

エレベータ振動の解析

Analysis for Vibration Problem in Elevator

光 井 範 彦*
Norihiro Mitsui

内 容 梗 概

エレベータの振動について、現在までに実験的にはかなり研究され、その成果も上がっている。このたび、観点を換え、エレベータを簡単な振動系に置き替えて計算を行ない、理論面より現象の解析を行なった。その結果

- (1) エレベータ起動時、停止時、および走行中に低周波 (2.4~3.4 c/s) の自由振動を行なう。
- (2) 特定のロープ長において、シーブ回転脈動周波数に系の2次固有振動数が一致して共振する。
- (3) エレベータの縦振動により、マシュエ形のロープ横振動を起す。

などのことがわかった。

1. 緒 言

巻上機にウォーム歯車減速機構を用いているエレベータでは、かごの振動、騒音が問題になることがある。これは巻上機のウォーム歯車減速機構が円滑な動力伝達をしないため、シーブに歯車のかみ合周波数を主成分とする回転脈動を生じ、この脈動が加振源となって、ロープおよびかごを振動させるためである。

エレベータは第1図に示すように、かごとつり合いおもりがシーブにつるべ式につり下がった構造であるが、系の振動を考える場合には、かご側のみに着目すればよいことが、実験によりわかったので、

- (1) 振動系はロープおよびかごから成る。
- (2) かごは剛体とする。
- (3) ロープは完全弾性体とする。
- (4) シーブの回転脈動は純粋な正弦波とする。

と仮定し、エレベータを簡単な振動系に置き替えて解析を行なった。以下その概略を述べる。

2. 基礎方程式

2.1 エレベータ走行速度の影響

エレベータが停止しておれば、ロープの運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (1)$$

ただし u : ロープの変位

x : 空間に固定した座標

ξ : ロープに固定した座標

t, τ : 時間

V : エレベータの速度

c : ロープを伝わる振動の伝ば速度

いま、エレベータが第1図に示すように速度 V で下降 (上昇であれば $-V$) しているとすれば、

$$x = -\xi + V\tau$$

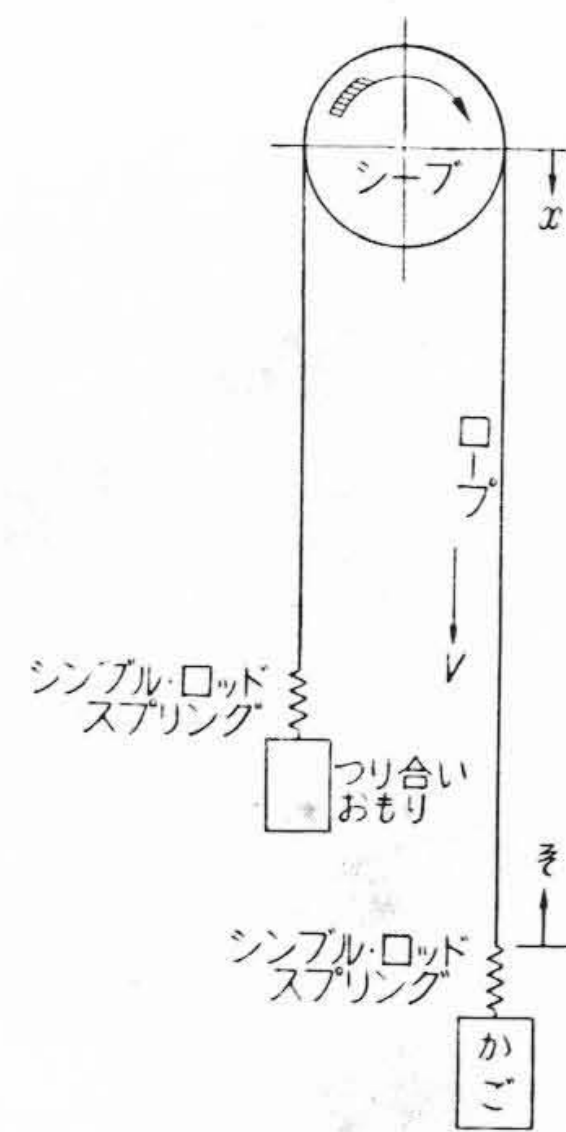
の関係があるから (1) 式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + (V^2 - c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

となる。(2) 式を解くために、

$$\begin{cases} y = x + \lambda t \\ \eta = x + t \end{cases}$$

と置いて変換すれば、



第1図 エレベータ構造図

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 + 2V\lambda + V^2 - c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & + 2(\lambda + V\lambda + V + V^2 - c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \eta} \\ & + (1 + 2V + V^2 - c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

(3) 式で $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \eta}$ の係数が零になるように λ の値を決定すれば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4)$$

ここに、

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{(1+V)^2}$$

(4) 式を解き $u(y, \eta)$ を $u(x, t)$ にもどせば、

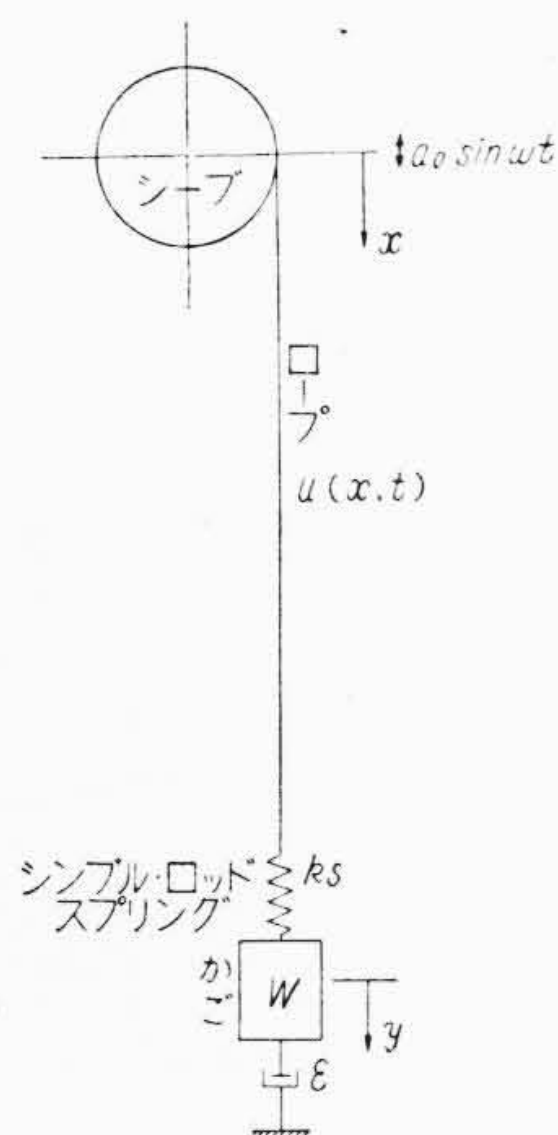
$$\begin{aligned} u = & \left[A \cos \frac{q}{\alpha} (x + \lambda t) + B \sin \frac{q}{\alpha} (x + \lambda t) \right] \\ & \times [C \cos q(x+t) + D \sin q(x+t)] \end{aligned}$$

ここに A, B, C, D, q は任意定数である。

さらに変形すれば、

$$\begin{aligned} u = & \cos \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) qx \left[L \cos \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) qt + M \sin \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) qt \right] \\ & + \sin \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) qx \left[-L \sin \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) qt + M \cos \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) qt \right] \\ & + \cos \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) qx \left[L' \cos \left(\frac{\lambda}{\alpha} + 1 \right) qt + M' \sin \left(\frac{\lambda}{\alpha} + 1 \right) qt \right] \\ & + \sin \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) qx \left[-L' \sin \left(\frac{\lambda}{\alpha} + 1 \right) qt + M' \cos \left(\frac{\lambda}{\alpha} + 1 \right) qt \right] \end{aligned} \quad (5)$$

* 日立製作所水戸工場



第2図 エレベータ振動系

$$\text{ここに, } \begin{cases} L = \frac{AC+BD}{2} & L' = \frac{AC-BD}{2} \\ M = \frac{BC-AD}{2} & M' = \frac{BC+AD}{2} \end{cases}$$

(5)式に境界条件, 初期条件を与えれば走行中の解が得られる。しかしギヤード・エレベータの速度が1~1.5 m/s (60~90 m/min) であるのに対し, ロープを伝わる振動波の速度は, 縦波が約2,700 m/s, 横波が約80 m/sであるから(5)式中

$$\frac{1}{\alpha} \pm 1 \div \pm 1$$

$$\frac{\lambda}{\alpha} \pm 1 \div c$$

と置ける。したがって(5)式は,

$$u = (A \cos cqt + B \sin cqt) \times (C \cos qx + D \sin qx)$$

となるが, これは,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の根である。すなわち $c \gg V$ であるからエレベータの縦振動およびロープの横振動はともにエレベータ走行速度の影響を無視し, それぞれの位置で停止しているとして計算してもよい。

2.2 エレベータの縦振動

前節によりエレベータの振動はその走行速度を無視し, 各ロープ長さの位置において論じてよいから, その振動系を第2図のようにおく。ここに

- u : ロープの変位
- Q : ロープの断面積
- E : ロープのヤング率
- γ : ロープの単位体積重量
- l : ロープの長さ
- $k_r = \frac{QE}{l}$: ロープのバネ定数
- k_s : シンブルロッドスプリングのバネ定数
- y : かごの変位
- W : かごの重量
- ε : かごとガイドレールの間の粘性抵抗係数
- a_0 : シーブ脈動振幅
- ω : シーブ脈動角振動数

ロープおよびエレベータのかごの運動方程式はそれぞれ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon \frac{dy}{dt} + k_s y = k_s u_{x=l} \quad (7)$$

$$\text{ただし } c = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$$

境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} u_{(x=0)} &= a_0 \sin \omega t & t > 0 \\ &= 0 & t \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$QE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x=l)} = k_s (y - u_{(x=l)}) \quad (9)$$

初期条件は,

$$\left. \begin{aligned} u_{(t=0)} &= 0 & y_{(t=0)} &= 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(t=0)} &= 0 & \left(\frac{dy}{dt} \right)_{(t=0)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

とする。いま u , y のラプラス変換を U , Y と書けば(6)式および初期条件より,

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 U = 0$$

これを解いて,

$$U = A e^{\frac{s}{c} x} + B e^{-\frac{s}{c} x} \quad (10)$$

ここに A , B は定数である。また, 境界, 初期の両条件より

$$\left. \begin{aligned} U_{(x=0)} &= \frac{a_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{(x=l)} &= \frac{k_s}{QE} (Y - U_{(x=l)}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(10)式の A , B を(11)の条件により消去すると,

$$U_{(x=l)} = \frac{\frac{a_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{s}{c} + \frac{k_s}{QE} \sinh \frac{s}{c} l \cdot Y}{\frac{s}{c} \cosh \frac{s}{c} l + \frac{k_s}{QE} \sinh \frac{s}{c} l} \quad (12)$$

となる。一方(7)式をさらに,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n \frac{dy}{dt} + \omega_s^2 y = \omega_s^2 u_{(x=l)}$$

$$\text{ここに, } \begin{cases} n = \frac{\varepsilon g}{W} \\ \omega_s^2 = \frac{k_s g}{W} \end{cases}$$

と変形すれば,

$$Y = \frac{\omega_s^2}{s^2 + ns + \omega_s^2} U_{(x=l)} \quad (13)$$

となる。ゆえに(12), (13)の両式より,

$$Y = \frac{a_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2) F(s)} \quad (14)$$

$$\text{ただし, } F(s) = (s^2 + ns + \omega_s^2) \cosh \frac{s}{c} l + (s+n) \frac{k_s \cdot c}{QE} \sinh \frac{s}{c} l$$

(14)式を逆変換すればかごの振動解が得られる。

いま, $F(s) = 0$ の根を $s_1, s_2, s_3, \dots, s_i, \dots$ とおけば, 留数の理論より,

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \omega}{-2j\omega \cdot F(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \frac{a_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \omega}{2j\omega \cdot F(j\omega)} e^{j\omega t} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \omega}{\frac{d}{ds} [(s_i^2 + \omega^2) \cdot F(s_i)]} e^{s_i t} \\ &= \frac{a_0 \mu \lambda \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\Omega^2 - 1) \mu \lambda \cos \lambda + \Omega^2 \sin \lambda}^2 + (2\nu \Omega)^2 (\mu \lambda \cos \lambda + \sin \lambda)^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \omega}{\frac{d}{ds} [(s_i^2 + \omega^2) \cdot F(s_i)]} e^{s_i t} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \lambda = \frac{\omega}{c} l, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_s}, \quad \mu = \frac{k_r}{k_s}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{k_s} \frac{W}{g}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{n\omega(\mu\lambda \cos \lambda + \sin \lambda)}{(\omega^2 - \omega_s^2)\mu\lambda \cos \lambda + \omega^2 \sin \lambda}$$

(15)式の第1項は強制振動, 第2項は自由振動を表わす。自由振動は減衰のため, 時間の経過とともに消滅し, 強制振動のみが残ることになる。簡単のために系に減衰がなければ(15)式の強制振動項は,

$$y = \frac{a_0 \mu \lambda}{(\Omega^2 - 1)\mu\lambda \cos \lambda + \Omega^2 \sin \lambda} \sin \omega t \dots\dots\dots (16)$$

となる。ゆえに振動数方程式は,

$$\tan \lambda = -\mu \left[\lambda - \frac{\left(\frac{\omega_s l}{c} \right)^2}{\lambda} \right] \dots\dots\dots (17)$$

(17)式を解けば系の固有振動数が求められるが, 根は無数に存在する。エレベータでは第1番目の根は小さく,

$$\tan \lambda \doteq \lambda$$

とおけるから(17)式より,

$$\omega_1^2 \doteq \frac{k_r \cdot k_s}{k_r + k_s} \cdot \frac{g}{W} \dots\dots\dots (18)$$

すなわち, ロープを単にバネと考えた一自由度系の固有振動数で近似できる。一方第2番目以上の根では,

$$\lambda \gg \frac{\left(\frac{\omega_s l}{c} \right)^2}{\lambda}$$

であるから(17)式の右辺第二項を無視して,

$$\tan \lambda = -\mu \lambda \dots\dots\dots (19)$$

によって求めることができる。

2.3 エレベーターロープの横振動(エレベーター縦振動がロープの横振動を誘発する場合)

エレベータが縦方向に振動すればロープ張力は前節より

$$T = W + QE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ = W + P(x) \sin \omega t$$

ここに,

$$P(x) = a_0 QE \frac{\frac{\omega}{c} \left[-\{\Omega^2 - 1\} \mu \lambda \cos \lambda + \Omega^2 \sin \lambda \right] \sin \frac{\omega}{c} x + \{\Omega^2 - 1\} \mu \lambda \sin \lambda - \Omega^2 \cos \lambda}{(\Omega^2 - 1) \mu \lambda \cos \lambda + \Omega^2 \sin \lambda} \cos \frac{\omega}{c} x$$

すなわち張力は縦振動周波数で変動し, その振幅はロープの各位置によって異なる。しかし $W \gg |P(x)|$ であるから簡単のためにロープ全長にわたる平均をとって,

$$\bar{\delta} = \frac{1}{l} \int_0^l |P(x)| dx$$

とおけば, 近似的に,

$$T \doteq W + \bar{\delta} \sin \omega t$$

とおくことができる。ゆえに運動方程式は,

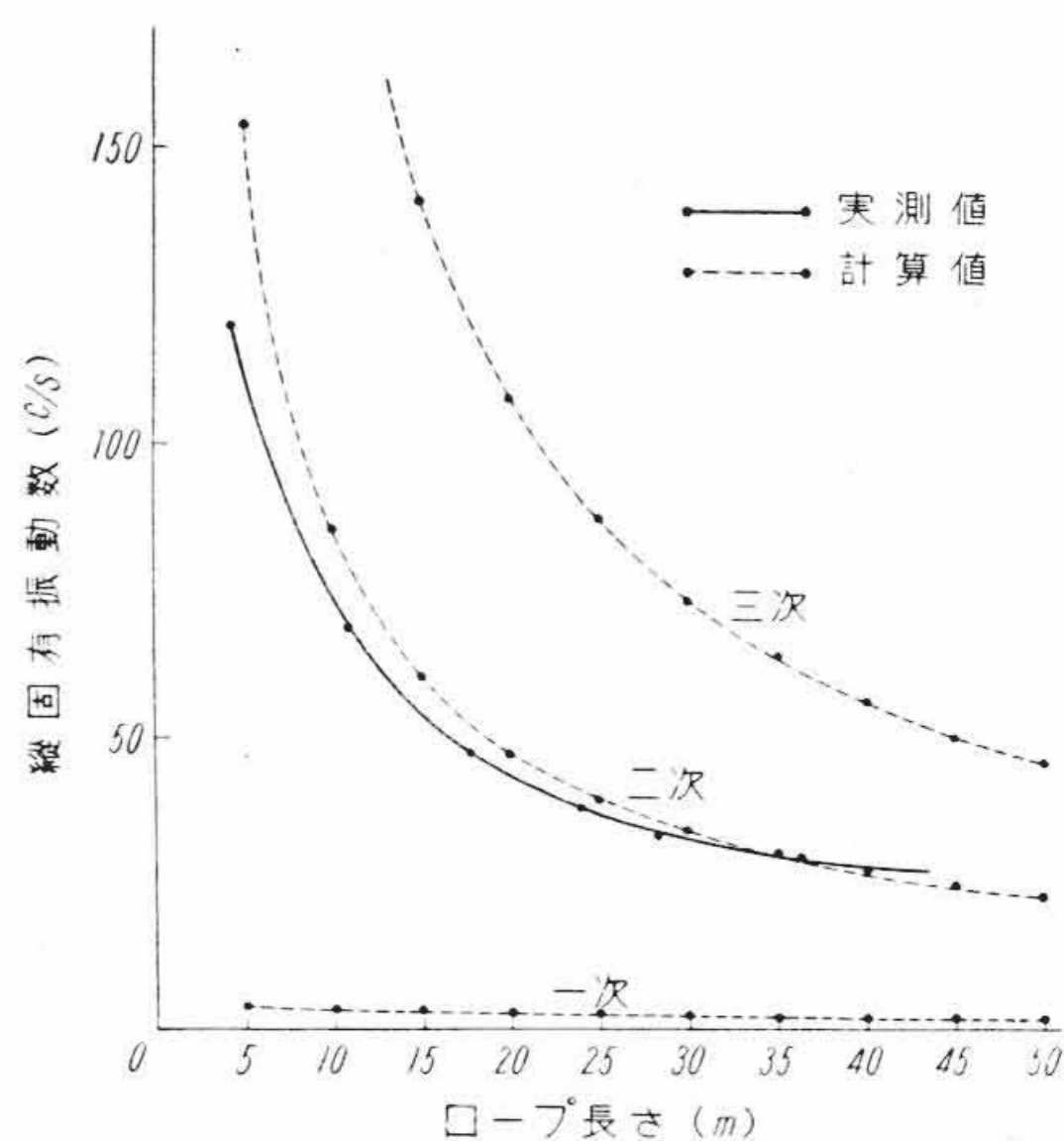
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{g}{\rho} (W + \bar{\delta} \sin \omega t) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \dots\dots\dots (20)$$

ここに, Z : ロープの横変位

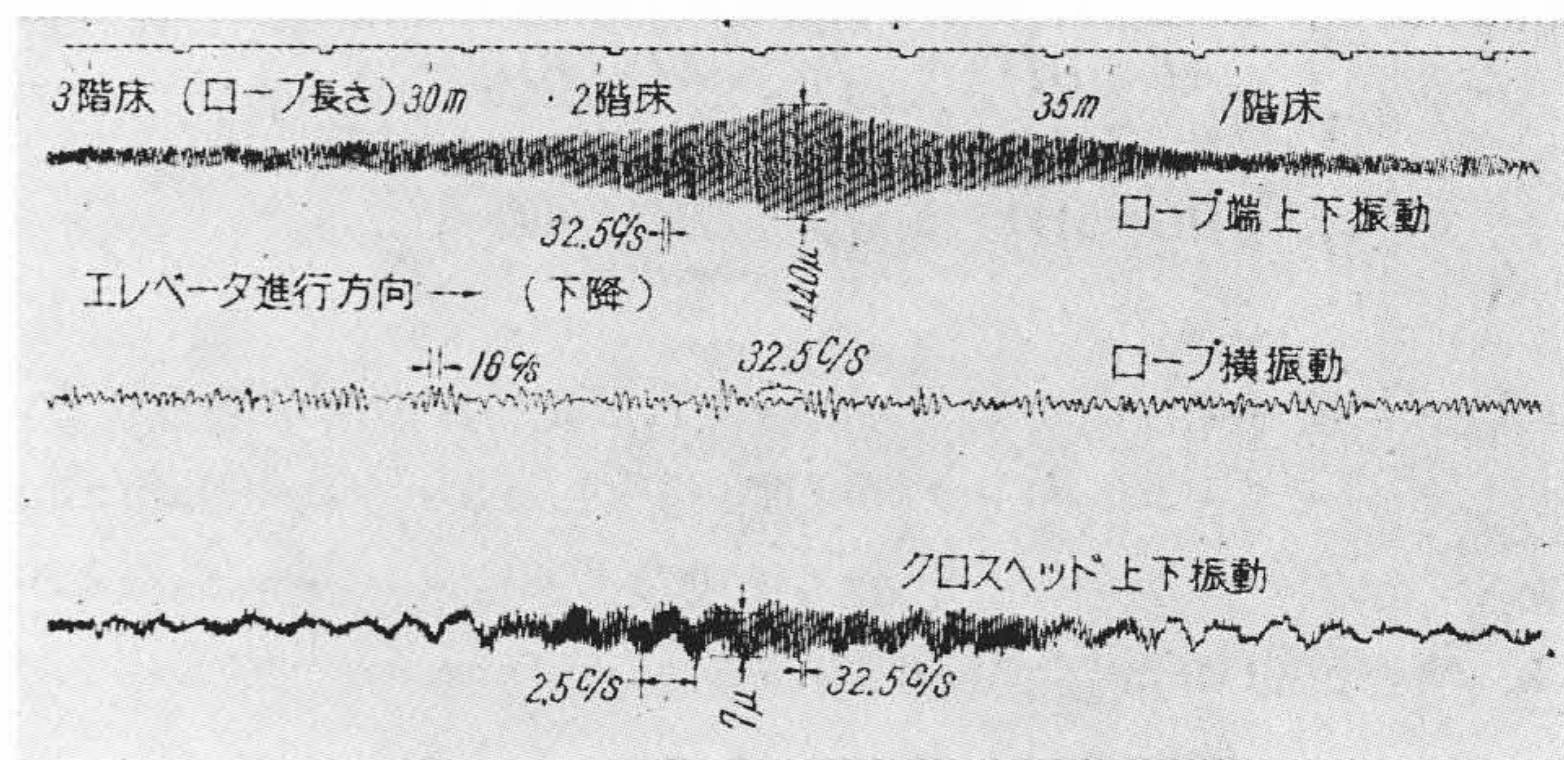
ρ : ロープの単位長さ重量

いま, ロープの両端は固定と考えて,

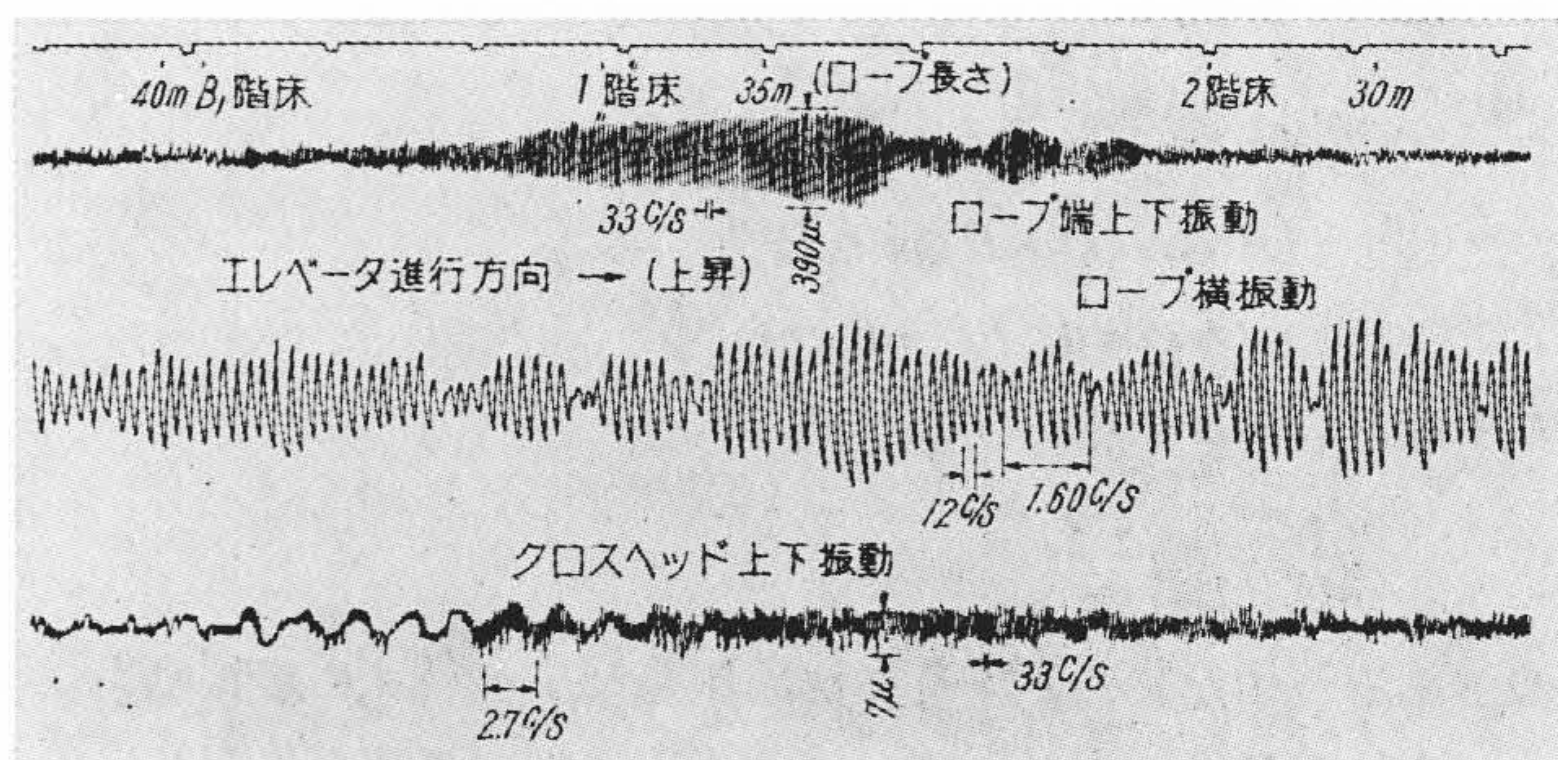
$$Z = R(t) \cdot \sin \frac{p}{c'} x$$



第3図 ロープ長さと縦固有振動数の関係



第4図 エレベータ下降時の振動



第5図 エレベータ上昇時の振動

とおけば(20)式は,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + (p^2 + q \sin \omega t) R = 0 \dots\dots\dots (21)$$

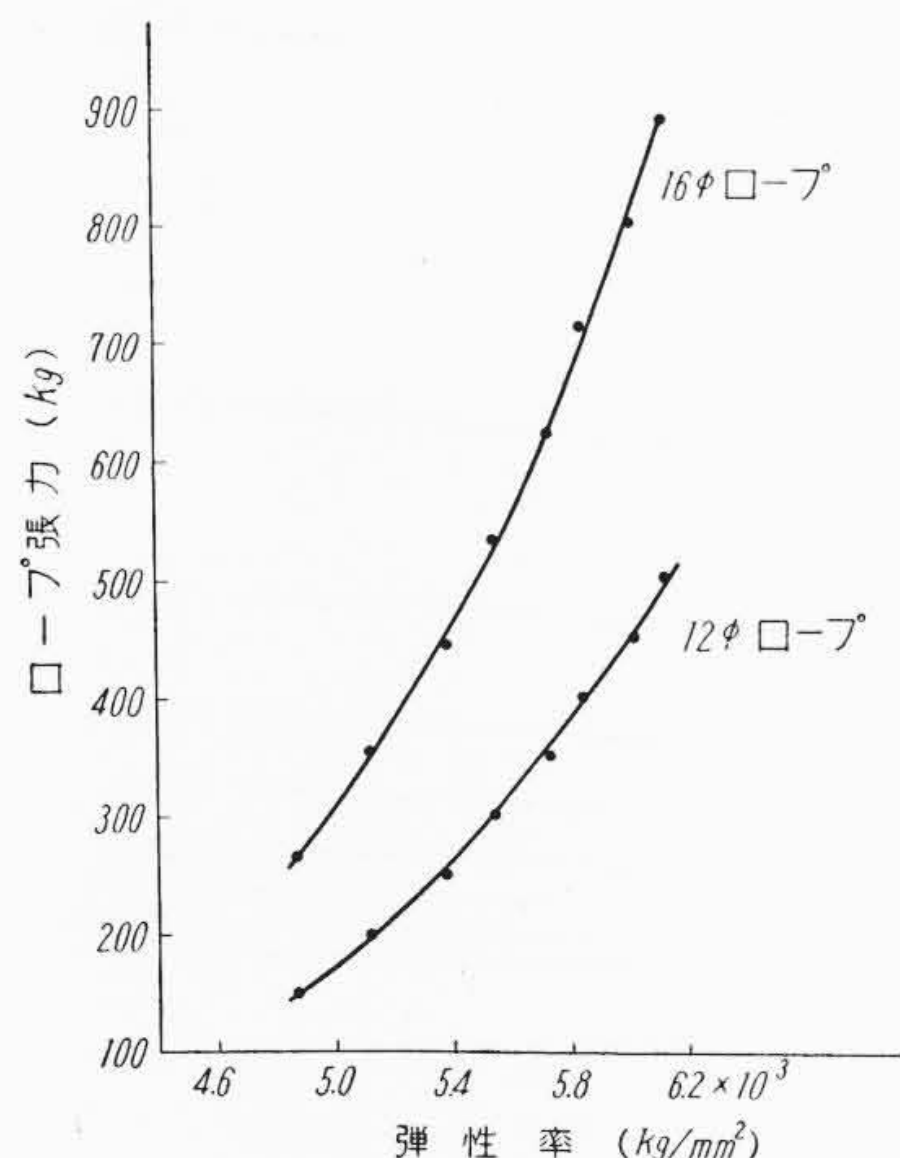
となる。ここに,

$$c' = \sqrt{\frac{Wg}{\rho}}, \quad q = \left(\frac{p}{c'} \right)^2 \cdot \frac{g}{\rho} \bar{\delta}$$

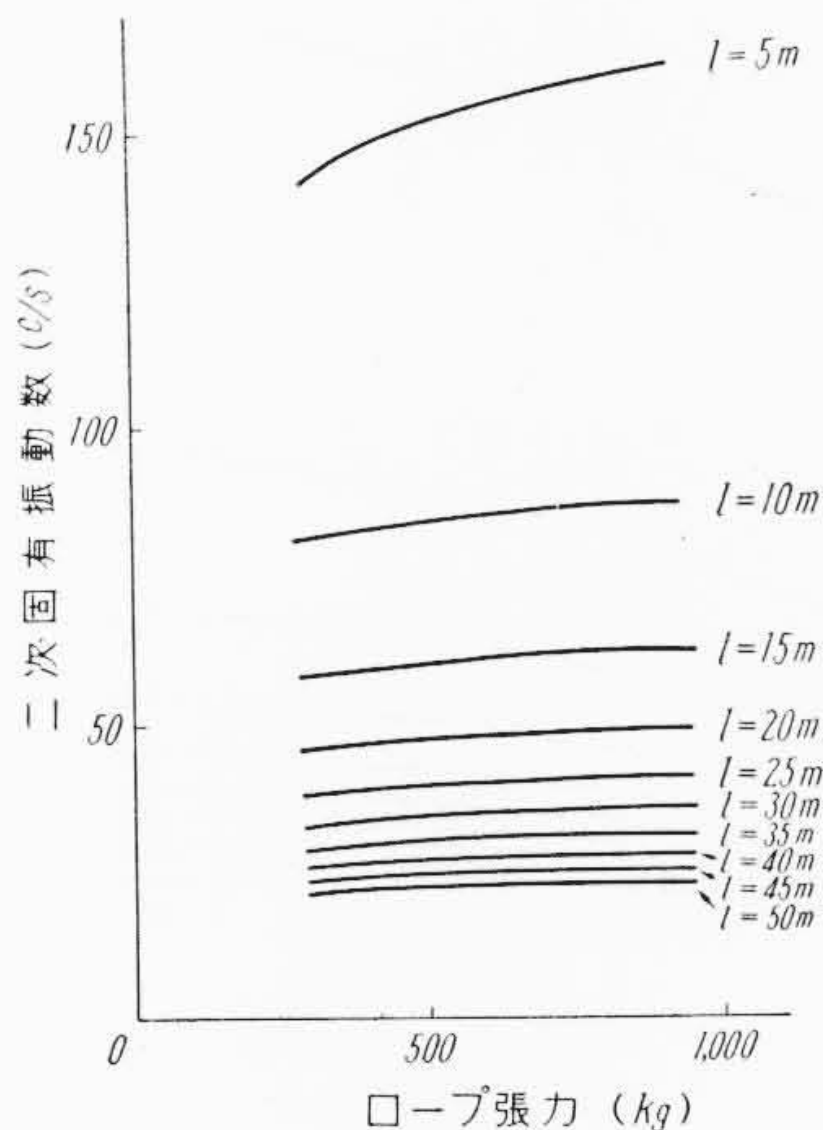
(21)式はマシュエーの方程式として知られ $p^2 \gg q$ であれば,

$$p \doteq \frac{1}{2} \omega, \quad \omega, \quad \frac{3}{2} \omega, \quad \dots\dots \frac{n}{2} \omega, \quad \dots\dots$$

すなわち, $\frac{1}{2} \omega$ の整数倍付近において不安定な解をもつ。すなわち, ロープの横方向の固有振動数の一つが, エレベータ縦振動数の $1/2$ の整数倍と一致すれば, そのエネルギーを吸収してロープの横ぶれが起る。



第6図 ロープ張力とヤング率の関係



第7図 ロープ張力と二次固有振動数の関係

3. 実測値との対比ならびに検討

3.1 縦振動

実験用エレベータの諸元は、

$$W=600 \text{ kg (ロープ一本当り)}$$

$$E=5.69 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2$$

$$\gamma=7.85 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$Q=105 \text{ mm}^2$$

$$k_s=56 \text{ kg/mm}$$

これらの諸値を用いて(18), (19)式により系の縦固有振動数を計算すると、第3図に示すようになる。したがって、シンプルロッド下端を打撃することによって得られた実測値は系の二次固有振動数に相当している。計算値のほうがロープの短い所で少し高くなっているが、これは計算の場合にはロープとシーブの接しはじめた点を固定点にとったことに起因している。実際にはシーブに接触している部分も多少振動するから仮定の固定点はこの点よりさらにはいった所と考えられ、この実験例では約2mである。第4,5図に示すエレベータ走行中の共振と固有振動数の実測値と計算値とを比較すれば次表のようになる。

		共振点		固有振動数	
		ロープ長さ(m)	振動数(c/s)	実測値(c/s)	計算値(c/s)
上	昇	34.5	33	30	31
下	降	33	32.5	31	32

ゆえに、シーブ脈動に系の2次固有振動が共振していることがわかる。上昇時、下降時で共振の位置が違ふのは、かごとガイドレール間の摩擦のため、上昇と下降でロープ張力に差がでるためである。第6図はロープ張力とヤング率の関係を示す。第7図にはヤング率変化によるロープ張力と、系の2次固有振動数の関係を示す。これによると張力が大きくなれば一般に振動数は高くなるが、ロープが短いほどその割合は大きい。エレベータ上昇の場合は、摩擦のために下降の場合よりも、ロープ張力は大きくなるから、より低い位置で共振を起すことになる。

上ばりの上下振動のオシログラムを見ると、シーブ脈動による強制振動が2.5 c/s (下降), 2.7 c/s (上昇) の振動と重畳している。この低周波振動数は系の一次の固有振動数に相当し、走行中レールの継ぎ目、摩擦、そのほかの外乱により、自由振動あるいは自励振動を行なっていると考えられる。第8~11図は起動および停止時のショックによる自由振動の一例である。

実験用エレベータでは、シーブの脈動に系の二次の固有振動が、ロープ長さ 33~35 m 付近で共振するが、エレベータ昇降行程内に共振点がないようにできれば好都合である。現在の鋼索を用いる構造では

(1) シンプルロッド・スプリングのバネ定数を変える。

(2) ロープ張力を変える。

などにより系の固有振動数を変化させることが考えられる。第12~14図にシンプルロッド・スプリングのバネ定数と系の固有振動数の関係、第7図にロープ張力と系の固有振動数との関係を示す。これによると上記の方法で共振点をエレベータ昇降行程外に逃がしうるほど、系の固有振動数を大きく変化させることは困難である。一方シーブの脈動周波数に着目すると、共振点を避ける目的のみを考えれば一次と二次の固有振動数の間に選べばよい。

またエレベータの振動を少なくするには、振動の伝達率を小さくすることがたいせつである。系の伝達率の傾向を見るために無減衰の場合について

(1) シンプルロッド・スプリングのバネ定数を変えた場合

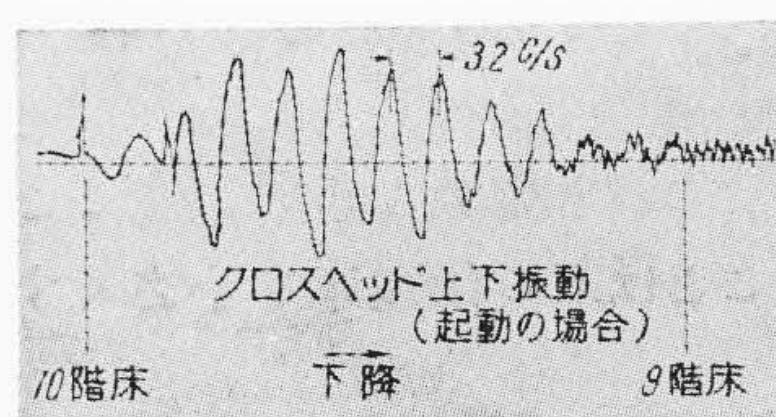
(2) 脈動の周波数(ギヤ噛み合サイクル)を変えた場合

について、(16)式により計算したものをそれぞれ第15, 16図に示す。これによると当然のことながらスプリングはやわらかいほど良い。一方脈動周波数を最近高くする傾向にあるが、高くすれば伝達率は小さくなる。しかし昇降行程の長いエレベータでは、三次の固有振動と共振する場所が現われる危険がある。バネをやわらかくすることと脈動周波数を高くすることは同様な結果になる。すなわち、伝達率が小さくなるとともに、共振付近の曲線の幅が狭くなる。エレベータはある速度で危険区域を通過するから、危険区域の幅が狭いほど、また通過する速度が速いほど、振幅は生長しない。

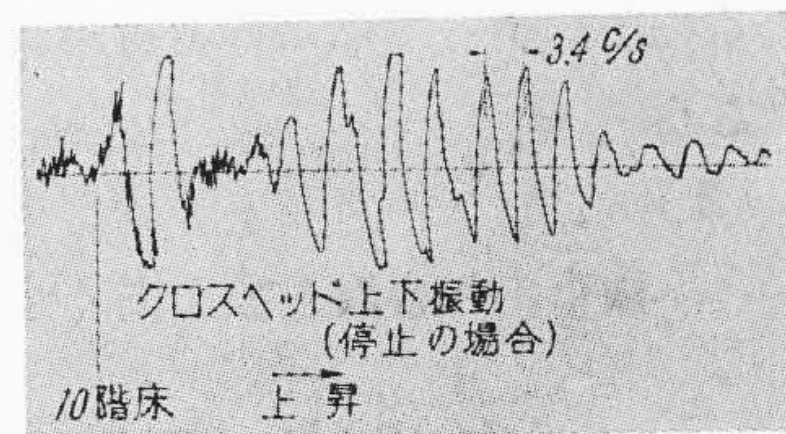
以上、系には減衰はないとして論じてきたが、実際にはガイドレールとかごの摩擦、かごの空気抵抗、あるいはロープやかご自身の内部抵抗などが存在する。摩擦があれば伝達率は上記計算値よりも小さくなる。一例としてかごとガイドレールの間に、粘性抵抗がある場合は(15)式で表わされる。

3.2 ロープの横振動

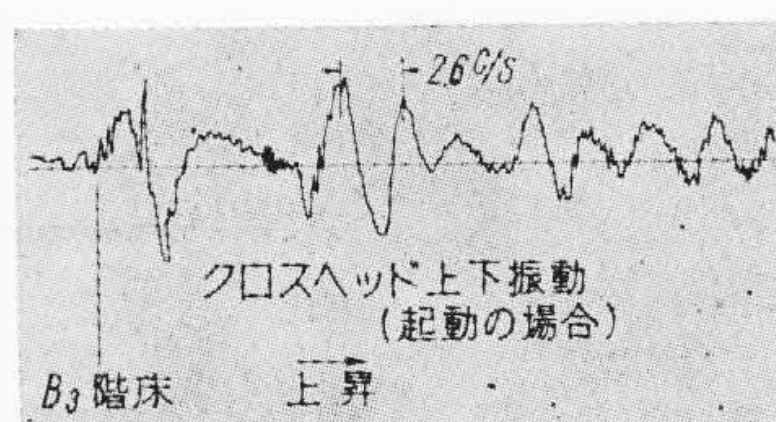
第4図のようなエレベータ下降の場合、振幅は小さいが、32.5 c/s と 16 c/s の二種類の横振動が認められる。前者はシーブ脈動周波数と同一、後者はその半分である。これは2.3節で述べたマッシュー形の振動と考えられる。理論的にはさらに3/2倍、2倍、……とでる



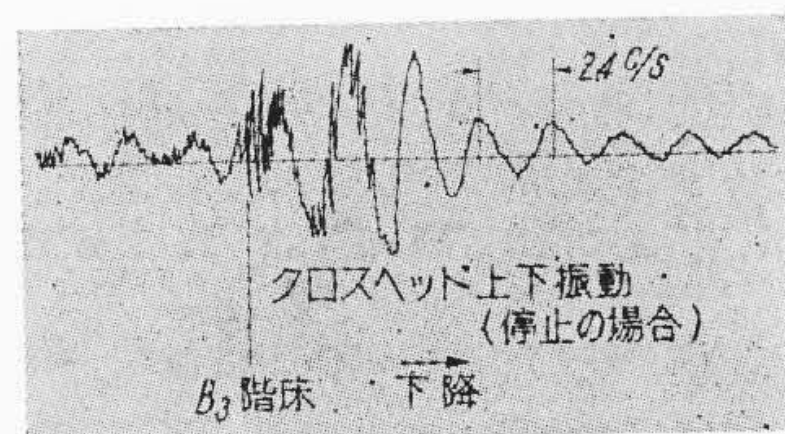
第8図 エレベータ起動時の振動



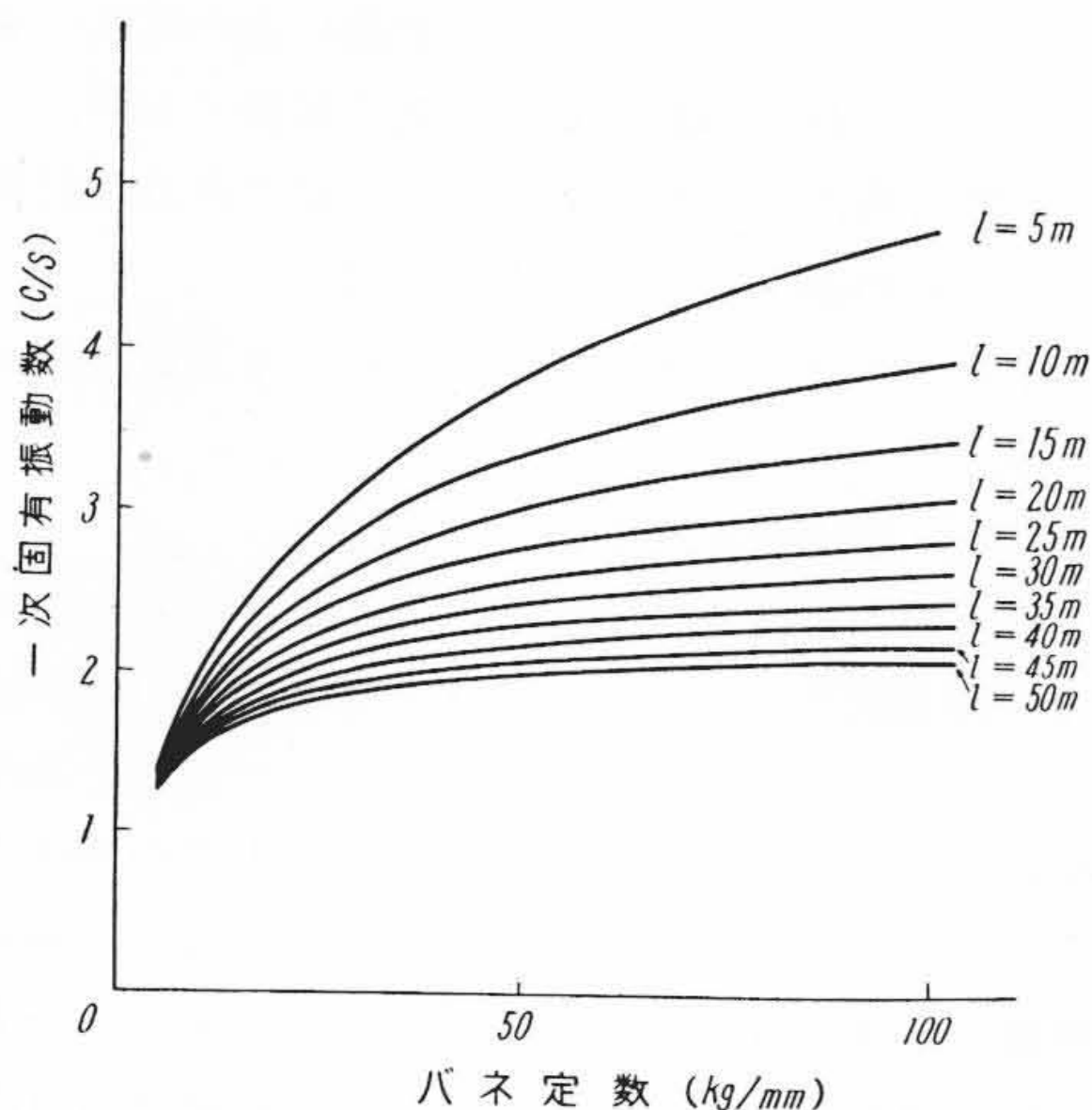
第9図 エレベータ停止時の振動



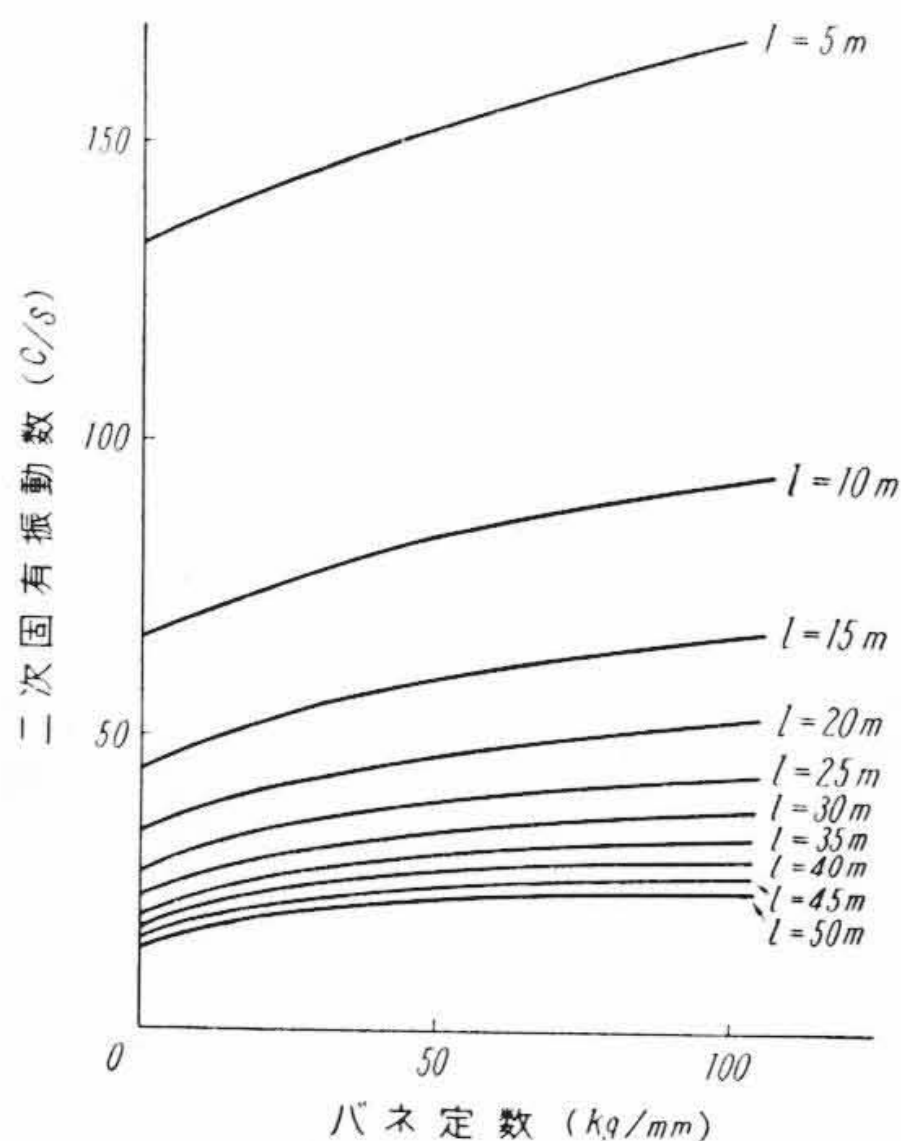
第10図 エレベータ起動時の振動



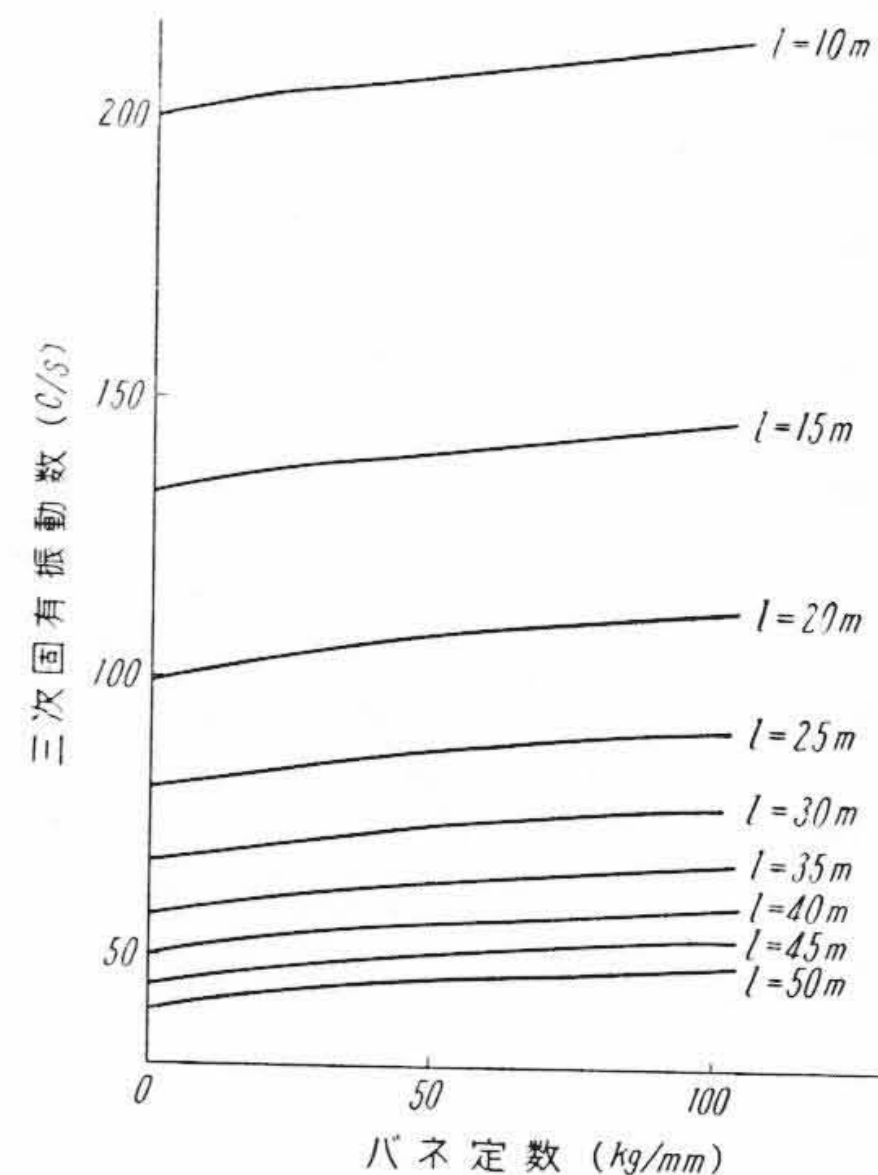
第11図 エレベータ停止時の振動



第 12 図 シンプルロッド・スプリング
のバネ定数と一次固有振動数の関係



第 13 図 シンプルロッド・スプリング
のバネ定数と二次固有振動数の関係



第 14 図 シンプルロッド・スプリング
のバネ定数と三次固有振動数の関係

はずであるが、これらは不安定領域も狭いし、実際には減衰も存在するから現われない。またエレベータは進行しているために不安定領域に長時間存在することはないから、この形の振動が大きく生長することは考えられない。

4. 結 言

このたびの研究により次のことがわかった。

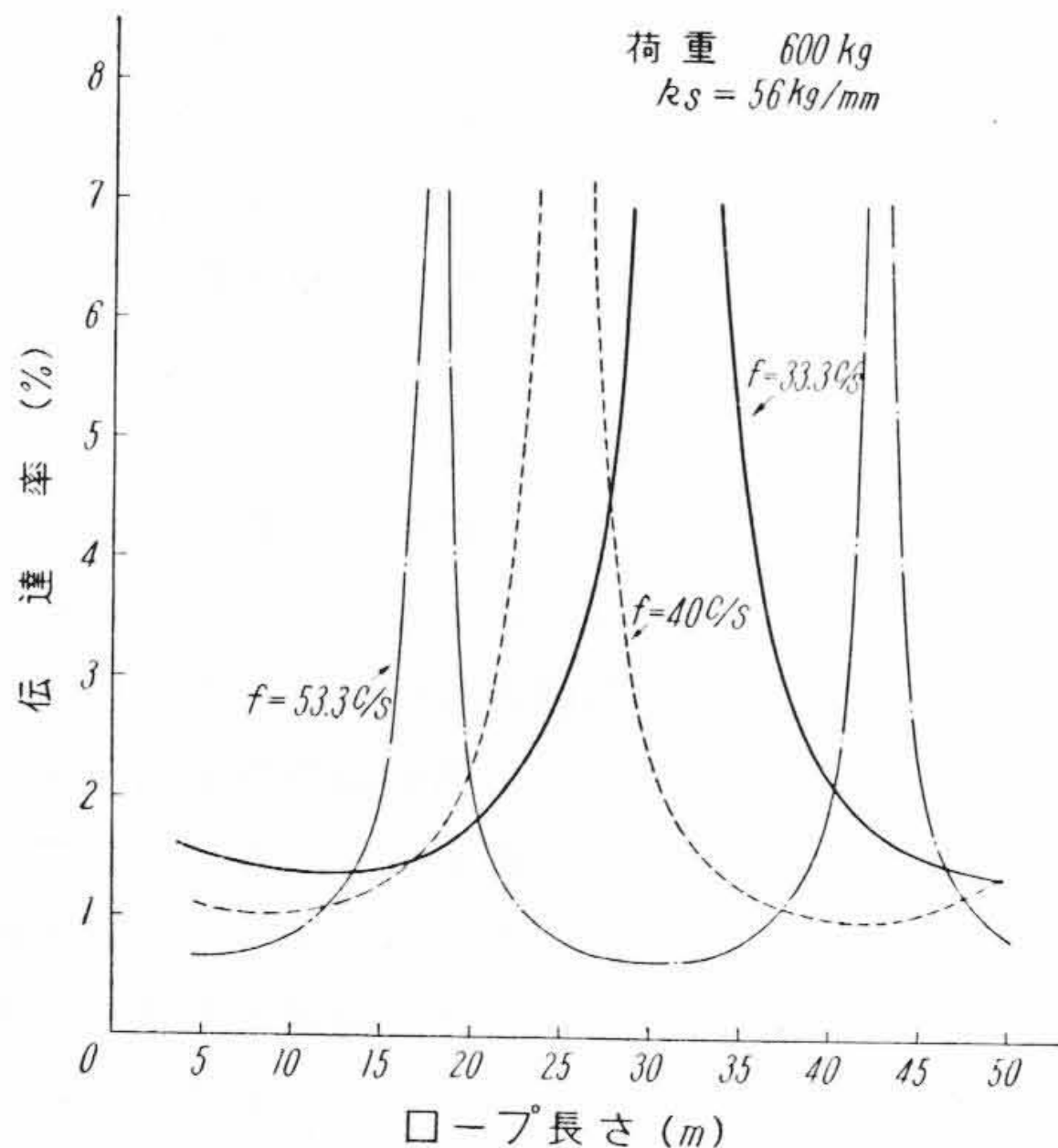
(1) エレベータでは振動波がロープ中を伝わる速度に比較して走行速度がきわめて小さいため、系の振動計算には各ロープ長さの位置に停止しているものとして取扱ってよい。

(2) シンプルロッドの下端を打撃して得られる固有振動数は系の二次固有振動数である。

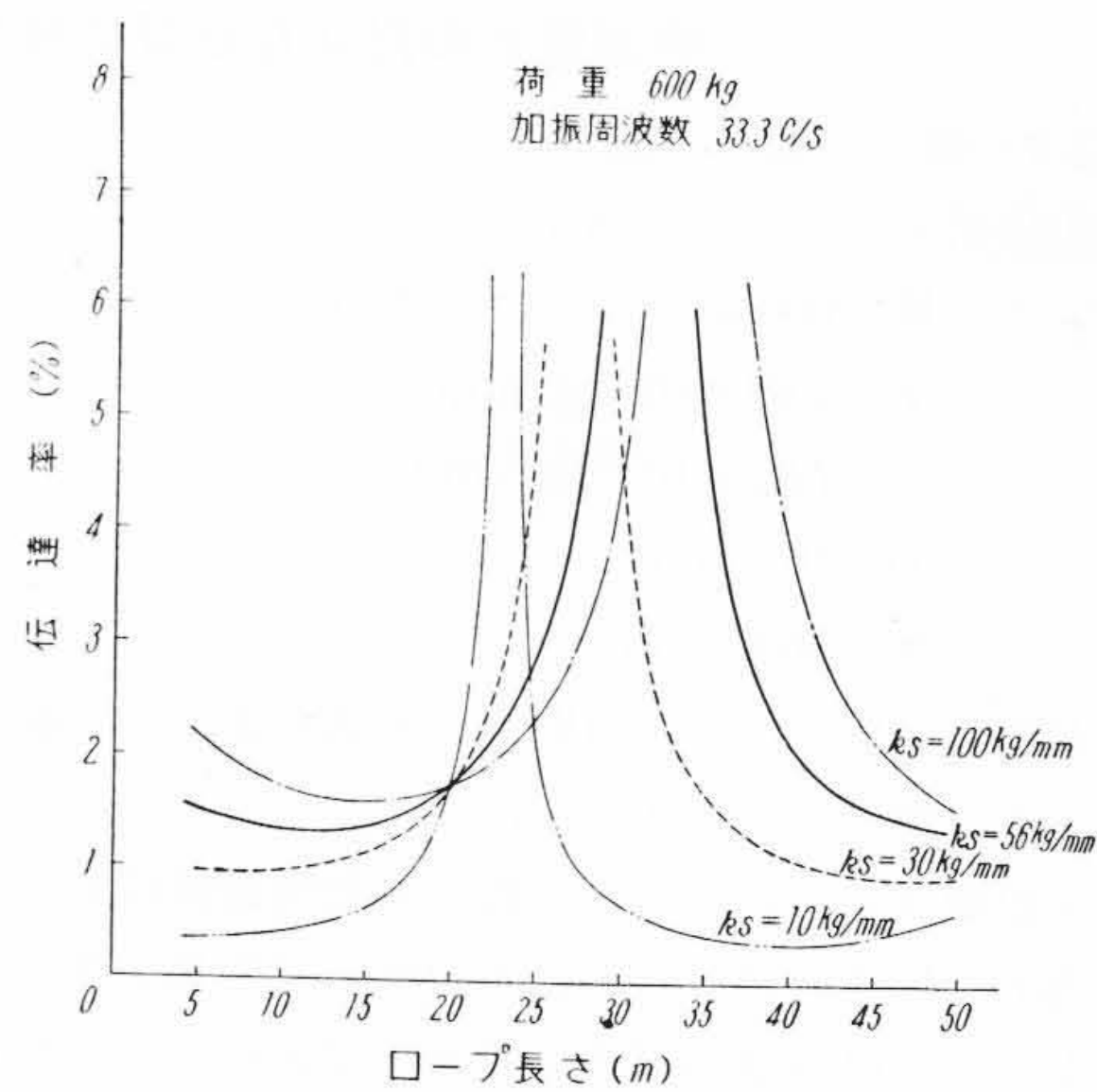
(3) 実験用エレベータではロープ長さが下降時は 33 m, 上昇時は 35 m で、シープ回転脈動に系の二次固有振動が共振した。その際上昇の場合が、下降より低い位置で共振しているのは、ガイドレールの摩擦によるロープ張力の差のためである。

(4) シンプルロッドスプリングのバネ定数やロープ張力を変えることによって系の固有振動数を大きく変化させることは困難である。

(5) シンプルロッド・スプリングのバネ定数を小さくすること、歯車かみ合周波数を高くすることは系の伝達率を小さくす



第 15 図 シンプルロッド・スプリング
のバネ定数と伝達率の関係



第 16 図 回転脈動周波数と伝達率
の関係

る。しかし後者の場合、昇降行程の長いエレベータでは三次の固有振動と共振する位置の現われる危険がある。

(6) エレベータ縦振動がマッシュー形振動に相当するロープの横振動を誘発する場合がある。

終りに臨み、本研究を行なうにあたりご指導を賜った東京大学亘理厚教授、実験にご協力いただいた日立研究所一柳氏、高木氏、国分工場佐藤氏に対し厚く感謝の意を表す。

参 考 文 献

- (1) 亘理厚：機械力学（昭 35，共立全書）
- (2) 坪井忠二：振動論（昭 18，河出書房）