

部品製作公差の経済的配分法について

On the Method of the Economical Assignment of Tolerance
of Parts in an Assembly

山 川 典 宏*
Norihiko Yamakawa

内 容 梗 概

n 個の部品からなる組立品に発揮すべき特性値 y があり、それに公差 T_y が与えられている場合、部品特性値 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に与えるべき公差をどう配分したら最も経済的であろうか。これが公差の配分問題であり、従来いろいろの接近が試みられている。

本報では、費用関数は各部品加工費の和であるとし、さらに各部品加工費がその工作法によって変る費用と、部品手直費の和からなるとして、その合計費用の最小を与える公差を最適公差として与える図式解法を提案している。

1. 緒 言

寸法、強度、成分、そのほかいろいろな品質特性には通常、公差が与えられている。この与えられた公差を守るため、その構成部品、そのほか、目的の品質特性 y の変動の原因になりそうなものに公差を配分している。こうして公差が決められると、その部品の加工方法が決まり、これでまた逆にその部品品質のバラツキがおおよそ決められる。と同時に製品の製造原価も自動的に決定される。

どの部品公差で全体の公差を縮めるかによって、製造原価は大きく変動するのが普通である。このような問題に対してはいろいろな立場で多く論ぜられてきている⁽¹⁾⁽²⁾。ここでは各部品原価が、その不良率と製作方法で決められる場合の最小原価を与える公差配分の数理論を述べる。

いくつかの部品から成る組立品に、その発揮すべき特性値 y があり、この y に対して部品の特性 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が次の関数によって関係づけられている。

$$y = y(x_1, \dots, x_n) \dots\dots\dots (1)$$

また y には公差 T_y が与えられており、このため、各部品特性 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に部品公差 T_i ($i=1, 2, \dots, n$) を与えるのである。また、 $T=2\sigma$ とおけば分散の加法性から

$$T_y^2 = a_1^2 T_1^2 + \dots + a_n^2 T_n^2 \dots\dots\dots (2)$$

が得られる。ここで

$$a_i = \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_i = m_{xi}} \dots\dots\dots (3)$$

とおく。この T_y^2 を満足する T_i^2 を与えれば、性能上問題ない。しかし T_y^2 のある与えられた値に対して (2) 式を満足する T_i^2 の組合せ(解)は無数に存在する。(2) 式を満足する無数の解の中から最も経済的な解(最適解と呼ぶことにする)を求める方法を本報で問題にしよう。

この種の問題において

$$\left. \begin{aligned} y &= y(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ C &= C(T_1, T_2, \dots, T_n, T_y, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

なる二つの関数が既知であることが解を求めるための条件である。ここで C はコスト、費用、またはもっと一般的に経済性を表わす変数、 ξ_i は第 i 番目の部品の検査前の特性値 x_i の統計的分布を示すパラメータである。

ここで費用関数の形が問題であるが、次のように各部品のコストの和と組立品の不良品処置費との合計であると考えてもさほど一般性を失うことはない。

* 日立製作所笠戸工場

$$C = \sum_{i=1}^n \varphi_i(T_i, \xi_i) + \varphi_y(T_y, T_1, \dots, T_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \dots\dots\dots (5)$$

さらに $\varphi_y = P_y C_y$ とし、 P_y, C_y をともに一定とし、 y の分布が正規分布で近似されると仮定すれば

$$\left. \begin{aligned} k &= (y - m_y) / \sigma_y \\ T_y &= (k_2 - k_1) \sigma_y (k_2 > k_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

なる変換より m_y, σ_y が決まる。この m_y, σ_y はまた、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i'^2 \\ m_y &= y(m_1', m_2', \dots, m_n') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

で決められるので、問題は

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i(T_i, \xi_i) \dots\dots\dots (8)$$

の (7) 式を条件とした最小化という問題になる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= (m_i, \sigma_i) \\ m_i' &= \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} x_i f_i(x_i) dx_i \\ \sigma_i'^2 &= \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} (x_i - m_i)^2 f_i(x_i) dx_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

とおく。なお $f_i(x_i)$ は検査後の良品部品の確率密度関数を表わし、また x_{1i}, x_{2i} は第 i 部品の公差の下、上限を示している。

公差配分の問題を以上のような条件つき最小化の問題とみると、実際上の要請と、数学的困難さの相容れない問題点は (8) 式の具体的な形である。現在までに解の得られているのは次の場合だけである。

$$\varphi_i = \varphi_i(T_i) \dots\dots\dots (10)$$

これは田口氏によって解かれて、

$$\varphi_i = \beta_i(T_i) - \alpha_i \dots\dots\dots (11)$$

とおかれている。実際にはさらに不良品の処理費が考えられる。すなわち

$$\varphi_i = \varphi_i(T_i, \sigma_i) \dots\dots\dots (12)$$

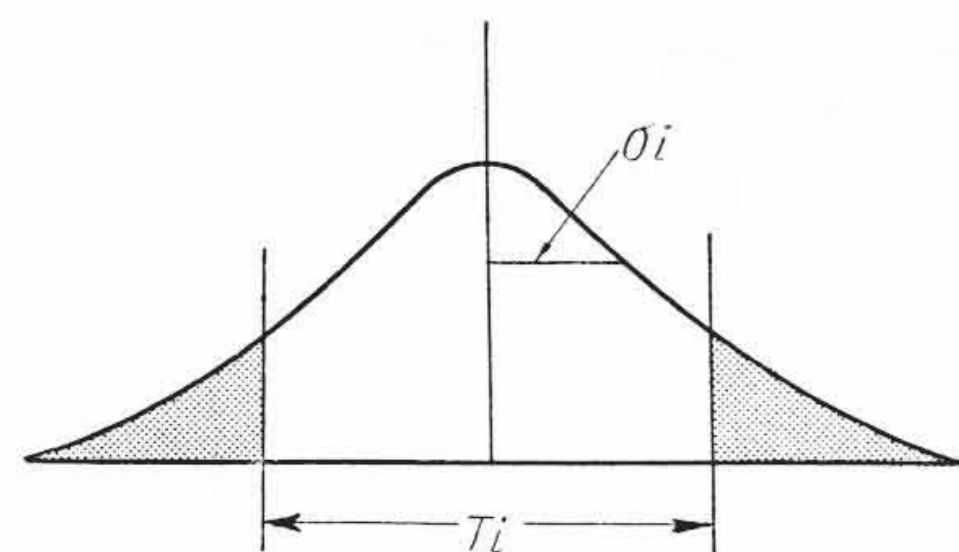
の場合で、第 1 図における (1) にこれを示す。これに対して第 1 図 (2) の場合のように

$$\varphi_i = \varphi_i(T_i, \sigma_i, m_i) \dots\dots\dots (13)$$

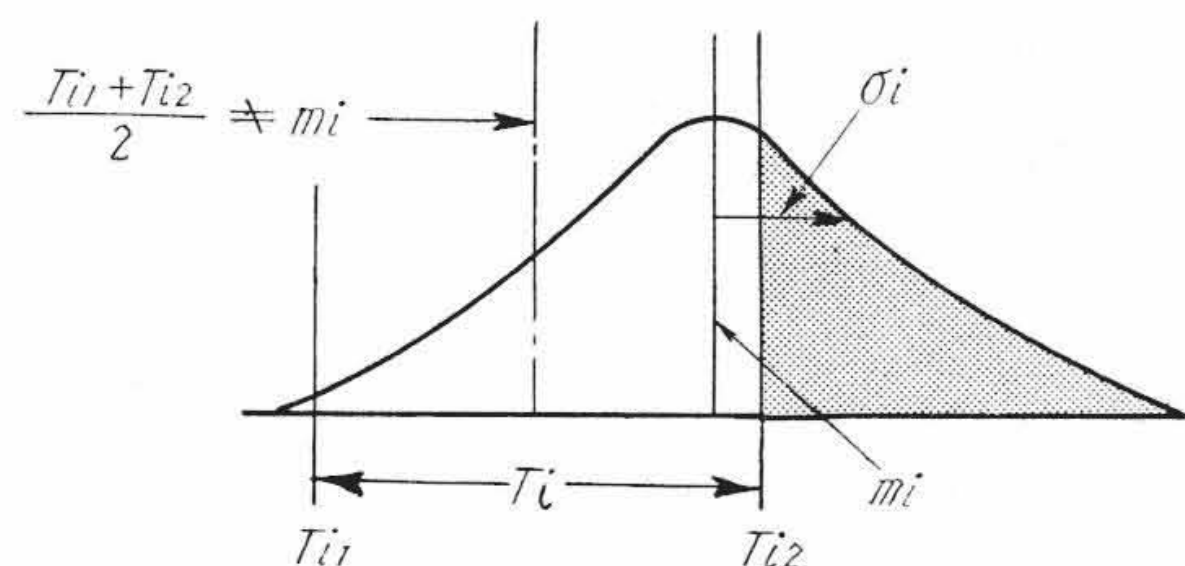
も考えられる。これらに対する研究結果を次に述べるが (13) 式に対する解はまだ得られていない。

2. 公差配分の理論

(8) 式において、費用の関数が公差のみでなく、公差とその入検前の分布との関数となっている場合、すなわち、不良率 P と分散 σ^2 の関数となっている場合をここで取り扱う。初めにことわっておきたいが、本報では入検前の分布はすべて正規分布であると仮定して



(1)



(2)

第1図 公差と不良の関係

計算を進めている。正規分布以外の分布の場合にはその分布関数を入れてやはり計算を進めれば同様にできる。ただし左右対称でない分布の場合には、一くふうが必要と思う。

さてここで費用関数を、

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (C_i P_i + H_i) \quad (14)$$

とおく。ここで P_i は部品不良率、 C_i は不良部品処理費であり、 H_i は加工方法によって変る加工費である。

また、条件式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \\ m_y &= y(m_1', m_2', \dots, m_n') \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

のうち m_y は(14)式中の第1項 $C_i P_i$ を最小にするためには m_i' を公差中心に選ばねばならないので、一義的に決まり、条件式からおとされるので、最適公差 $T_i = 2t_i \sigma_i$ は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} (\varphi + \lambda \sigma_y^2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_i^2} (\varphi + \lambda \sigma_y^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

の解より求められる。

ここで、 $f(t)$ を入検時部品の $p.d.f.$ とすれば

$$\sigma_i'^2 = \sigma_i^2 \int_{-t_i}^{t_i} t^2 f(t) dt \equiv \sigma_i^2 k(t) \quad (17)$$

$$p_i = 1 - \int_{-t_i}^{t_i} f(t) dt = p(t_i) \quad (18)$$

となり、また

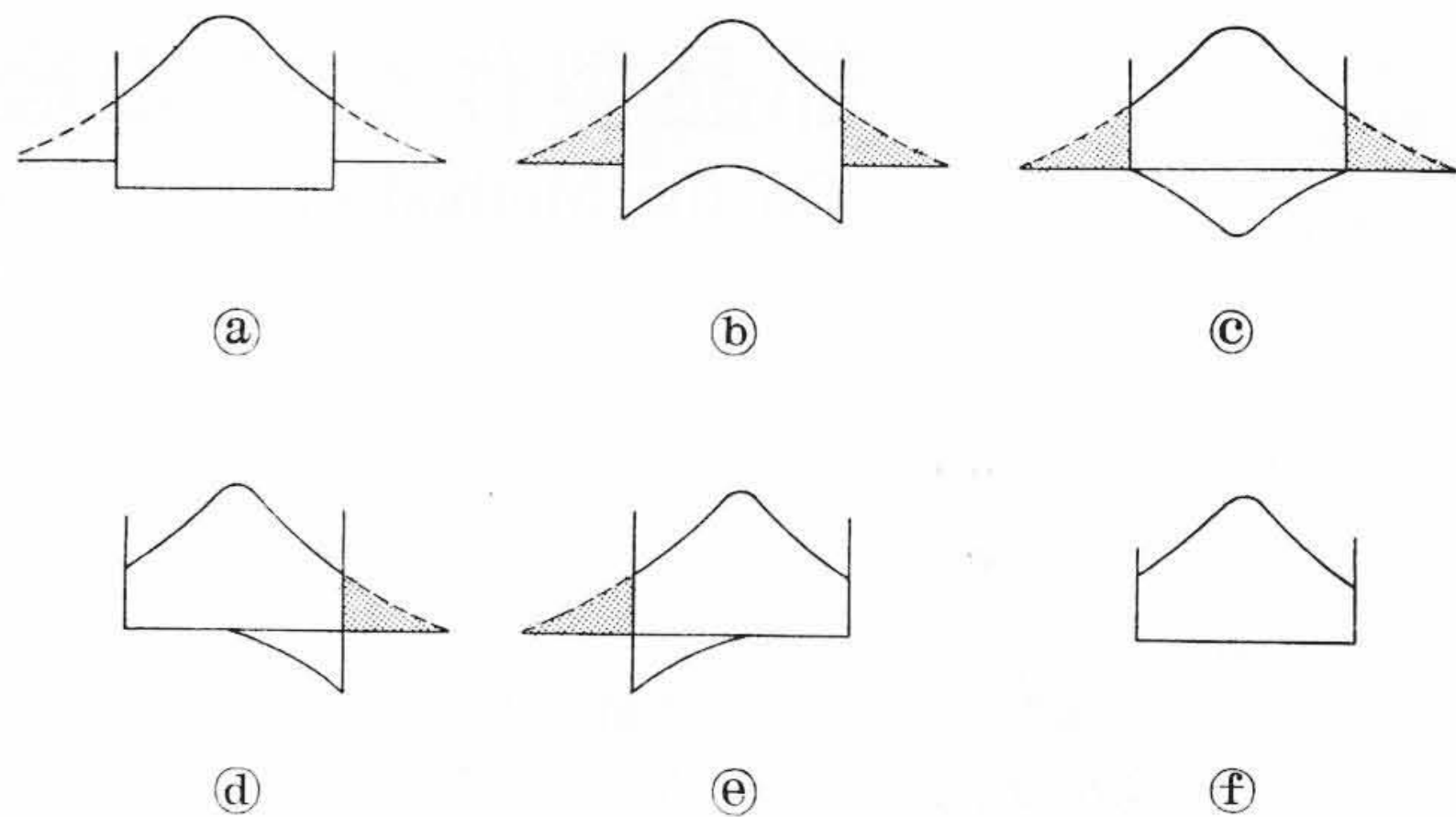
$$H_i = \beta_i (\sigma_i^2)^{\alpha_i} \quad (19)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_i}{\partial p_i} &\neq 0 \\ \frac{\partial \sigma_i}{\partial H_i} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

が得られ、結局(16)式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} (\varphi + \lambda \sigma_y^2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial H_i} (\varphi + \lambda \sigma_y^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



第2図 検査再加工後の部品特性分布形

と等価であり、これより

$$\left. \begin{aligned} C_i + \lambda \frac{\partial}{\partial p_i} [\sum a_i^2 \sigma_i^2 k(t_i)] &= 0 \\ 1 + \lambda \frac{\partial}{\partial H_i} [\sum a_i^2 \sigma_i^2 k(t_i)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

をうる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= -\sigma_i^2 \frac{\partial k(t_i)}{\partial p_i} \\ \phi_i &= (\sigma_i^2)^{d_i+1} k(t_i) / \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \lambda \psi_i &= C_i / a_i^2 \\ \lambda \phi_i &= \beta_i / a_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を得る。結局(24)式の解から $T_i = 2t_i \sigma_i$ を決めることができる。このために(23)式をグラフ化して ψ_i の曲線と ϕ_i の曲線との交点の t_i と σ_i^2 とが求める第 i 番部品公差である。(24)式の λ は条件式を満足するように適当に決めればよい。

3. 逐次的数値計算法

3.1 Ψ, Φ の計算

逐次的数値計算法を確立するためには(23)式の ψ, ϕ を t, σ, α の関数として算出して計算図を求めておく必要がある。ここで $k(t)$ が未計算であるので、これを求めよう。

(17)式より、 $f_i(t)$ の形を決める必要がある。 $f_i(t)$ の考えられる形として、入検前の分布を正規分布と仮定すれば第2図のような六つの極端な場合が考えられる。すなわち入検前の分布を $f(t)$ 、手直品の分布を $x(t)$ とすれば、

$$f_i(t) = f(t) + x(t) \dots (-t_i \leq t \leq t_i) \quad (25)$$

となる。手直しを許さない場合 f は

$$f_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \left\{ \int_{-t_i}^{t_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\}^{-1} \dots (-t_i \leq t \leq t_i) \quad (26)$$

である。

手直しを許す場合は手直品の分布がいろいろ考えられる。

$$x(t) = F(t_i) / t_i \quad (-t_i \leq t \leq t_i) \quad (27-1)$$

$$x(t) = 3F(t_i) t^2 / t_i^3 \quad (-t_i \leq t \leq t_i) \quad (27-2)$$

$$x(t) = 2F(t_i) f(t) \quad (-t_i \leq t \leq t_i) \quad (27-3)$$

ここで $F(t_i) = \int_{-t_i}^{\infty} f(t) dt$ を表わす。

ここでは㉔(27-1)、㉔(27-2)の場合のみの計算を試みた。もちろん、このほかの場合も不可能ではないが㉔、㉔を比較してみて、大差がないことを確認したので試みなかった。㉔、㉔、㉔、㉔は以上のことから、それほど大差が公差の上に表われてこないだろうということは想像できるが、㉔、㉔の二つの場合はほかと事情を異にすることは容易に推察できる。平均値に差が表われ、費用関数も公差の

上, 下限を出ることによって異なってくるはずである。これらについては, 機会をあらためて考察したい。

④, ⑤についての $k(t)$, $\frac{\partial k}{\partial p}$ は次式のとおりである。

$$k_{(4)}(t_i) = 1 - 2t_i f(t_i) + F(t_i) \left(\frac{2}{3} t_i^2 - 2 \right) \dots (28-1)$$

$$k_{(5)}(t_i) = 1 - 2t_i f(t_i) + F(t_i) \left(\frac{6}{5} t_i^2 - 2 \right) \dots (28-2)$$

$$\frac{\partial k_{(4)}(t_i)}{\partial p_i(t_i)} = -\frac{2}{3} t_i \left[\frac{F(t_i)}{f(t_i)} + t_i \right] \dots (29-1)$$

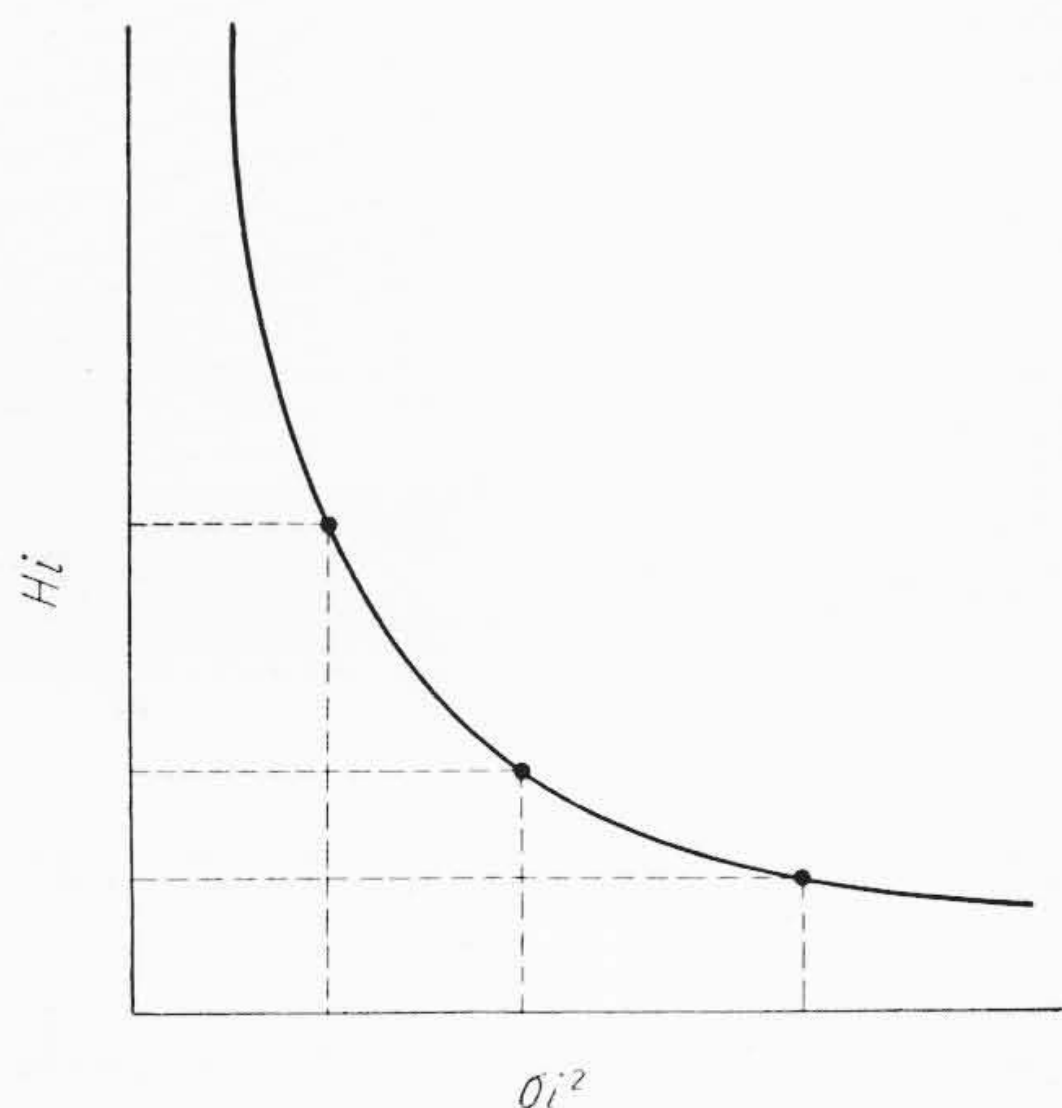
$$\frac{\partial k_{(5)}(t_i)}{\partial p_i(t_i)} = -\frac{2}{5} t_i \left[\frac{F(t_i)}{f(t_i)} + t_i \right] \dots (29-2)$$

3.2 逐次的数値計算法

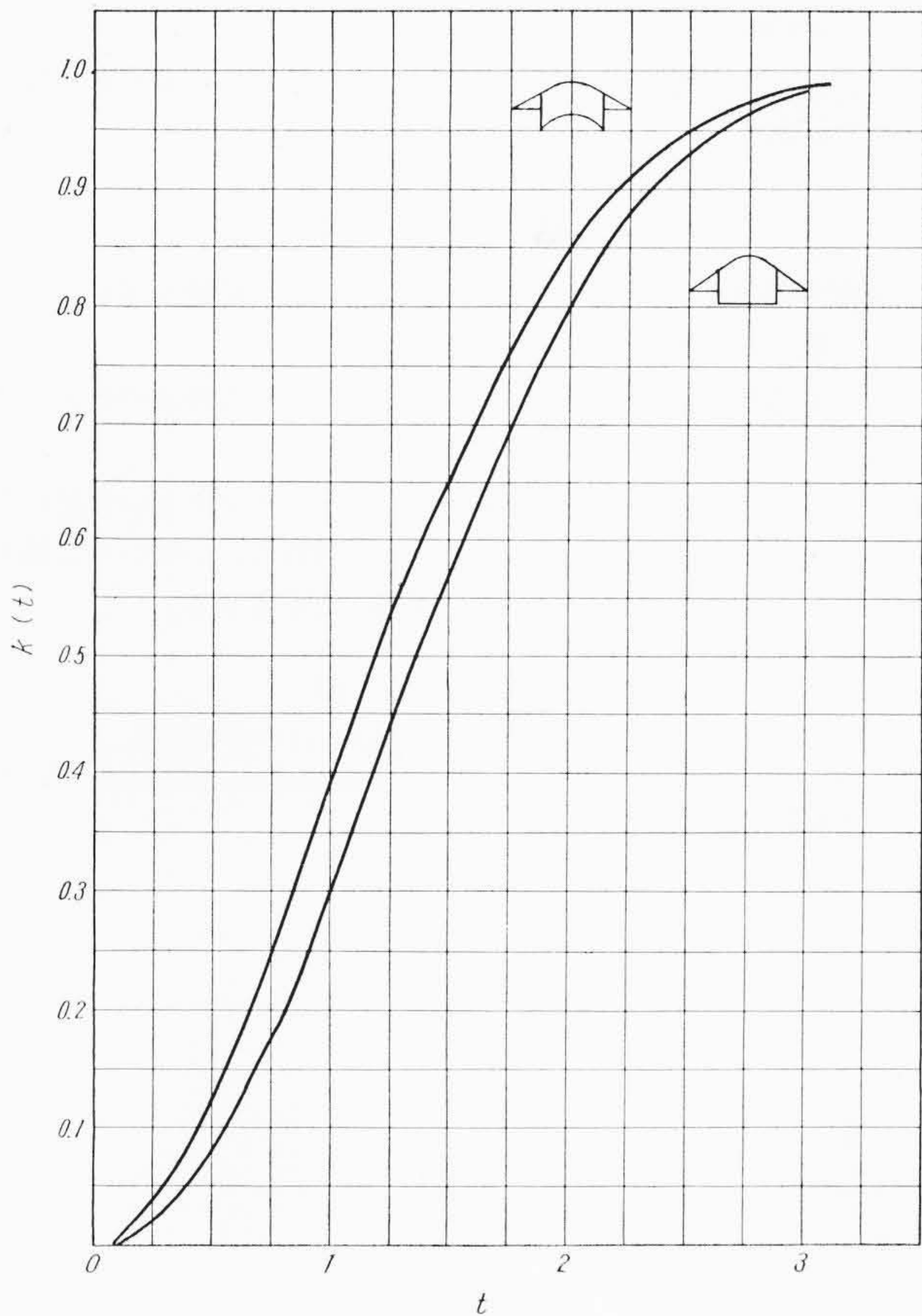
以上の理論をもとにして次のような公差配分の計算法を提案する。

(1) 準備すべき基本データ

(a) 目的とする組立品の特性に与えられている公差: T_y



第3図 分散と費用の関係



第4図 $k-t$ 換 算 図

(b) 組立品公差 T_y をはずれた率の許容量: P_y

(c) 組立品特性値と部品特性値との関係式

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots (30)$$

ただし y は微分可能であることと, 各部品平均値のまわりで, できるだけ線形に近いこと, との二つの条件がつく。これは多くの場合, 満足できる。

(d) 不良部品一個を処理するに要する費用: C_i

ただし C_i は部品特性 (i) によって変るが, t_i, σ_i には無関係な定数とみなし得ること。

(e) 製作工費の分散との関係

$$H_i = \beta_i / (\sigma_i^2)^{\alpha_i} \dots (31)$$

における二つのパラメータ α_i, β_i

また部品によっては, 他の製作方法の見当がつかない (最上の治工具しかない) という場合もありうる。このような場合には, この項のデータは必要なく, 次に述べる Ψ_i のみの関数として σ_i^2 (定数) より t_i を求める。

(2) 計 算 手 順

(a) $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = a_i$ より a_i^2 を求める。

(b) 与えられた T_y, P_y と正規分布表より

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P_y/2 \dots (32)$$

の k を求め

$$\frac{T_y}{2} = k\sigma_y \dots (33)$$

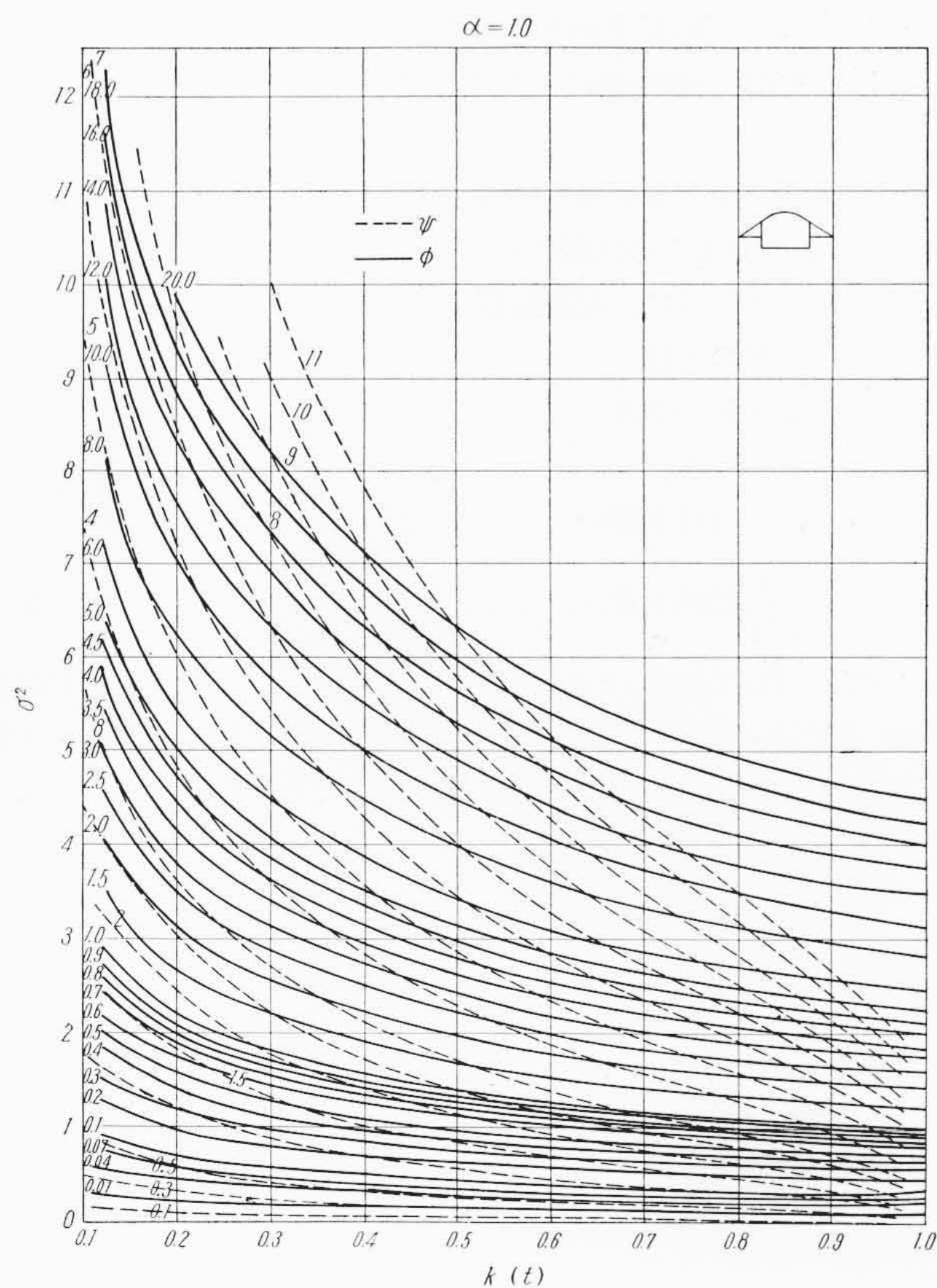
より σ_y^2 を求める。

(c) $\Psi_i^{(1)} = C_i/a_i^2, \phi_i^{(1)} = \beta_i/a_i^2$ を求める。

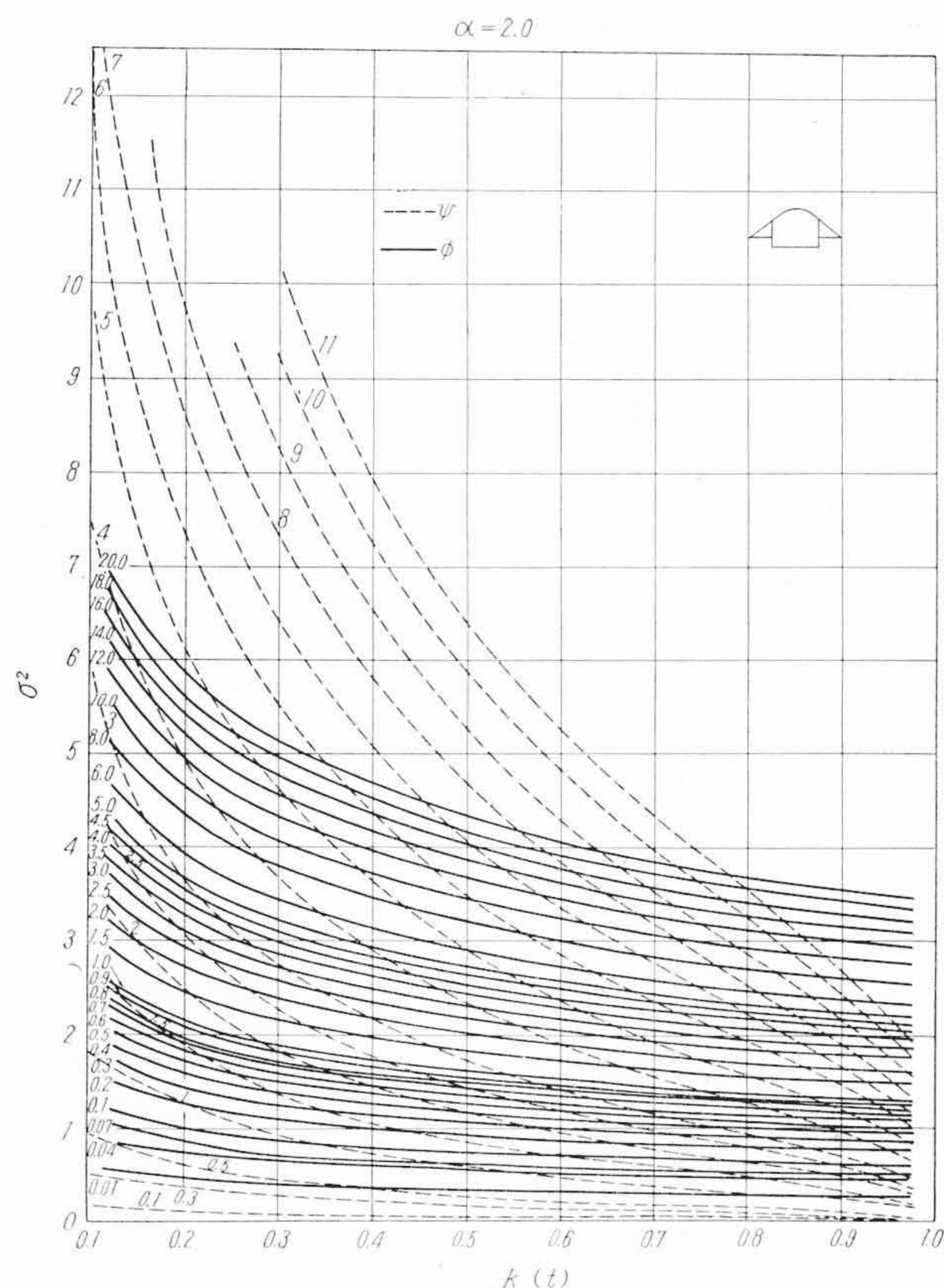
(d) 各部品の α_i に対して計算図 (第5, 6, 7図参照) を選ぶ。

(e) (c) で求めた $\Psi_i^{(1)}, \phi_i^{(1)}$ の値をもつ (d) の図中の2曲線の交点 $\sigma_i^{2(1)}$ と $k^{(1)}(t_i)$ とをよむ。

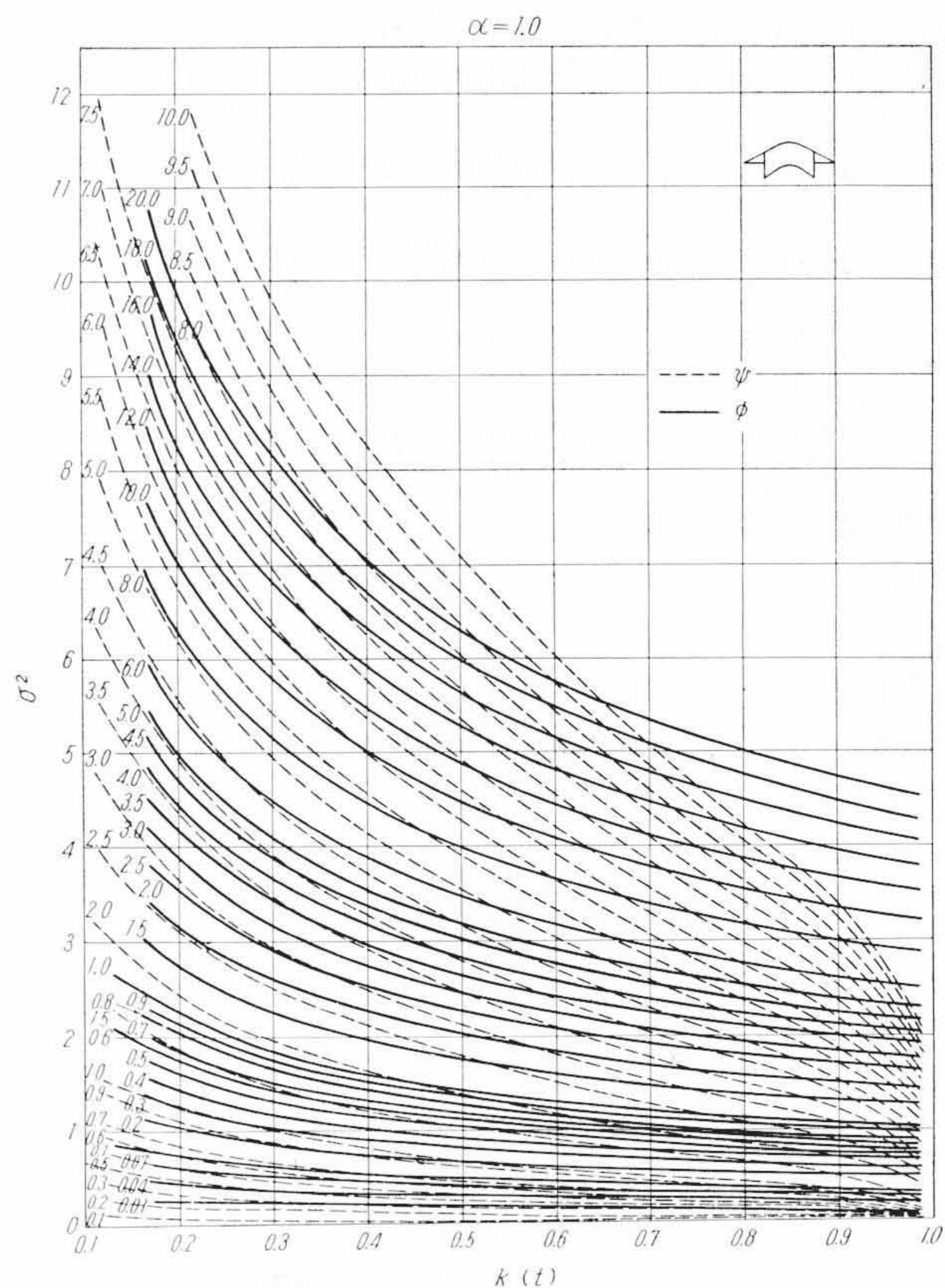
(f) $A_1 = \sum a_i^2 \sigma_i^{2(1)} k^{(1)}(t_i) / \sigma_y^2$ より A_1 を計算する。



第5図 公差配分計算図 (1)



第6図 公差配分計算図(2)



第7図 公差配分計算図(3)

(g) $\psi_i^{(2)} = \psi_i^{(1)} / A_1$, $\phi_i^{(2)} = \phi_i^{(1)} / A_1$ を求める。(e)同様交点の座標 $\sigma_i^{(2)}$, $k^{(2)}(t_i)$ を読む。

(h) $A_2 = \sum a_i^2 \sigma_i^{(2)} k^{(2)}(t_i) / \sigma_y^2$ より A_2 を計算する。

(i) 以上の操作を繰り返して $A_j = 1$ に近づいたところの $\sigma_i^{(j)}$, $k^{(j)}(t_i)$ が求める最適点である。

(j) $k(t_i)$ を第4図により t_i に変換し

$$T_i = 2 t_i \sigma_i \dots\dots\dots (34)$$

が求める第 i 番目部品特性に与えられる公差である。

3.3 ほかにの方法との比較

以上の考え方以外に、配分問題に対しては

(1) 田口氏の方法

(2) Evans 氏の方法

が与えられている。

このうち、(1)は本報の

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (C_i P_i + H_i) \dots\dots\dots (35)$$

において、 $P_i = \text{const.}$ とした場合に相当する。いま一つ、(2)の Evans 氏によって与えられた方法は、費用関数を数式化しないで図式に求めようとするものである。したがって多くの異なった部品が

らなる組立問題は取り扱えず、同一部品多数、すなわち

$$\sigma_y^2 = \sum a_i^2 \sigma_i^2 = n \sigma_i^2 \dots\dots\dots (36)$$

における場合にのみ有用である。費用関数も

$$\varphi = n \varphi_i(\sigma_i t_i) \dots\dots\dots (37)$$

となり、ここで問題にできなかった中心値のずれの問題も取り扱う利点がある。

4. 結 言

公表配分問題について理論的検討を試みて次の結論を得た。

(1) 配分の数値計算の新しい方法を導いた。

(2) 本方法が従来考えられていた方法を一つの特別な形として含んでいることを確認した。

終りに臨み、研究を進めるにあたって、解のヒントをいただいた九州大学北川教授に厚くお礼申しあげると同時に、いろいろご協力をいただいた関係各位に対して深く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- (1) 田口玄一：公差のきめ方 (昭31)，日本規格協会
- (2) D. H. Evans: Bell System Technical Journal, Vol. XXXVII, 461