野について、検討することがより合理的であると考えられる。

すなわち、この非心分布関数によって次のような値を求めよう。

(i) 帰無仮説  $H_0: \beta_i = 0$  が正しいときに、この仮説を棄却する確率.....(第1種の過誤)

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv 1 - \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \left( e^{-\lambda_{10}} \frac{\lambda_{10}^c}{c!} \right) \left( e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^g}{g!} \right) \\ &I_{\nu_2}(\alpha_1) \left( \frac{1}{2} + c, \frac{\nu_2}{2} + g \right) \dots\dots (36) \end{aligned}$$

(ii) 対立仮説  $H_1: \beta_i \neq 0$  が正しいときに、帰無仮説  $H_0$  を採択する確率.....(第2種の過誤)

$$\begin{aligned} Q_2 &\equiv \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \left( e^{-\lambda_{11}} \frac{\lambda_{11}^c}{c!} \right) \left( e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^g}{g!} \right) \\ &I_{\nu_2}(\alpha_1) \left( \frac{1}{2} + c, \frac{\nu_2}{2} + g \right) \dots\dots (37) \end{aligned}$$

ここで、 $\nu$  が1より十分に大きいとき

$$\lambda_{10} \equiv \xi(\lambda_{1i0}) = \frac{\gamma_1}{2} \dots\dots (38.1)$$

$$\lambda_2 \equiv \xi(\lambda_2) = \frac{\nu_2}{2} \gamma_1 \dots\dots (38.2)$$

$$\lambda_{11} \equiv \xi(\lambda_{1i1}) = (\gamma_1 + N \gamma_2) / 2 \dots\dots (38.3)$$

$$y(\alpha_1) = F^{\nu_2}(\alpha_1) / [ \nu_2 + F^{\nu_2}(\alpha_1) ] \dots\dots (38.4)$$

$$\gamma_1 = \sum_{k=p+1}^q \beta_k^2 / \sigma^2 \dots\dots (38.5)$$

$$\gamma_2 = \beta_i^2 / \sigma^2 \dots\dots (38.6)$$

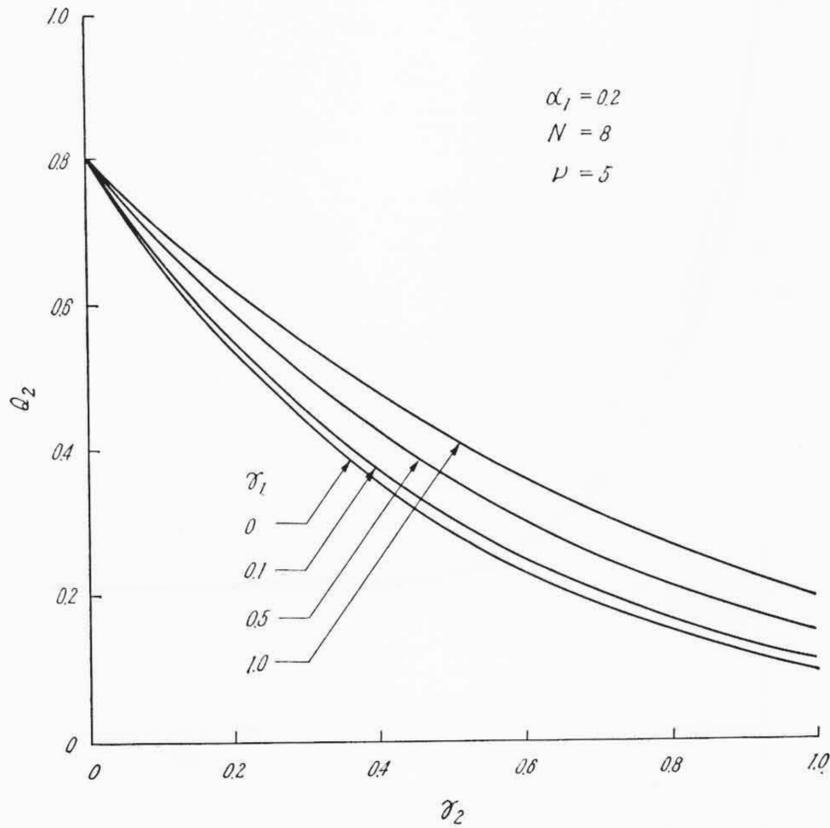
をうる。

したがって、確率対応法では、計画から計画へと変動している確率変数  $\dot{x}_{k\alpha}$  を含んでいるので、非心率  $\lambda_{1i}$  および  $\lambda_2$  は確率変数である。

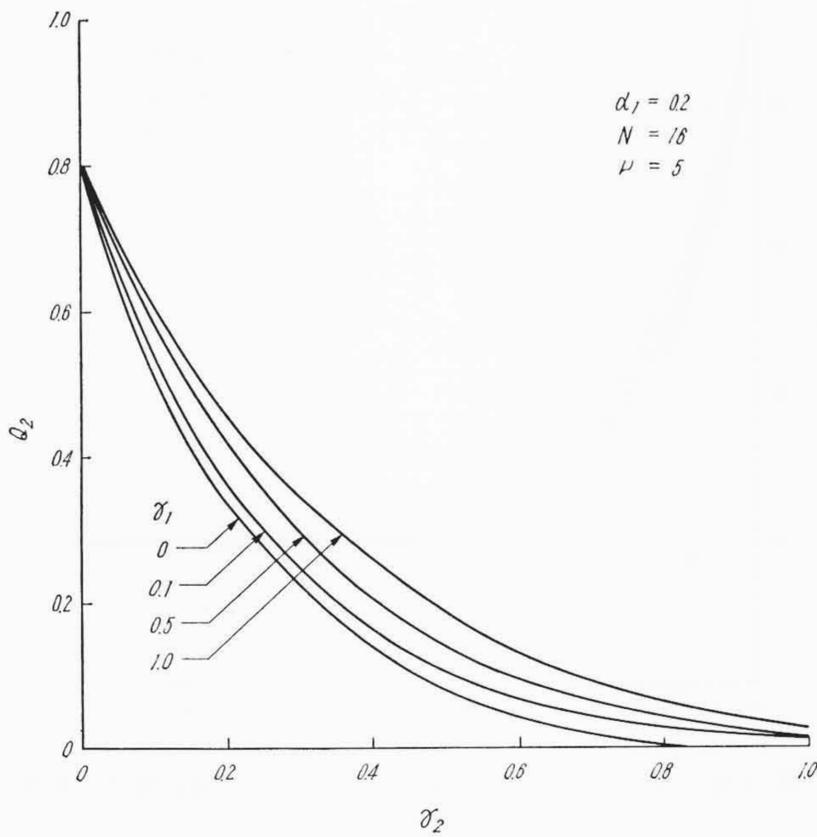
(19), (20) および (27), (28), (29), (30) の6式から次のように  $\lambda$  の期待値をうる事ができる(付録II, III参照)。

を用いることができる。これらの2種類の過誤は、 $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{q-1}$  および  $\beta_q$  の値によって変動する  $\lambda_{10}, \lambda_{11}$  および  $\lambda_2$  の値によって決定される不完全規定の模型によっては握できる。これらを第1図に示す。

数値計算<sup>(6)(7)</sup>の結果を第2~12図に示し、次のような観察を得る。



第3図  $N=8, \nu=5$  の実験における  $Q_2$  に対する  $\gamma_1, \gamma_2$  の影響

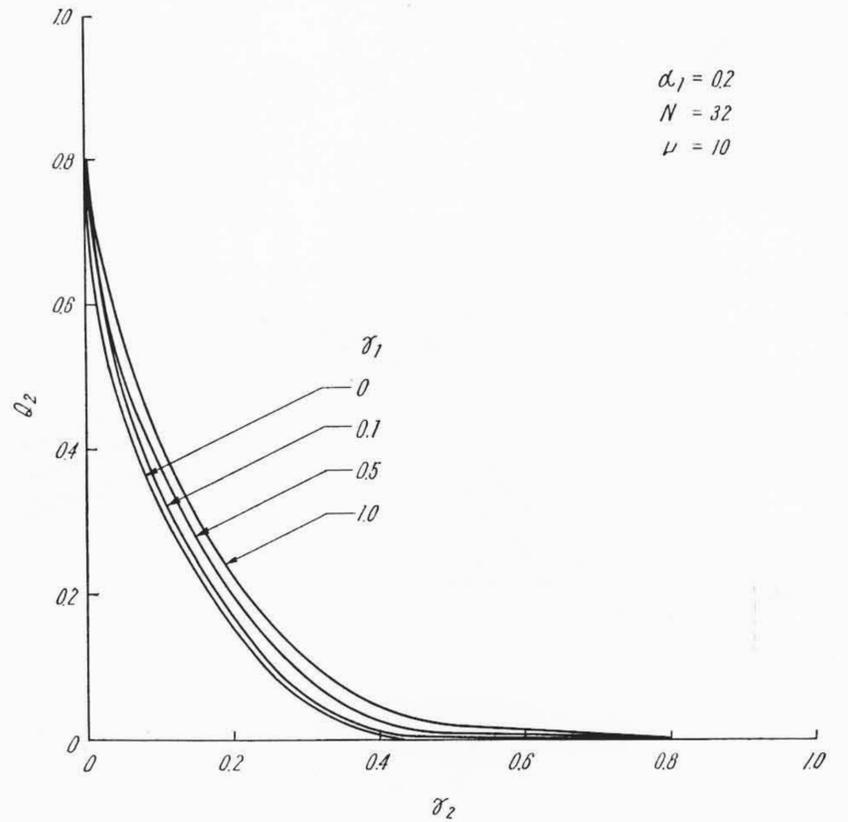


第4図  $N=16, \nu=5$  の実験における  $Q_2$  に対する  $\gamma_1, \gamma_2$  の影響

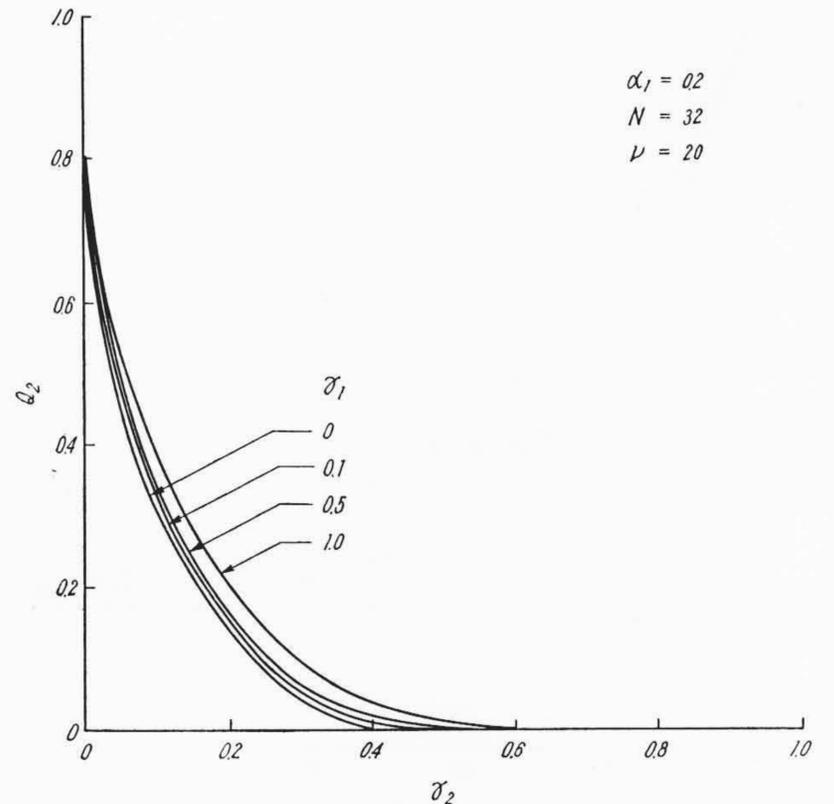
第2図は、 $N=32, \nu=10$  および  $\gamma_1=0.1$  の組合せに対する  $\gamma_2$  をパラメータとする  $\alpha_1$  の関数としての  $Q_1, Q_2$  および  $Q=Q_1+Q_2$  のグラフを示す。このグラフから、 $Q$  を最小にする  $\alpha_1$  を最適とする基準を採択した場合に、 $\alpha_1 \geq 0.1$  が通常の  $\alpha_1=0.05$  または  $0.01$  の値よりもよいことがわかる。もちろん、 $Q$  を最小とする  $\alpha_1$  の最適点は  $\gamma_2$  によって変動している。

上述の不完全規定の模型から、 $Q_1$  と  $Q_2$  とは未知母数  $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{q-1}$  および  $\beta_q$  の値によって影響されているという特質があるので、 $Q_1$  を通常のように、たとえば、 $0.05$  に固定化しておくことは、この環境のもとでは不適當であるから、ここでは  $Q=Q_1+Q_2$  を最小にする  $\alpha_1$  の値を最適点として採択するという基準を用いるのである。

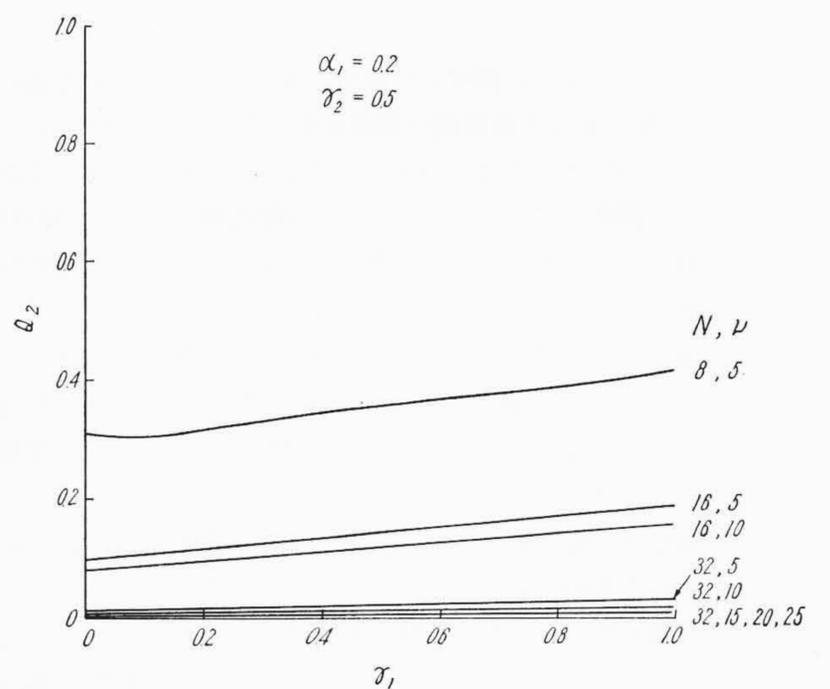
第3~6図では、 $N$  および  $\nu$  の一定の組合せに対する、 $\alpha_1=0.2$  のときの  $\gamma_1$  をパラメータにもつ、 $\gamma_2$  の関数としての  $Q_2$  のグラフ



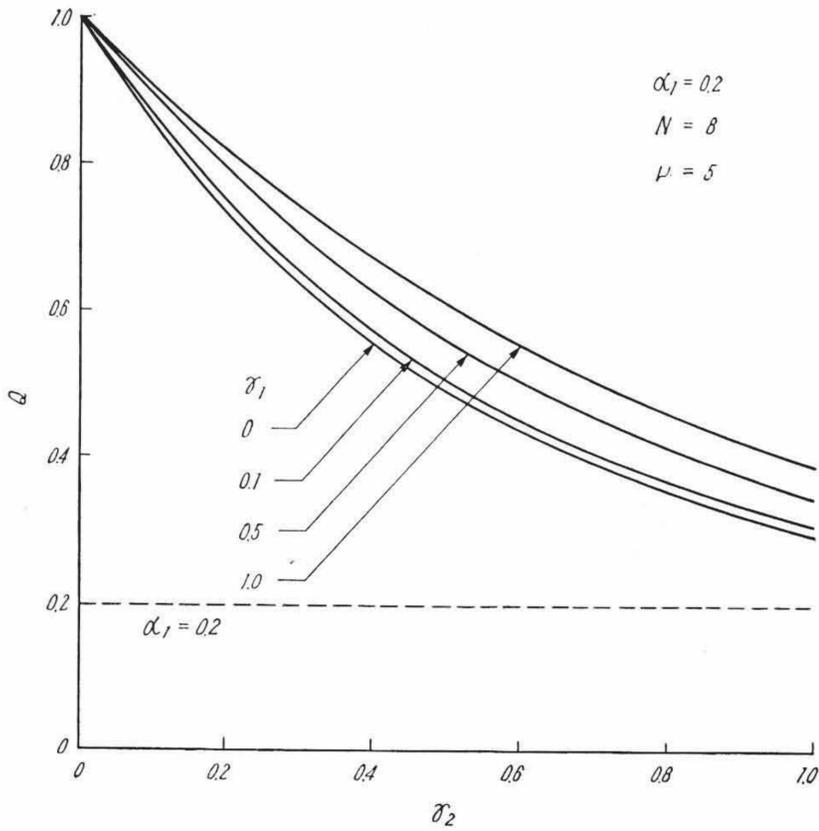
第5図  $N=32, \nu=10$  の実験における  $Q_2$  に対する  $\gamma_1, \gamma_2$  の影響



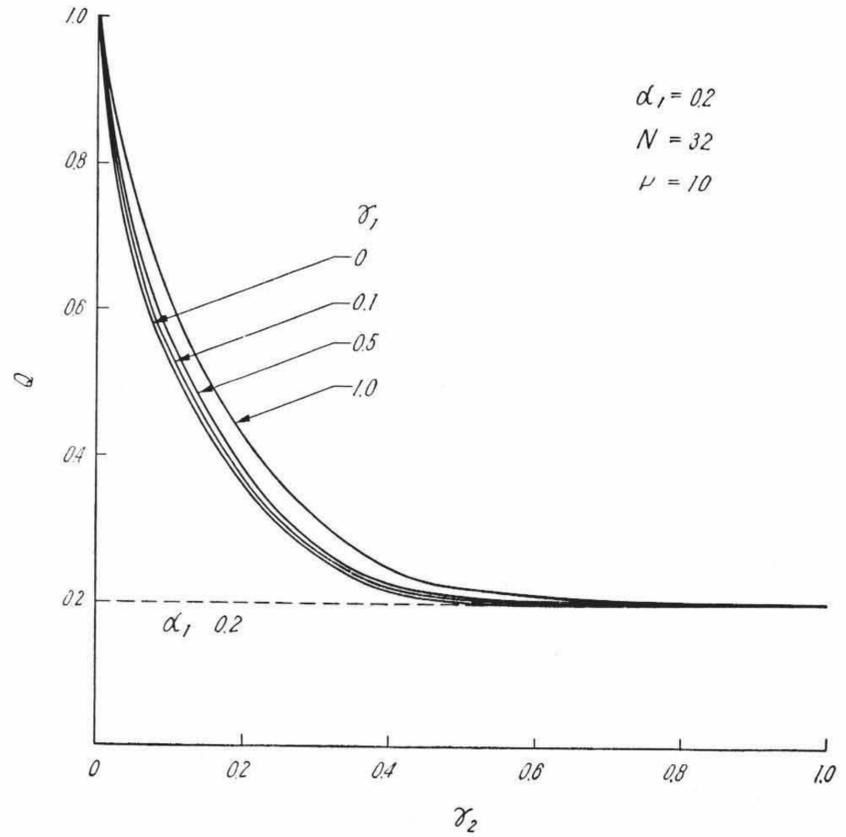
第6図  $N=32, \nu=20$  の実験における  $Q_2$  に対する  $\gamma_1, \gamma_2$  の影響



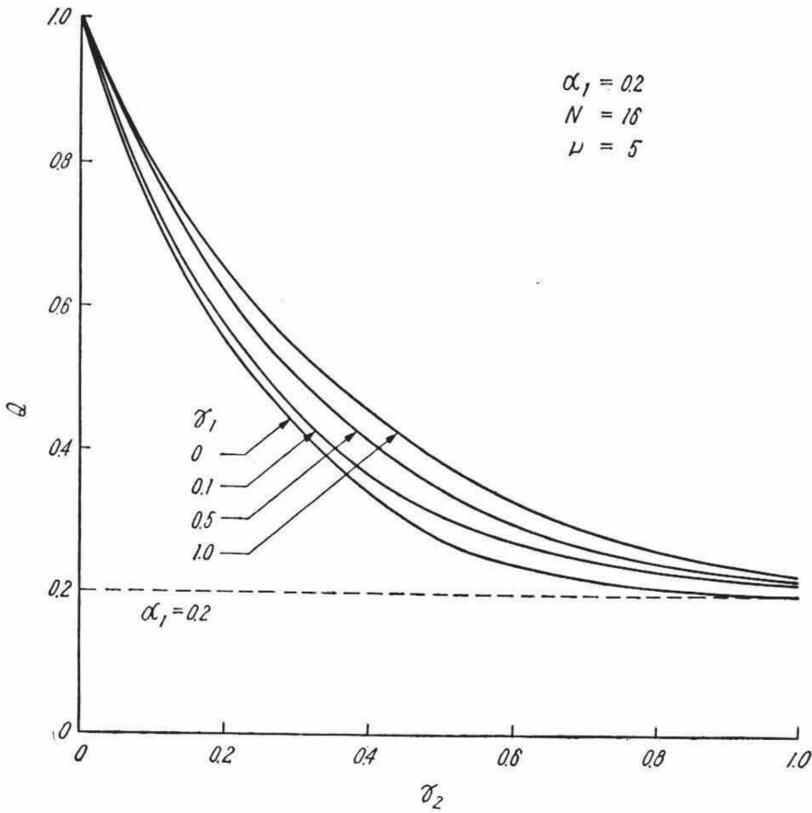
第7図  $\gamma_1$  の  $Q_2$  に対する影響



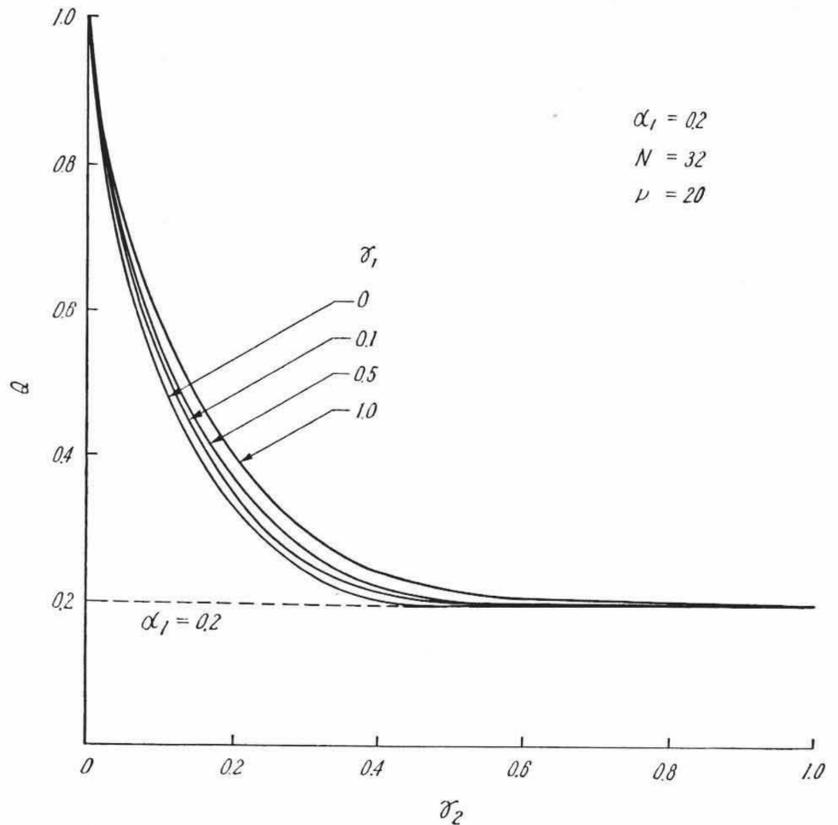
第8図  $N=8, \nu=5$  の実験における  $\gamma_2, \gamma_1$  の  $Q$  に対する影響



第10図  $N=32, \nu=10$  の実験における  $\gamma_1, \gamma_2$  の  $Q$  に対する影響



第9図  $N=16, \nu=5$  の実験における  $\gamma_1, \gamma_2$  の  $Q$  に対する影響



第11図  $N=32, \nu=20$  の実験における  $\gamma_1, \gamma_2$  の  $Q$  に対する影響

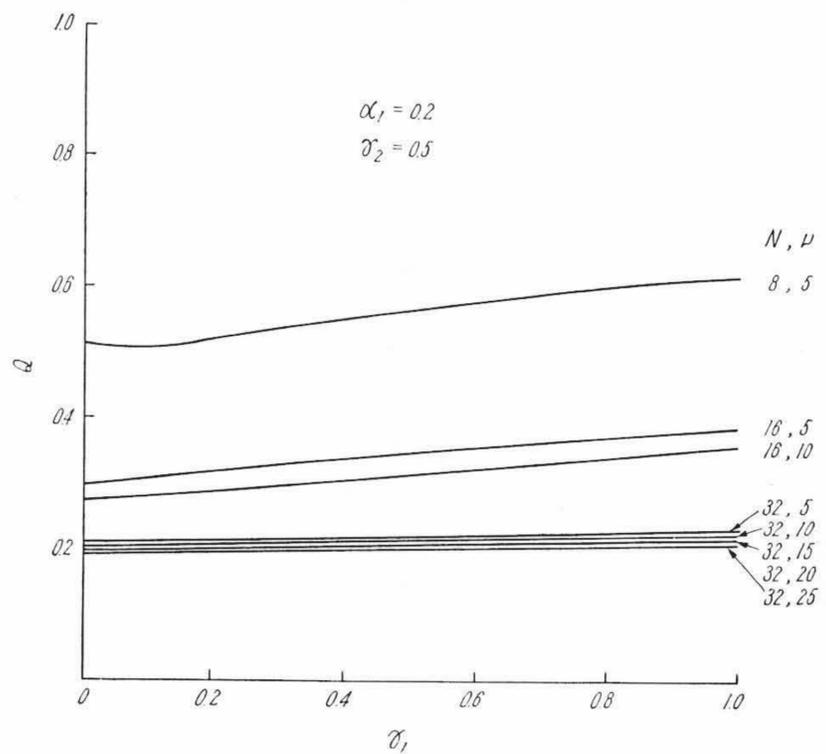
を示す。これらのグラフに関するかぎり、 $N$ と $\nu$ の値が大となるにつれて、 $\gamma_1$ の値の異なる曲線間の差異が小となることがわかる。

第7図に、 $\alpha_1=0.2$ および $\gamma_2=0.5$ における $Q_2$ に対する $N$ および $\nu$ の影響が $\gamma_1$ の関数として示されている。実際の観点からは、 $Q_2$ のこれらの曲線がほとんど一定となる $N$ および $\nu$ の組合せ、すなわち $N=32$ の各組合せを採用することが推薦される。

同様の議論および計算は $Q$ に対しても適用され、第8~12図にこれらを示す。なかんずく第10, 11図は $N=32, \nu=10, 20$ の組合せの場合に対して、 $Q$ の値に対する $\gamma_1$ の影響が非常に小さく、確率対応法の効率が非常にすぐれていることを示している。

これらの観察は、 $\alpha_1, N, \nu, \gamma_1, \gamma_2$ などの諸定数の特定の組合せに対して行われたものである。

けれども筆者が行ったこれらの諸定数のそのほかのいくつかの組合せに対する計算結果からも、これらの観察がもっと一般的に適用されうると考えられる。



第12図  $\gamma_1$  の  $Q$  に対する影響

4.3 確率対応法応用上の注意事項

上に述べた諸計算を要約して、実際統計応用家に対する次のような諸注意事項が得られる。

(A) 確率対応法は、各種の実験に使用できる。特に、次の条件を満足する実験に効果的である。

- (1) 実験順序の確率化が困難な場合。
- (2) 見通しのつかない多要因の効果を考慮しなければならない場合。特に交互作用の効果がほとんどわからない場合、したがって、一般に初期の開発段階における実験。

(B) 確率対応法使用に当っては、次の諸項を考慮しなければならない。

- (1) 実験の計画においては、全実験数が30またはそれ以上になるように考慮すること。
- (2) 要因のわりつけにおいて、見かけ上の誤差の自由度が5またはそれ以上となるように、第1要因群と第2要因群に全要因を配分する。
- (3) 結果の解析に際して、未修正データによる帰無仮説の検定の大きさは、通常の0.05または0.01の値ではなく、0.10, 0.20位まで大きくした方がよい。

5. 結 言

この研究の結論を要約すると、次のようになる。

- (1) 確率対応法の検定力関数は、特殊の線形回帰モデルにおける回帰係数の(F-検定による)有意差検定として数式化できるが、2つの非心カイ自乗の比の分布関数によって計算される。
- (2) 確率対応法におけるこの2つの非心カイ自乗の比の分布関数は、計画ごとに確率的に変動する。
- (3)  $\lambda_{1i}$  および  $\lambda_2$  の期待値を有する2つの非心カイ自乗の比の分布関数から、2種類の過誤の確率の真の値は、未知の対象の世界によってきまる  $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{q-1}$  および  $\beta_q$  の値によって影響される。
- (4) これらの諸計算を要約して、実際統計応用家に対する確率対応法使用上の諸注意事項を与えた。

終りにのぞみ、この研究に終始ご指導、ご忠告を頂いた九州大学北川教授ならびに日立製作所中央研究所島田正三博士に深く感謝の意を表す。

また数多くの数値計算にご協力頂いた小林氏始め多くの方々のご労苦に深謝する。

参 考 文 献

- (1) 田口玄一： 実験計画法 (上), 132 (昭-32, 丸善)
- (2) 竹内啓： 文部省数理学研究第5班報告 1~91 (1960-2)
- (3) 北川敏男： 推測過程論 岩波講座現代応用数学 (昭-34 岩波書店)
- (4) 北川敏男： Successive Process of Statistical Inference Applied to Linear Regression Analysis and its Specializations to Response Surface Analysis: Bull. Math. Stat., 8, 3, 80~114 (1959)
- (5) たとえば 統計科学研究会編： 新編統計数値表, 174 (昭-27 河出書房)
- (6) 北川敏男： ポアソン分布表 (昭-26 培風館)
- (7) Pearson, K: Table of the Incomplete Beta-Function, the "Biometrika" Office, London, 1948.

附 録 [I]

(11), (27), (28), (29)および(30)式より

$$\begin{aligned} \xi(\Delta_{ik}^2) &= \xi\left\{\frac{1}{N^2}\left(\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} \hat{x}_{k\alpha}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \xi\left(\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha}^2 \hat{x}_{k\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha>\beta} x_{i\alpha} x_{i\beta} \hat{x}_{k\alpha} \hat{x}_{k\beta}\right) \\ &= \frac{1}{N} + 2 \sum_{\alpha>\beta} x_{i\alpha} x_{i\beta} \xi(\hat{x}_{k\alpha} \hat{x}_{k\beta}) \\ &= \frac{1}{N} + 2 \frac{(-1)}{N^2(N-1)} \sum_{\alpha>\beta} x_{i\alpha} x_{i\beta} \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\sum_{\alpha>\beta} x_{i\alpha} x_{i\beta} = (-1) \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} + (+1) \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1\right) = -\frac{N}{2}$$

より

$$\xi(\Delta_{ik}^2) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N(N-1)} \dots \dots \dots (34)$$

を得る。

附 録 [II]

(19), (33), (34)より

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_{1i}) &= \frac{N}{2\sigma^2} \xi\left[\left(\beta_i + \sum_k \beta_k \Delta_{ik}\right)^2\right] \\ &= \frac{N}{2\sigma^2} \xi\left[\beta_i^2 + 2\beta_i \sum_k \beta_k \Delta_{ik} + \left(\sum_k \beta_k \Delta_{ik}\right)^2\right] \\ &= \frac{N}{2\sigma^2} \left[\beta_i^2 + \sum_k \beta_k^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N(N-1)}\right)\right] \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

を得る。  $N \gg 1$  のところでは

$$\xi(\lambda_{1i}) \doteq \frac{1}{2\sigma^2} [N\beta_i^2 + \sum_k \beta_k^2] \dots \dots \dots (38)$$

と近似され得る。

附 録 [III]

(20)式より

$$\xi(\lambda_2) = \xi\left(\sum_{\alpha} H_{\alpha}^2 / 2\sigma^2\right) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha} \xi(H_{\alpha}^2)$$

が得られる。(11), (35)両式から

$$\xi(\lambda_2) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha} \xi\left[\sum_k \beta_k^2 A_{k\alpha}^2\right]$$

を得る。(11)式から

$$\begin{aligned} \xi(A_{k\alpha}^2) &= \xi\left\{\left(\hat{x}_{k\alpha} - \sum_i \Delta_{ik} x_{i\alpha}\right)^2\right\} \\ &= \xi\left\{\hat{x}_{k\alpha}^2 - 2\hat{x}_{k\alpha} \sum_i \Delta_{ik} x_{i\alpha} + \left(\sum_i \Delta_{ik} x_{i\alpha}\right)^2\right\} \\ &= 1 - \frac{2}{N} \sum_i \sum_{\beta} x_{i\beta} x_{i\alpha} \xi(\hat{x}_{k\beta} \hat{x}_{k\alpha}) + \sum_i \xi(\Delta_{ik}^2) \\ &\quad + 2 \sum_{i>j} x_{i\alpha} x_{j\alpha} \xi(\Delta_{ik} \Delta_{jk}) \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_i \sum_{\beta} x_{i\beta} x_{i\alpha} \xi(\hat{x}_{k\beta} \hat{x}_{k\alpha}) &= \frac{2p}{N} + 2 \sum_i \frac{(-1)}{N(N-1)} \sum_{\alpha \neq \beta} x_{i\beta} x_{i\alpha} \\ &= \frac{2p}{N} + \frac{2p}{N(N-1)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_2) &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_k \beta_k^2 \left\{N-p - \frac{p}{N-1} + 2 \sum_{i \neq j} \xi(\Delta_{ik} \Delta_{jk}) \sum_{\alpha} x_{i\alpha} x_{j\alpha}\right\} \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_k \beta_k^2 \left(N-p - \frac{p}{N-1}\right) \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

を得る。

$$N-p \gg \frac{p}{N-1} \text{ のときに}$$

$$\xi(\lambda_2) \doteq \frac{1}{2\sigma^2} \sum_k \beta_k^2 (N-p) \dots \dots \dots (38)$$

で近似できる。