U.D.C. 621.833.389

凹円弧歯形をもつ鼓形ウォーム歯車（第2報）

Hourglass-worm Drives with Concave Arc Tooth Profile (II)

内　田　昭　就*
Akinari Uchida

内　容　梗　概

凹円弧歯形をもつはすば平歯車と鼓形ウォームとを組み合わせたウォーム歯車はすぐれた耐摩耗性を有し，小形量産の軽負荷用ウォーム歯車として好適であることを先に報告したが，さらに主題のウォーム歯車に対し食違軸歯車の理論を適用し，はすば平歯車の歯面，同時接触線，接触点軌跡面，歯面のアフィノール，すべり率，歯面の相対曲率などの解析を行なって，数値計算によって接触領域，ヘルツ応力などを求めることを可能とした。

また以上の解析とともに，インボリュート歯形を有するものについてもあわせて解析し，両者の比較に便ならしめた。

1. 緒　　言

鼓形ウォームとはすば平歯車とを組み合わせたウォーム歯車は小形量産の歯車装置として種々の長所をもっているが，従来使用されているインボリュート歯形をもつものは，欠点として組立誤差があると歯当りは必ずウォームの端部にくる。この片当りのため歯車としての性能を低下させ，ひいては摩耗を早めることにもなる。

さきに筆者ほか1名は適当に設計された凹円弧歯形[1]の採用を提案し，中心距離のつまった場合およびはすば平歯車がその回転方向と逆にずれた場合には片当りを起こさず，その際のはすば平歯車の運動は連続であることを理論的に示した[2]。この間この歯形を家庭電気品の減速歯車として応用し，量産性あることを実証しえた。

以上の結果，首題のウォーム歯車は小形量産の歯車装置として十分の適応性を有し，従来のインボリュート歯形をもつものに比べて卓越した性能を有することが判明したので，引き続き歯形の数学的解析を行なってその性質を研究した。本報告ではその一部として平歯車の歯面，同時接触線，接触点軌跡面，すべり率，歯面の相対曲率などの式の誘導に関して報告する。またインボリュート歯形をもつものについてもあわせて解析して報告する。

2. はすば平歯車の歯面

はすば平歯車の軸を z 軸，ウォーム軸と z 軸との共通垂線を y 軸として第3図のように直角座標を設定する。そのときウォーム軸は軸間距離を e として

$$y=e$$

で表わされる。歯面上の点Pの位置ベクトル $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ は φ を媒介変数，h をはすば平歯車の換算ピッチとして，

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos(\varphi+\delta)\\ y&=r\sin(\varphi+\delta)\\ z&=h\varphi+\zeta(\delta)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

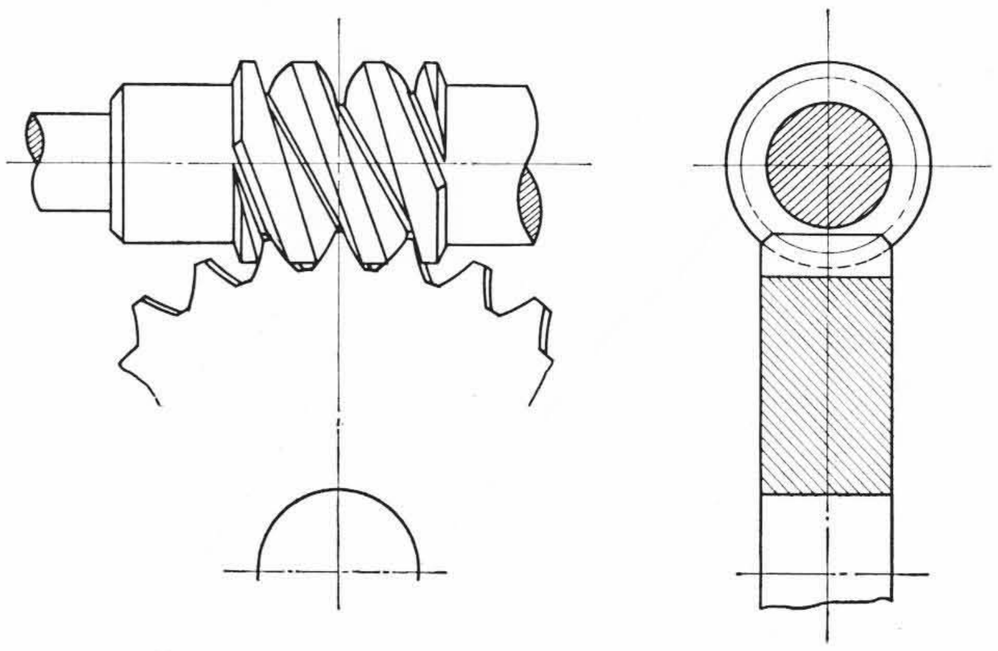
r, δ, $\zeta(\delta)$ の関係を与えれば，はすば平歯車の歯面の式が得られる[3]。

（1）　インボリュート歯形の場合

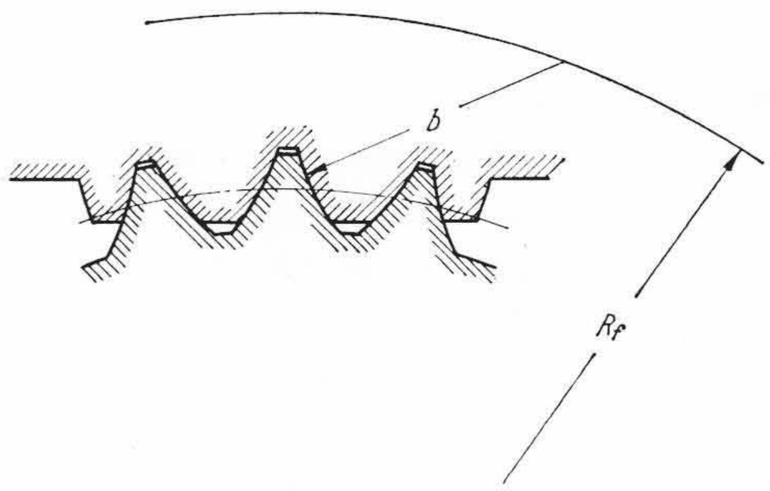
歯面の母曲線として点 $(a,0,0)$ を通り y 軸と角 α をなす直線を選ぶ。(1)式において $\varphi=0$ と置き，母曲線の式(2)を代入して変形すれば(3)式となる。

$$x=a\qquad z=y\tan\alpha\quad\cdots\cdots(2)$$

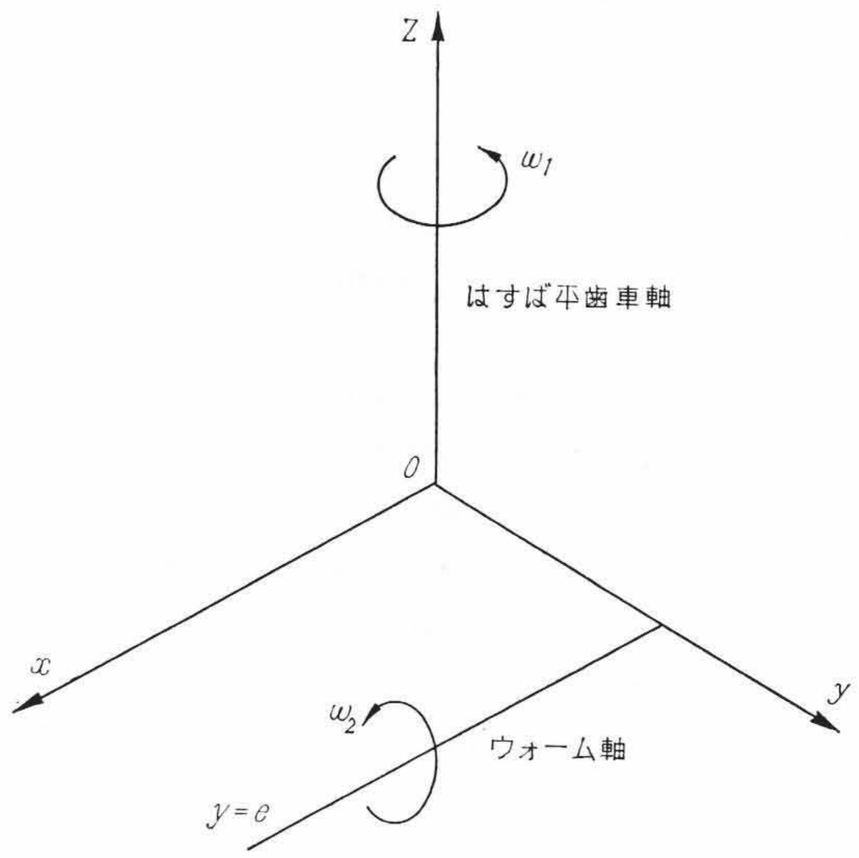
$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi-u\sin\varphi\\ y&=a\sin\varphi+u\cos\varphi\\ z&=h\varphi+u\tan\alpha\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$



第1図　凹円弧歯形をもつ鼓形ウォーム歯車



第2図　凹　円　弧　歯　形



第3図　軸　の　関　係　位　置

* 日立製作所多賀工場

ただし　$u=a\tan\delta$

$$h=a\tan\alpha \quad \cdots\cdots(4)$$

（4）式は線織ネジ面がインボリュートネジ面であるための条件である。（3）式は，$z=0$ の断面上で歯形インボリュートの基点が x 軸上にある歯面の式であるから，これより φ_0 だけ回転したときの歯面は

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi-u\sin\varphi\\ y&=a\sin\varphi+u\cos\varphi\\ z&=h(\varphi-\varphi_0)+u\tan\alpha \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

で与えられる。

（2）　凹円弧歯形の場合

歯面の母曲線として点 $(R_f,0,0)$ を中心とし，$z=0$ の平面上に半径 b なる円弧を選ぶ。（1）式において $\varphi=0$ と置き，x 軸と歯形円弧の半径とのなす角を λ とすると

$$\left.\begin{aligned} x&=R_f-b\cos\lambda=r\cos\delta\\ y&=b\sin\lambda=r\sin\delta\\ z&=\zeta(\delta)=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

（6）式を（1）式に代入して，かつ歯形円弧の中心を $\varphi=\varphi_0$ まで回転せしめると

$$\left.\begin{aligned} x&=R_f\cos\varphi-b\cos(\varphi-\lambda)\\ y&=R_f\sin\varphi-b\sin(\varphi-\lambda)\\ z&=h(\varphi-\varphi_0) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

となる。（7）式によってはすば平歯車の歯面が表わされる。

3. 同 時 接 触 線

第3図において右ねじれのはすば平歯車が角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ をもって回転するとき，ウォームの角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ とする。両歯車は歯面上の点Pで接触しているものとし，P点での両歯車の速度を $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ とする。しかるときは

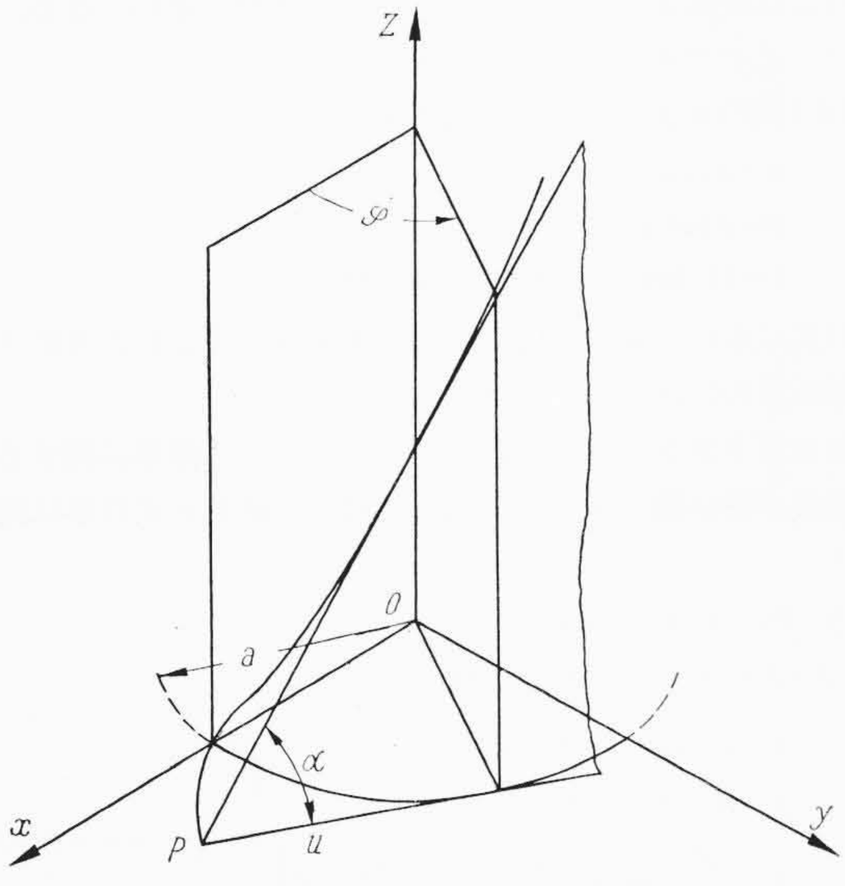
$$\boldsymbol{V}_1=\omega_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\boldsymbol{V}_2=\omega_2\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{r}-e\boldsymbol{j}) \quad \cdots\cdots(9)$$

ここに $|\boldsymbol{\omega}_1|=\omega_1$, $|\boldsymbol{\omega}_2|=\omega_2$ とし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ をそれぞれ座標軸方向の単位ベクトルとする。角速度比 ε，はすば平歯車に対するウォームの相対速度 $\boldsymbol{W}$ は

$$\varepsilon=\frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}&=\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_1\\ &=\omega_2\{\varepsilon y\boldsymbol{i}-(z+\varepsilon x)\boldsymbol{j}+(y-e)\boldsymbol{k}\} \quad \cdots\cdots(11)\end{aligned}$$

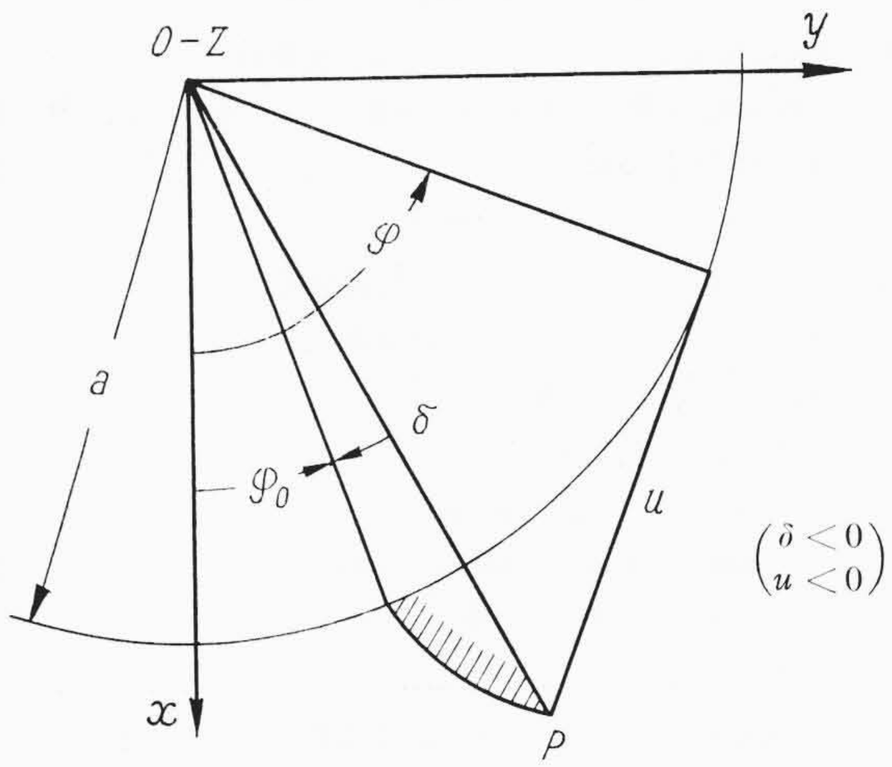


第4図　インボリュートはすば平歯車の歯面

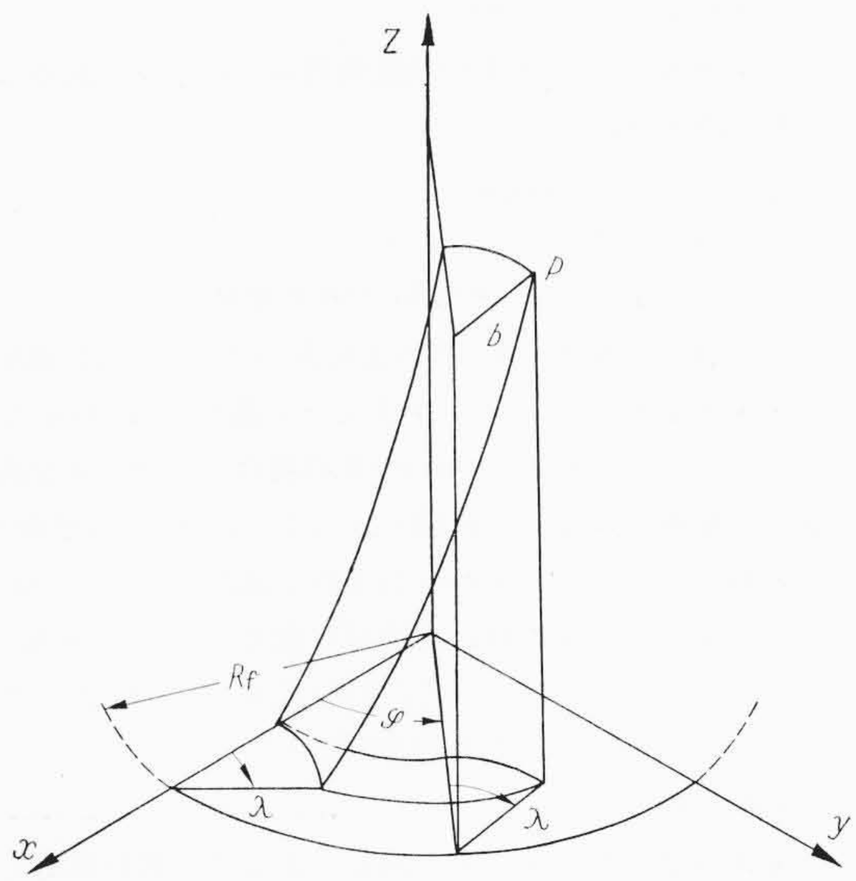
(11)式の x,y,z は後述のかみ合条件より与えられる。

両歯面の共通法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，かみ合条件は

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}=0^{(4)} \quad \cdots\cdots(12)$$



第5図　媒 介 変 数 の 関 係
（インボリュート歯形の場合）



第6図　凹円弧はすば平歯車の歯面

第7図　媒 介 変 数 の 関 係
（凹円弧歯形の場合）

歯面法線 $\boldsymbol{n}$ は歯面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数であり，(15)式で表わされる $\boldsymbol{r}$ の x,y,z は(5)式または(7)式で与えられるから，$\boldsymbol{n}$ は u,φ または λ,φ の関数である。そのとき $\boldsymbol{n}$ は，たとえば u,φ を変数とすれば

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\varphi}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\varphi|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\varphi}{\boldsymbol{r}_u^2\cdot\boldsymbol{r}_\varphi^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_\varphi)^2}\quad^{(5)}\quad\cdots\cdots(13)$$

$\boldsymbol{n}\,//\,\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\varphi$ であるから，(12)式のかみ合条件は

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\varphi)\cdot\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{W}\ \boldsymbol{r}_u\ \boldsymbol{r}_\varphi]=0\cdots\cdots(14)$$

ただし　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ ……(15)

（1）　インボリュート歯形の場合

歯面の式(5)によって(14)式を計算する。

$$\boldsymbol{r}_u=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}+\tan\alpha\,\boldsymbol{k}\cdots\cdots(16)$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}\cdots\cdots(17)$$

(14)式に代入して変形すると

$$\begin{vmatrix}0 & -z & y-e_1\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \tan\alpha\\ -y & x & h\end{vmatrix}=0\cdots\cdots(18)$$

ここに　$e_1=e-\varepsilon h$ ……(19)

はすば平歯車の半径 e_1 なる点での進み角 θ_p とすると

$$h=e_1\tan\theta_p\cdots\cdots(20)$$

(10)式および(20)式を(19)式に代入して

$$\frac{e_1\omega_1}{\cos\theta_p}=\frac{(e-e_1)\omega_2}{\sin\theta_p}\cdots\cdots(21)$$

(21)式は e_1 がはすば平歯車の軸直角刻み円の半径であることを示す。(18)式を展開して

$$z=\frac{-(y-e_1)\cot\alpha}{\cos\varphi}\cdots\cdots(22)$$

$$(u\neq 0,\ \cos\varphi\neq 0)$$

はすば平歯車の歯面（5）式の上にあって (22) 式を満足する点は，$z=0$ の断面におけるインボリュート基点の偏角 φ_0 なる歯の同時接触線である。$u=0$，$\cos\varphi=0$ の場合も (18) 式を満足するから同時接触線となる。式に明らかなように $z=0$ の平面上で $y=e_1$ なる直線上の点はすべてかみ合条件を満足する。この直線上の点における z 方向の速度は，はすば平歯車について $\omega_1 h$，ウォームについて $(e-e_1)\omega_2$ であって，(10)式および(19)式より両者は相等しい。すなわち両式を変形すれば

$$\omega_1 h=(e-e_1)\omega_2\cdots\cdots(23)$$

この結果は普通形ウォームも同じである[4]。数値計算を行なうには(5)式を(22)式に代入して

$$u=u(\varphi)=\{e_1\sec\varphi-a\tan\varphi-h(\varphi-\varphi_0)\tan\alpha\}\cos^2\alpha$$

$$\cdots\cdots(24)$$

(24)式の φ を適当に与えて $u(\varphi)$ を計算し，これを(5)式の u に代入すれば，その回転角における同時接触線を得る。

（2）　凹円弧歯形の場合

歯面の式(7)によって(14)式を計算する。ただし変数は u から λ に変わる。

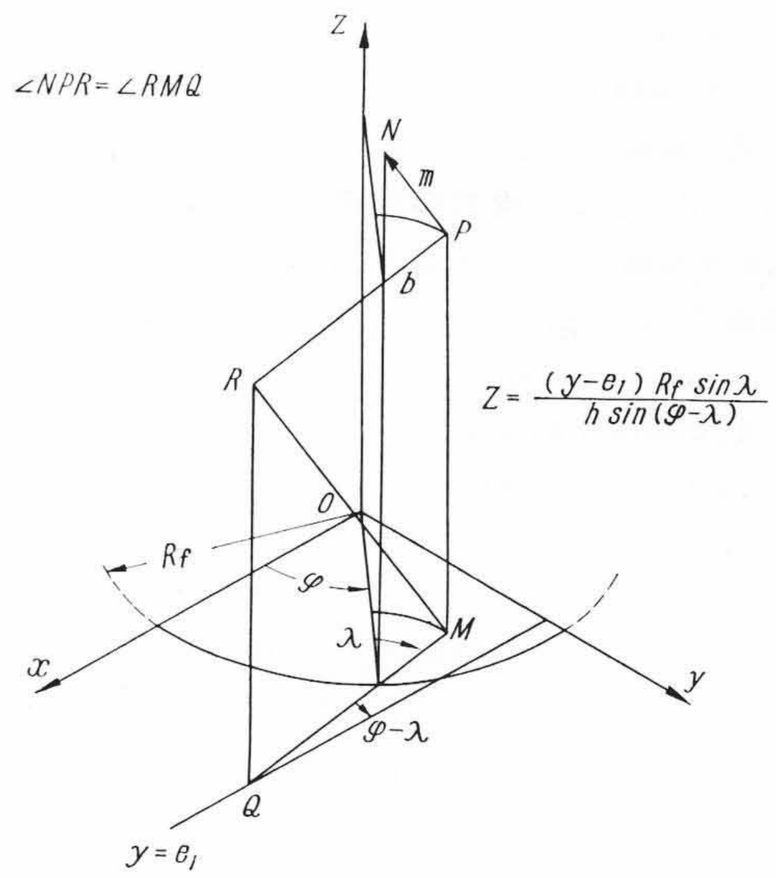
$$\boldsymbol{r}_\lambda=-b\sin(\varphi-\lambda)\boldsymbol{i}+b\cos(\varphi-\lambda)\boldsymbol{j}\cdots\cdots(25)$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}\cdots\cdots(26)$$

(14)式に代入して変形すると

$$\begin{vmatrix}0 & -z & y-e_1\\ -\sin(\varphi-\lambda) & b\cos(\varphi-\lambda) & 0\\ -y & x & h\end{vmatrix}=0\cdots\cdots(27)$$

e_1 は(19)式で与えられ，はすば平歯車の軸直角刻み円の半径を表わす。また，$y=e$，$z=0$ なる直線上の点は(27)式を満足して接触点となり，かつこの点での両歯車の z 方向の速度成分が相等しいことは，前と同様である　(27)式を展開して



第8図　凹円弧歯形の場合の接触点

$$z=\frac{(y-e_1)R_f\sin\lambda}{h\sin(\varphi-\lambda)}\cdots\cdots(28)$$

$$\sin(\varphi-\lambda)\neq 0$$

はすば平歯車の歯面（7）式の上にあって (28) 式を満足する点は，$z=0$ の断面における歯形円弧の中心の偏角 φ_0 なる歯の同時接触線である。$\sin(\varphi-\lambda)=0$ なる点も (28) 式を満足するから同時接触線である。数値計算を行なうには(7)式を(28)式に代入して

$$h(\varphi-\varphi_0)-\frac{R_f}{h}\sin\lambda\left\{\frac{R_f\sin\varphi-e_1}{\sin(\varphi-\lambda)}-b\right\}=0\cdots\cdots(29)$$

いま半径 r なる所での接触点を求めんとすると，**第7図**を参照して

$$\lambda=\cos^{-1}\frac{R_f^2+b^2-r^2}{2R_f b}\cdots\cdots(30)$$

(30)式の λ を(29)式に代入し，それよりニュートンの方法により φ の価を求める。かくして得た φ,λ の価を次々に(7)式に代入すれば，その回転角における同時接触線を得る。

4. 接触点軌跡面

第3章に与えた同時接触線が歯車の回転につれて次第に変化するとき，座標系に対してえがく軌跡が接触点軌跡面である。この曲面上の各点ではかみ合条件が満足されているから，与えられた x,y 座標に対し(22)式または(28)式によって z 座標が求められる。

（1）　インボリュート歯形の場合

(5)式の x,y を(22)式に代入すると，

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos\varphi-u\sin\varphi\\ y&=a\sin\varphi+u\cos\varphi\\ z&=(e_1\sec\varphi-a\tan\varphi-u)\cot\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

(31)式において u,φ を与えれば，x,y およびこれに対応する z の座標が求められる。

なお第3章および第4章のインボリュート歯形に関する式は，酒井氏が精紡機ウォームに関して導いた結果と式の形は同じとなる[4]。

（2）　凹円弧歯形の場合

(7)式の x,y を(28)式に代入すると，

$$\left.\begin{aligned}x&=R_f\cos\varphi-b\cos(\varphi-\lambda)\\ y&=R_f\sin\varphi-b\sin(\varphi-\lambda)\\ z&=\frac{R_f}{h}\sin\lambda\left\{\frac{R_f\sin\varphi-e_1}{\sin(\varphi-\lambda)}-b\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

(32)式において λ, φ を与えれば，x, y およびこれに対応する z の座標が求められる。

5. 歯面のアフィノール

歯面の法線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を (13) 式で与えると，これは(15)式で与えられる歯面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数であるから

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \quad \cdots\cdots(33)$$

これより $d\boldsymbol{r}$ 離れた歯面上の点では

$$\boldsymbol{n}+d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}) \quad \cdots\cdots(34)$$

(34)式の $d\boldsymbol{n}$ はハミルトン演算子 ∇ を用いて

$$d\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n} \quad \cdots\cdots(35)$$

ここに $$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad \cdots\cdots(36)$$

(36)式の演算子は空間内での微分を意味しているのに対し，$\boldsymbol{r}$ および $d\boldsymbol{r}$ は歯面上の点または線素であるから，$\boldsymbol{n}$ が歯面法線としての意味を失わぬように注意しながらその定義を拡張して空間内での微分を可能なようにしなければならない。ここでは酒井氏の方法[4]によってその定義を拡張する。

いますべての歯面法線 $\boldsymbol{n}$ をそのまま自己のすべての法線とするような曲面群を考え，その上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{s}(X, Y, Z)$ を (37) 式で定義する。

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}(u,\varphi)+w\boldsymbol{n}(u,\varphi) \quad \cdots\cdots(37)$$

$\boldsymbol{s}$ は $w=0$ のとき，歯面上の点を表わす。(33)式の $\boldsymbol{n}$ は，また曲面群の上の点 $\boldsymbol{s}$ での法線と考えられるから，$\boldsymbol{s}$ の関数としても表わされる。

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_s(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{n}_s(u,\varphi,w) \quad \cdots\cdots(38)$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は本来 w を含んでいないから(37)式の形では w を有しても，w に関する微分は(33)式の場合と同一でなければならない。よって

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial w}=\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial w}=0 \quad \cdots\cdots(39)$$

(37)式において，$\boldsymbol{s}$ の成分 X, Y, Z は3個の媒介変数 u, φ, w の関数である。ここで独立変数と従属変数とを変換すると

$$u=u(X,Y,Z) \qquad \varphi=\varphi(X,Y,Z) \qquad w=w(X,Y,Z) \quad \cdots\cdots(40)$$

(38)式および(40)式によって，$\boldsymbol{n}$ は空間内で微分することができるようになる。歯面上の線素 $d\boldsymbol{r}$ も曲面群の線素 $d\boldsymbol{s}$ となるから，(33)式も書き直されて

$$d\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{s}\cdot\nabla\boldsymbol{n} \quad \cdots\cdots(41)$$

(38)式によって拡張して定義された $\boldsymbol{n}$ を演算子(36)式に作用させ，(39)式(40)式に留意して計算する。

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{n}&=\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial X}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial Y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial Z}\\&=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)\\&\quad+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)\\&\quad+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial Z}+\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial Z}\right)\\&=\nabla u\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u}+\nabla\varphi\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi} \quad \cdots\cdots(42)\end{aligned}$$

∇u はスカラー u に (36) 式の演算子を作用させて得られる u のこう配ベクトルである。∇u と $\partial\boldsymbol{n}/\partial u$ との積は(42)式のみでは定義されない不定積であって，アフィノールと呼ばれる[6]。$\nabla\varphi\dfrac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi}$ も同様であり，これらの和である $\nabla\boldsymbol{n}$ もまたアフィノールである。

(42)式のアフィノールに左からベクトル $d\boldsymbol{s}$ をスカラー積すれば，(41)式が得られる。そこで $w=0$ とすれば(34)式の歯面法線の変化 $d\boldsymbol{n}$ が得られる。

(1) インボリュート歯形の場合

歯面の法線 $\boldsymbol{n}$ は，(13)式によって

$$\boldsymbol{n}=\sin\alpha\sin\varphi\,\boldsymbol{i}-\sin\alpha\cos\varphi\,\boldsymbol{j}+\cos\alpha\,\boldsymbol{k} \quad \cdots\cdots(43)$$

(43)式より

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u}=\boldsymbol{n}_u=0 \quad \cdots\cdots(44)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi}=\boldsymbol{n}_\varphi=\sin\alpha\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\alpha\sin\varphi\,\boldsymbol{j} \quad \cdots\cdots(45)$$

(43)式の歯面法線 $\boldsymbol{n}$ を用いて(37)式の曲面群 $\boldsymbol{s}$ を作る。$\boldsymbol{s}$ をその成分 X, Y, Z に分けて表わすと，

$$\left.\begin{aligned}X&=a\cos\varphi-u\sin\varphi+w\sin\alpha\sin\varphi\\Y&=a\sin\varphi+u\cos\varphi-w\sin\alpha\cos\varphi\\Z&=h\varphi+u\tan\alpha+w\cos\alpha\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(46)$$

X, Y を自乗して加え，整理すると

$$u-w\sin\alpha=\pm\sqrt{X^2+Y^2-a^2} \quad \cdots\cdots(47)$$

複号は(50)式で相殺されるから，いずれをとってもさしつかえない。便宜上，正を使用して w を消去する。

$$X=a\cos\varphi-\sqrt{X^2+Y^2-a^2}\sin\varphi \quad \cdots\cdots(48)$$

$$Y=a\sin\varphi+\sqrt{X^2+Y^2-a^2}\cos\varphi \quad \cdots\cdots(49)$$

(48)式を X に関して偏微分し $\partial\varphi/\partial X$ を求める。

$$1=-a\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial X}-\frac{X\sin\varphi}{\sqrt{X^2+Y^2-a^2}}-\sqrt{X^2+Y^2-a^2}\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial X}$$

(47)，(48)の両式を用いて整理すると，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}=\frac{-\cos\varphi}{u-w\sin\alpha} \quad \cdots\cdots(50)$$

同様に Y, Z に関して偏微分し，$\partial\varphi/\partial Y$，$\partial\varphi/\partial Z$ を求めると，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y}=\frac{-\sin\varphi}{u-w\sin\alpha} \quad \cdots\cdots(51)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Z}=0 \quad \cdots\cdots(52)$$

(50)，(51)，(52)式は $\nabla\varphi$ の X, Y, Z 方向の成分を与える。(42)式の第1項は (44) 式によって0となるから，∇u の各成分は求める必要がない。よって以上の各式を(42)式に代入して曲面群のアフィノールを求めることができる。

$$e\,\Delta\boldsymbol{n}=\left(\frac{-\cos\varphi}{u-w\sin\alpha}\boldsymbol{i}+\frac{-\sin\varphi}{u-w\sin\alpha}\boldsymbol{j}\right)\times(\sin\alpha\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\alpha\sin\varphi\,\boldsymbol{j}) \quad \cdots\cdots(53)$$

$w=0$ とすれば歯面のアフィノールを得る。

$$\nabla\boldsymbol{n}=\frac{-\sin\alpha}{u}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j})(\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j}) \quad \cdots\cdots(54)$$

(2) 凹円弧歯形の場合

歯面の法線 $\boldsymbol{n}$ は，(13)式によって

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\times\{h\cos(\varphi-\lambda)\boldsymbol{i}+h\sin(\varphi-\lambda)\boldsymbol{j}+R_f\sin\lambda\boldsymbol{k}\} \quad \cdots\cdots(55)$$

(55)式より

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\varphi}=\boldsymbol{n}_\varphi=\frac{-h}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\{\sin(\varphi-\lambda)\boldsymbol{i}-\cos(\varphi-\lambda)\boldsymbol{j}\} \quad \cdots\cdots(56)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\lambda}=\boldsymbol{n}_\lambda=-\boldsymbol{n}_\varphi+\frac{R_f\cos\lambda}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\boldsymbol{k}-\frac{R_f^2\sin\lambda\cos\lambda}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\boldsymbol{n} \quad \cdots\cdots(57)$$

(55)式の歯面法線を用いて(37)式の曲面群 $\boldsymbol{s}$ を作る。$\boldsymbol{s}$ をその成分 X, Y, Z に分けて表わす。

$$\left.\begin{aligned} X&=R_f\cos\varphi-b\cos(\varphi-\lambda)+\frac{wh\cos(\varphi-\lambda)}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\\ Y&=R_f\sin\varphi-b\sin(\varphi-\lambda)+\frac{wh\sin(\varphi-\lambda)}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\\ Z&=h\varphi+\frac{wR_f\sin\lambda}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(58)$$

X, Y を自乗して加え，整理すると

$$b-\frac{wh}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}=R_f\cos\lambda\pm\sqrt{R_f^2\cos^2\lambda+X^2+Y^2-R_f^2}\quad\cdots(59)$$

複号は(65)式などで相殺されるから，いずれをとってもさしつかえない。便宜上，正を使用して w を消去する。簡単のために(59)式の右辺を P と置いて

$$X=R_f\cos\varphi-P\cos(\varphi-\lambda)\quad\cdots(60)$$

$$Y=R_f\sin\varphi-P\sin(\varphi-\lambda)\quad\cdots(61)$$

$$Z=h\varphi+\frac{R_f}{h}(b-P)\sin\lambda\quad\cdots(62)$$

(60)，(62)式を X に関して偏微分し $\partial\varphi/\partial X$，$\partial\lambda/\partial X$ を求める。

$$Y\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\left\{\cos(\varphi-\lambda)\frac{\partial P}{\partial\lambda}+P\sin(\varphi-\lambda)\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial X}=-\cos(\varphi-\lambda)\frac{\partial P}{\partial X}-1\quad\cdots(63)$$

$$h\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\frac{R_f}{h}\left\{(b-P)\cos\lambda-\sin\lambda\frac{\partial P}{\partial\lambda}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial X}=\frac{R_f}{h}\sin\lambda\frac{\partial P}{\partial X}\quad\cdots(64)$$

(59)式より

$$\frac{\partial P}{\partial\lambda}=\frac{-R_f\sin\lambda\cdot P}{P-R_f\cos\lambda}\quad\cdots(65)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X}=\frac{X}{P-R_f\cos\lambda}\quad\cdots(66)$$

(63)，(64)の両式より $\partial\varphi/\partial X$，$\partial\lambda/\partial X$ を求め，(65)，(66)式を用いて整理する。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}=\frac{R_f\left\{T\sin(\varphi-\lambda)+\frac{PX}{h}\sin\lambda\right\}}{(P-R_f\cos\lambda)(R_fT+Ph)}\quad\cdots(67)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial X}=\frac{\frac{1}{h}R_fX\sin\lambda-h\sin(\varphi-\lambda)}{(P-R_f\cos\lambda)(R_fT+Ph)}\quad\cdots(68)$$

ただし

$$T=\frac{1}{h}\{(b-P)(P-R_f\cos\lambda)\cos\lambda+PR_f\sin^2\lambda\}$$

同様に(61)，(62)式を Y に関して偏微分し $\partial\varphi/\partial Y$，$\partial\lambda/\partial Y$ を求める。

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial Y}-\left\{\sin(\varphi-\lambda)\frac{\partial P}{\partial\lambda}-P\cos(\varphi-\lambda)\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial Y}=\sin(\varphi-\lambda)\frac{\partial P}{\partial Y}+1\quad\cdots(69)$$

$$h\frac{\partial\varphi}{\partial Y}+\frac{R_f}{h}\left\{(b-P)\cos\lambda-\sin\lambda\frac{\partial P}{\partial\lambda}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial Y}=\frac{R_f}{h}\sin\lambda\frac{\partial P}{\partial Y}\quad\cdots(70)$$

(59)式より

$$\frac{\partial P}{\partial Y}=\frac{Y}{P-R_f\cos\lambda}\quad\cdots(71)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y}=\frac{R_f\left\{-T\cos(\varphi-\lambda)+\frac{PY}{h}\sin\lambda\right\}}{(P-R_f\cos\lambda)(R_fT+Ph)}\quad\cdots(72)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial Y}=\frac{\frac{1}{h}R_fY\sin\lambda+h\cos(\varphi-\lambda)}{(P-R_f\cos\lambda)(R_fT+Ph)}\quad\cdots(73)$$

(61)，(62)式を Z に関して偏微分し $\partial\varphi/\partial Z$，$\partial\lambda/\partial Z$ を求める。

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\left\{\sin(\varphi-\lambda)\frac{\partial P}{\partial\lambda}-P\cos(\varphi-\lambda)\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial Z}=\sin(\varphi-\lambda)\frac{\partial P}{\partial Z}\quad\cdots(74)$$

$$h\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{R_f}{h}\left\{(b-P)\cos\lambda-\sin\lambda\frac{\partial P}{\partial\lambda}\right\}=\frac{R_f}{h}\sin\lambda\frac{\partial P}{\partial Z}+1\quad\cdots(75)$$

(59)式より

$$\frac{\partial P}{\partial Z}=0\quad\cdots(76)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Z}=\frac{P}{R_fT+Ph}\quad\cdots(77)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial Z}=\frac{P-R_f\cos\lambda}{R_fT+Ph}\quad\cdots(78)$$

(67)式ないし(78)式の $\partial\varphi/\partial X$, $\partial\lambda/\partial X$などは $\nabla\varphi$ および $\nabla\lambda$ の X, Y, Z 方向の成分を与える。これらと(56)，(57)式とを(42)式に代入して曲面群のアフィノールを得る。さらに $w=0$ とすれば歯面のアフィノールを得る。

$w=0$ として

$$P=b\qquad T=\frac{bR_f\sin^2\lambda}{h}$$

$$X=x\qquad Y=y\qquad Z=z$$

このとき $\partial\varphi/\partial X$ などは次のようになる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}=\frac{-R_f\sin\lambda\cos(\varphi-\lambda)}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\quad\cdots(79)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y}=\frac{-R_f\sin\lambda\sin(\varphi-\lambda)}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\quad\cdots(80)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Z}=\frac{h}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\quad\cdots(81)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial X}=\frac{\partial\varphi}{\partial X}-\frac{h^2\sin(\varphi-\lambda)-R_f^2\sin\lambda\cos\varphi}{b(R_f^2\sin^2\lambda+h^2)}\quad\cdots(82)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial Y}=\frac{\partial\varphi}{\partial Y}+\frac{h^2\cos(\varphi-\lambda)+R_f^2\sin\lambda\sin\varphi}{b(R_f^2\sin^2\lambda+h^2)}\quad\cdots(83)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial Z}=\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\frac{hR_f\cos\lambda}{b(R_f^2\sin^2\lambda+h^2)}\quad\cdots(84)$$

6. すべり率

はすば平歯車と鼓形ウォームとの時刻 t における接触点をP，時刻 $t+dt$ における接触点を P_1' とする。はすば平歯車について両時刻の間の接触点の移動を考えると，**第9図**の関係から次のようになる。

P は dt 時間内に $\boldsymbol{V}_1dt$ だけ移動して，はすば平歯車の歯面上の点 P' にくる。

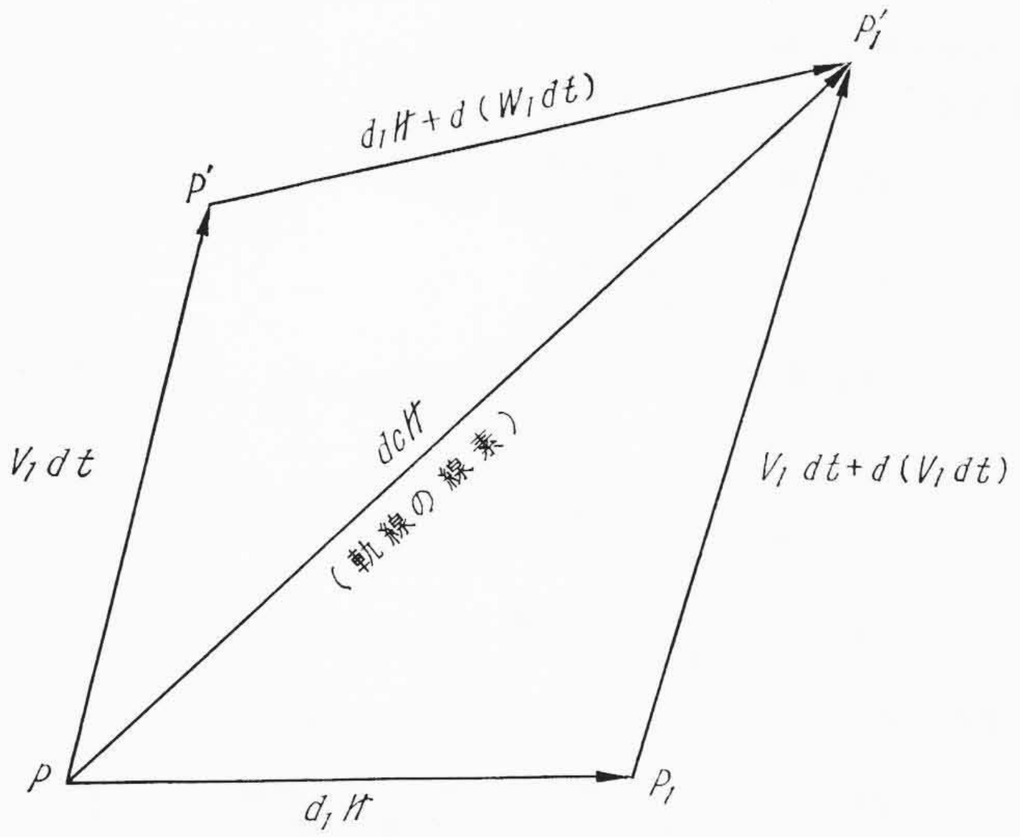
時刻 $t+dt$ において P_1' となるべき点は，時刻 t においては，はすば平歯車の歯面車の歯面上 P より $d_1\boldsymbol{r}$ の点 P_1 にあり，dt 時間内に $\boldsymbol{V}_1dt+d(\boldsymbol{V}_1dt)$ だけ移動して P_1' にくる。

Pは接触点軌跡面上を $d_c\boldsymbol{r}$ だけ移動して P_1' にくる。

第9図より明らかなように

$$P'P_1'=d_1\boldsymbol{r}+d(\boldsymbol{V}_1dt)$$

PP_1，$P'P_1'$ は歯面上に固定された線素であって，その大きさは変らないから



第9図　すべり線の線素と軌線の線素

$$|\overrightarrow{PP_1}|=|\overrightarrow{P'P_1'}|=|d_1\boldsymbol{r}|$$

したがって $d(\boldsymbol{V}_1dt)$ はベクトルの方向を変えるのみである。かつ $\boldsymbol{V}_1dt$ に対し高次の微少量であるから省略すると

$$d_c\boldsymbol{r}=d_1\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}_1dt=\boldsymbol{V}_3dt \quad \cdots\cdots(85)$$

ここに $\boldsymbol{V}_3$ は接触点Pが接触点軌跡面上を移動する速度である。(85)式より

$$d_1\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{V}_3-\boldsymbol{V}_1)dt \quad \cdots\cdots(86)$$

鼓形ウォームについても同様に考え，サフィックス1を2に交換して表わす。ただし接触点は共通であるから P_1' と P_2' とは同一の点となる。

$$d_2\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{V}_3-\boldsymbol{V}_2)dt \quad \cdots\cdots(87)$$

いま両歯車の歯面上と接触点軌跡面上とにそれぞれ $d_1\boldsymbol{r}, d_2\boldsymbol{r}, d_c\boldsymbol{r}$ を線素とする曲線を描くと，$d_1\boldsymbol{r}$, $d_2\boldsymbol{r}$ を線素とするものがすべり線となり，$d_c\boldsymbol{r}$ を線素とするものが軌線となる[4]。この三曲線は歯車の回転につれて互いに同一の点で接しながら空間を移動する。P_1, P_2 は dt 時間に接すべき点として一対のすべり線上にあるから，すべり線は相対速度の方向にある。よってその線素 $d_1\boldsymbol{r}, d_2\boldsymbol{r}$ も $\boldsymbol{W}$ と同一方向でなければならない。ν_1, ν_2 を比例定数として

$$\boldsymbol{V}_3-\boldsymbol{V}_1=\nu_1(\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_1)=\nu_1\boldsymbol{W} \quad \cdots\cdots(88)$$

$$\boldsymbol{V}_3-\boldsymbol{V}_2=\nu_2(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)=-\nu_2\boldsymbol{W} \quad \cdots\cdots(89)$$

(88)式より(89)式を減じて ν_1 と ν_2 の間の関係を求める。

$$\nu_1+\nu_2=1 \quad \cdots\cdots(90)$$

一対のすべり線の間で定義される滑り率 σ_1, σ_2 は

$$\sigma_1=\frac{d_1\boldsymbol{r}-d_2\boldsymbol{r}}{d_1\boldsymbol{r}}=\frac{1}{\nu_1} \quad \cdots\cdots(91)$$

$$\sigma_2=\frac{d_2\boldsymbol{r}-d_1\boldsymbol{r}}{d_2\boldsymbol{r}}=\frac{1}{\nu_2} \quad \cdots\cdots(92)$$

$d_1\boldsymbol{r}, d_2\boldsymbol{r}$ は同じ方向のベクトルであるから，(91)，(92)式の除法は一義的に確定する。

時刻 t における P_1 での歯面法線は，(35)式より

$$\boldsymbol{n}+d_1\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n}$$

時刻 $t+dt$ の P_1' における歯面法線を $\boldsymbol{n}+d\boldsymbol{n}$，相対速度を $\boldsymbol{W}+d\boldsymbol{W}$ とすると，dt 時間内での歯車の回転の影響は

$$\boldsymbol{\omega}_1dt\times(\boldsymbol{n}+d_1\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n})=\boldsymbol{\omega}_1dt\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\omega}_1dt\times d_1\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n} \quad \cdots(93)$$

両者をあわせて歯面法線の変化 $d\boldsymbol{n}$ は(94)式となる。

$$d\boldsymbol{n}=d_1\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{n}dt \quad \cdots\cdots(94)$$

ただし(93)式の $\boldsymbol{\omega}_1dt\times d_1\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n}$ は高次微小量であるから省略する。

(8)，(9)式を用いて(10)式を書き直すと，

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\omega}_2\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{e})-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{e} \quad \cdots\cdots(95)$$

ここに　$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1$　　$\boldsymbol{e}=e\boldsymbol{j}$

(95)式を軌線上で微分する[5]と，

$$d\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\omega}\times d_c\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\omega}_2\times d\boldsymbol{e}-d\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{e} \quad \cdots\cdots(96)$$

歯車の回転の角速度は場所によって変らないから位置に対応する微分は0となる。また $\boldsymbol{e}$ は両歯車軸の共通垂線ベクトルであるから一定である。よって

$$d\boldsymbol{\omega}_2=0 \qquad d\boldsymbol{\omega}=0 \qquad d\boldsymbol{e}=0$$

となって

$$d\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\omega}\times d_c\boldsymbol{r} \quad \cdots\cdots(97)$$

P_1' においてかみ合条件を入れ，高次の項は省略して整理すると，

$$(\boldsymbol{n}+d\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{W}+d\boldsymbol{W})=0 \quad \cdots\cdots(98)$$

$$\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{W}=0 \quad \cdots\cdots(99)$$

(85)，(95)，(97)の各式を代入し，$\boldsymbol{W}\cdot(d_1\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{n})=d_1\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})$ なることに注意して整理すると

$$d_1\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{W})dt \quad \cdots(100)$$

簡単のために，(100)式の右辺のカッコ内を $\boldsymbol{q}$ と置き，(86)，(88)式を代入して

$$\sigma_1=\frac{\boldsymbol{W}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}} \quad \cdots\cdots(101)$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_1}{\sigma_1-1} \quad \cdots\cdots(102)$$

なお $\boldsymbol{q}$ に(8)，(9)式を代入すれば

$$\boldsymbol{q}=\omega_1\omega_2(-z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{k}) \quad \cdots\cdots(103)$$

(1)　インボリュート歯形の場合

(11)，(43)，(54)の各式を参照してはすば平歯車のすべり率 σ_1 を計算する。

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}=\omega_1\omega_2(-z\sin\alpha\sin\varphi+x\cos\alpha) \quad \cdots\cdots(104)$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}=-\omega_1\sin\alpha\cos\varphi\boldsymbol{i}-(\omega_1\sin\alpha\sin\varphi+\omega_2\cos\alpha)\boldsymbol{j}-\omega_2\sin\alpha\cos\varphi\boldsymbol{k} \quad \cdots\cdots(105)$$

$$\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}=-\left(\omega_1-\frac{\omega_2\sin\varphi}{u}z\right)\sin\alpha\cos\varphi\boldsymbol{i}-\left(\omega_1-\frac{\omega_2\sin\varphi}{u}z\right)\sin\alpha\sin\varphi\boldsymbol{j} \quad \cdots\cdots(106)$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}=-\omega_2\left\{\frac{z}{u}\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi\boldsymbol{i}+\left(\cos\alpha+\frac{z}{u}\sin\alpha\sin^2\varphi\right)\boldsymbol{j}+\sin\alpha\cos\varphi\boldsymbol{k}\right\} \quad \cdots\cdots(107)$$

(11)，(104)，(107)の各式を(101)式に代入して

$$\sigma_1=\frac{-1}{\varepsilon(-z\sin\alpha\sin\varphi+x\cos\alpha)}\left\{\frac{\varepsilon}{u}yz\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi-(z+\varepsilon x)\left(\frac{z}{u}\sin\alpha\sin^2\varphi+\cos\alpha\right)+(y-e)\sin\alpha\cos\varphi\right\} \quad \cdots\cdots(108)$$

(2)　凹円弧歯形の場合

(11)，(55)および(79)以下の各式を参照してはすば平歯車のすべり率 σ_1 を計算する。

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}=\frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\{-hz\cos(\varphi-\lambda)+R_fx\sin\lambda\} \quad \cdots\cdots(109)$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}=\frac{\omega_2}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}[\varepsilon h\sin(\varphi-\lambda)\boldsymbol{i}-\{\varepsilon h\cos(\varphi-\lambda)+R_f\sin\lambda\}\boldsymbol{j}+h\sin(\varphi-\lambda)\boldsymbol{k}] \quad \cdots\cdots(110)$$

$\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の各成分に分けて表わすと，

$$\boldsymbol{i}:\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}-\frac{\partial\lambda}{\partial X}\right)\boldsymbol{n}_\varphi\cdot\boldsymbol{W}+\left\{\frac{R_f\cos\lambda}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{W}\right.$$

$$-\frac{R_f^2\sin\lambda\cos\lambda}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}\Big\}\frac{\partial\lambda}{\partial X}$$

$$\boldsymbol{j}:\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}-\frac{\partial\lambda}{\partial Y}\right)\boldsymbol{n}_\varphi\cdot\boldsymbol{W}+\left\{\frac{R_f\cos\lambda}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{W}-\frac{R_f^2\sin\lambda\cos\lambda}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial Y}$$

$$\boldsymbol{k}:\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\frac{\partial\lambda}{\partial Z}\right)\boldsymbol{n}_\varphi\cdot\boldsymbol{W}+\left\{\frac{R_f\cos\lambda}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{W}-\frac{R_f^2\sin\lambda\cos\lambda}{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial Z}$$

ただし

$$\boldsymbol{n}_\varphi\cdot\boldsymbol{W}=\frac{-\omega_2 h}{\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}}\{z\cos(\varphi-\lambda)+\varepsilon(R_f\cos\lambda-b)\}\quad\cdots\cdots(111)$$

すべり率は接触点について求めるから，かみ合条件(12)式または(28)式を考慮して整理し，(101)式に代入して

$$\sigma_1=\frac{-1}{\varepsilon b\sin\lambda\{hz\cos(\varphi-\lambda)-R_f x\sin\lambda\}}\big[\{hz\cos(\varphi-\lambda)-R_f x\sin\lambda\}\times(z\sin\varphi-\varepsilon b\sin\lambda)+bh(y-e)\sin\lambda\sin(\varphi-\lambda)+yz\{R_f\cos\varphi\sin\lambda+(y-e_1)\cos\lambda\}\big]\quad\cdots\cdots(112)$$

7. 歯面の相対曲率

前章に述べたように，接触点 P, P_1' におけるすべり線の切線の方向はその点の相対速度 $\boldsymbol{W}$ および $\boldsymbol{W}+d\boldsymbol{W}$ の方向である。P_1 におけるすべり線の方向は，回転角 $\boldsymbol{\omega}_1 dt$ の影響を受けて(113)式となる。

$$\boldsymbol{W}+d\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{W}dt\quad\cdots\cdots(113)$$

(85)式と(97)式を(88)式を用いて書き直し

$$d_c\boldsymbol{r}=(\nu_1\boldsymbol{W}+\boldsymbol{V}_1)dt\quad\cdots\cdots(114)$$

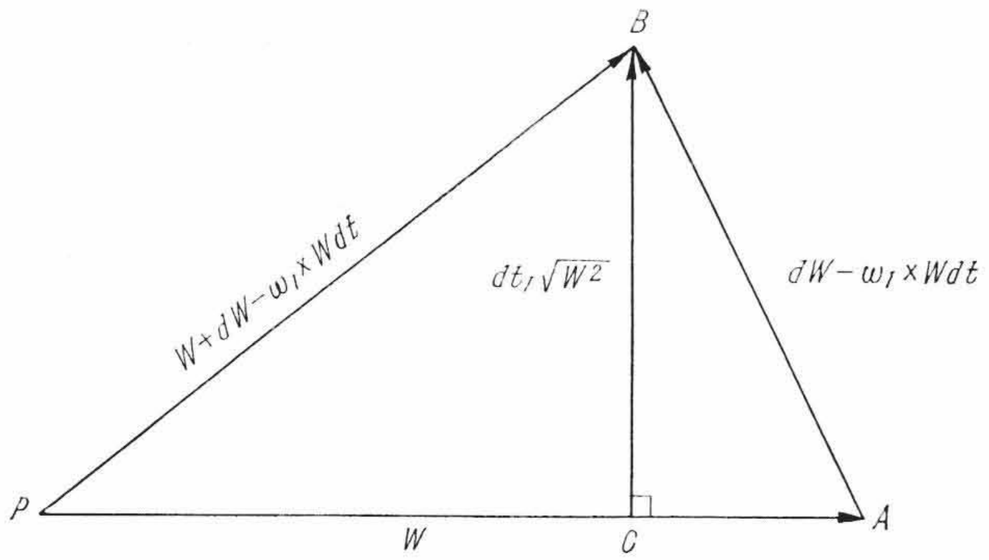
$$d\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\omega}\times(\nu_1\boldsymbol{W}+\boldsymbol{V}_1)dt\quad\cdots\cdots(115)$$

$$d\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{W}dt=\nu_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}dt+\boldsymbol{q}dt\quad\cdots\cdots(116)$$

$\overset{\frown}{PP_1}$の両端におけるすべり線の方向の変化 $d\boldsymbol{t}_1$ は第10図を参照して次のように求められる。

$\boldsymbol{W}+d\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{W}dt$ の $\boldsymbol{W}$ 方向への正射影 PC は

$$\mathrm{PC}=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{W}^2}}\{\boldsymbol{W}^2+\boldsymbol{W}\cdot(\nu_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W})dt+\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{q}dt\}\quad\cdots(117)$$



第10図　すべり線の切線の方向変化

$$*\qquad k_2-k_1=\frac{\sigma_2\left(\frac{z^2}{u^2}\sin^2\alpha\sin^2\varphi+2\frac{z}{u}\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\varphi\right)}{\varepsilon y\frac{z}{u}\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi-(z+\varepsilon x)\left(\frac{z}{u}\sin\alpha\sin^2\varphi+\cos\alpha\right)+(y-e)\sin\alpha\cos\varphi}\quad\cdots\cdots(132)\quad **$$

**(2)　四円弧歯形の場合

(112)式で与えられる σ_1 に対し(102)式より σ_2 が求められる。

(131)式の相対曲率は　***

$$***\qquad k_2-k_1=\frac{-\sigma_2(A^2+B^2+C^2)}{\varepsilon\sigma_1\sqrt{R_f^2\sin^2\lambda+h^2}\{R_f x\sin\lambda-hz\cos(\varphi-\lambda)\}}\quad\cdots\cdots(133)$$

ここに

$\nu_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{W}$ 垂直なベクトルであるからカッコ内の第2項は0となる。正射影ベクトルはさらに単位ベクトル $\boldsymbol{W}/\sqrt{\boldsymbol{W}^2}$ を乗じて

$$\vec{\mathrm{PC}}=\boldsymbol{W}+\frac{(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{W}dt}{\boldsymbol{W}^2}\quad\cdots\cdots(118)$$

$$\vec{\mathrm{CA}}=-\frac{(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{W}^2}dt\quad\cdots\cdots(119)$$

$$dt_1\sqrt{\boldsymbol{W}^2}=\vec{\mathrm{CA}}+\vec{\mathrm{AB}}=\nu_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}dt+\boldsymbol{q}dt-\frac{(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{W}^2}dt\quad\cdots\cdots(120)$$

$$=\nu_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}dt-\frac{\boldsymbol{W}\times(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{q})dt}{\boldsymbol{W}^2}\quad\cdots\cdots(121)$$

$$d\boldsymbol{t}_1=\frac{\nu_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}dt}{\sqrt{\boldsymbol{W}^2}}-\frac{\boldsymbol{W}\times(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{q})dt}{\sqrt{\boldsymbol{W}^2}\ \boldsymbol{W}^2}\quad\cdots\cdots(122)$$

$\overset{\frown}{PP_2}$ の両端におけるすべり線の方向の変化 $d\boldsymbol{t}_2$ は

$$d\boldsymbol{t}_2=\frac{(\nu_1-1)\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}dt}{\sqrt{\boldsymbol{W}^2}}-\frac{\boldsymbol{W}\times(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{q})dt}{\sqrt{\boldsymbol{W}^2}\ \boldsymbol{W}}\quad\cdots\cdots(123)$$

すべり線の曲率ベクトルを $\boldsymbol{K}_i$，曲率を $1/\rho_i$，すべり線の法線を $\boldsymbol{n}_{ci}$，$\overset{\frown}{PP_i}$ の長さを ds_i，すべり線方向の両歯面の法曲率を K_i，同時接触線に直角な方向の両歯面の法曲率を k_i とする。サフィックス1ははすば平歯車，2は鼓形ウォームを表わす。

$$ds_1=|d_1\boldsymbol{r}|=\nu_1\sqrt{\boldsymbol{W}^2}\,dt\qquad ds_2=|d_2\boldsymbol{r}|=(\nu_1-1)\sqrt{\boldsymbol{W}^2}\,dt\quad\cdots\cdots(124)$$

$$\boldsymbol{K}_i=\frac{\boldsymbol{n}_{ci}}{\rho_i}=\frac{d\boldsymbol{t}_i}{ds_i}\quad\cdots\cdots(125)$$

ムーニエの定理により

$$K_1=\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{W}^2}-\frac{\boldsymbol{W}\times(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{q})}{\nu_1\boldsymbol{W}^4}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\quad\cdots\cdots(126)$$

$$K_2=\boldsymbol{K}_2\cdot\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{W}^2}-\frac{\boldsymbol{W}\times(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{q})}{(\nu_1-1)\boldsymbol{W}^4}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\quad\cdots\cdots(127)$$

次に同時接触線上の線素を $d_0\boldsymbol{r}$ とし，(97)式と同様に考えて(99)式の $d\boldsymbol{n}, d\boldsymbol{W}$ を点 $\boldsymbol{r}+d_0\boldsymbol{r}$ について求めると

$$d_0\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})=0\quad\cdots\cdots(128)$$

また $\boldsymbol{n}\cdot\Gamma\boldsymbol{n}=0$ なることに留意して

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})=0\quad\cdots\cdots(129)$$

(128)，(129)式より，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}$ なるベクトルは両歯面に接し，同時接触線と直交する。同時接触線と相対速度の間の角 ϕ とすると

$$\sin\phi=\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})^2}}\quad\cdots\cdots(130)$$

(126)，(127)，(130)の各式より

$$k_2-k_1=\frac{\boldsymbol{K}_2-\boldsymbol{K}_1}{\sin^2\phi}=-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}\cdot\sigma_1\sigma_2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})^2}{\{\boldsymbol{W}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}-\Gamma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{W})\}^2}\quad\cdots\cdots(131)$$

(1)　インボリュート歯形の場合

(108)式で与えられる σ_1 に対し(102)式より σ_2 が求められる。

(131)式の相対曲率は　*

$$A=\varepsilon h\sin(\varphi-\lambda)+\frac{1}{b(R_f^2\sin^2\lambda+h^2)}\times\left[\{h^2\sin(\varphi-\lambda)-R_f^2\sin\lambda\cos\varphi\}\frac{hD}{\sin\lambda}+b(y-e)R_f^2\sin\lambda\cos\lambda\cos(\varphi-\lambda)\right]$$

$$B=-\{\varepsilon h\cos(\varphi-\lambda)+R_f\sin\lambda\}-\frac{1}{b(R_f^2\sin^2\lambda+h^2)}\left[\{h^2\cos(\varphi-\lambda)+R_f^2\sin\lambda\sin\varphi\}\frac{hD}{\sin\lambda}-b(y-e)R_f^2\sin\lambda\cos\lambda\sin(\varphi-\lambda)\right]$$

$$C=h\sin(\varphi-\lambda)+\frac{hR_f\cos\lambda}{b(R_f^2\sin^2\lambda+h^2)}\left\{\frac{hD}{\sin\lambda}-b(y-e)\right\}$$

$$D=z\sin\varphi-\varepsilon b\sin\lambda$$

8. 結果の検討

緒言に述べたように，凹円弧歯形をもつはすば平歯車と鼓形ウォームとを組み合わせたウォーム歯車につき数学的解析を行なった。またインボリュート歯形をもつものについてもあわせて解析して報告した。

一般的には食違軸歯車の理論(4)のうち，媒介歯車がはすば平歯車と一致した場合に相当し，第3章ないし第5章に一般論として引用してある。すべり率および相対曲率については前記参考文献に省略が多いので筆者の考えで補足して報告した。

以上の理論により両歯形についての式を誘導し，数値計算によって首題の歯車のかみ合性能の一部を明らかにする端緒とした。またインボリュート歯形の場合について同時接触線，接触点軌跡面の式は普通形ウォームの場合と同じ(4)となることを知りえた。

9. 結　　言

首題のウォーム歯車装置は当初歯形の改善によりウォームの片当りを防止し，耐摩耗性を与えることより出発してその目的をはたし，小形量産の軽負荷歯車として好適な特性を示した。よってさらに接触領域，ヘルツ応力などを求めてその特性を明らかにするため，数学的解析を行なって各章に示す式を誘導した。引き続き数値計算を実施中であるが，その結果については稿を改めて報告する。

終りに，本報告に対し種々ご批判をいただいた東京工大中田孝教授石川二郎教授ならびに研究の当初よりご指導をいただいた日立中央研究所明山正元博士に厚くお礼を申しあげる。

参　考　文　献

(1)　特許 244754
(2)　景浦，内田：　日立評論 **38**, 817 (昭 31-6)
(3)　佐藤申一：　歯車の歯形とねじ面 (昭 24)
(4)　成瀬政男ほか：　歯車の研究 (昭 35)
(5)　山内恭彦：　代数学および幾何学 (昭 24)
(6)　伊藤徳之助：　応用ベクトル解析 (昭 23)

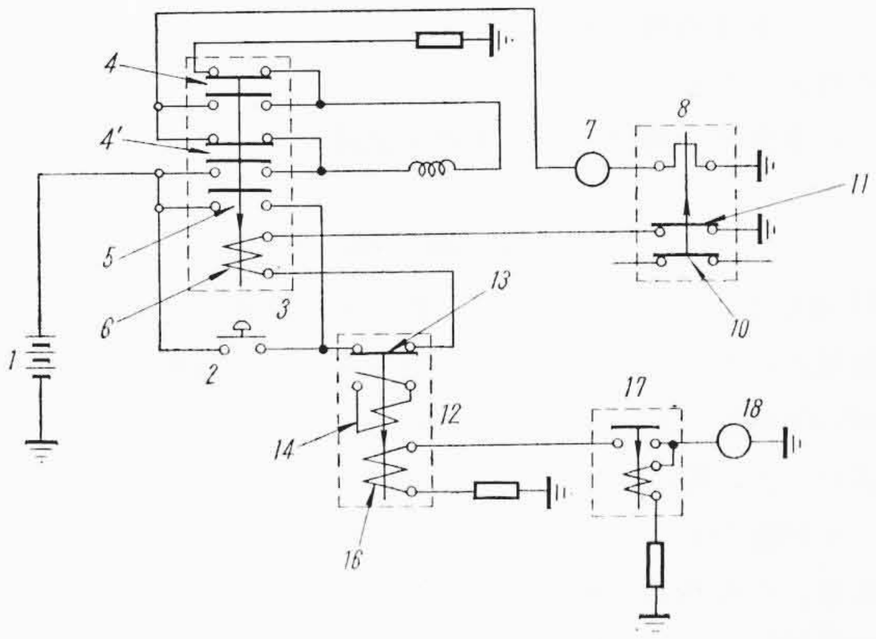
新案の紹介

登録新案 第535747号

森　美昭

機関始動電動機の安全装置

この考案は，機関回転中における始動電動機の二重突入を防止する装置に関するもので，特に機関を2台以上いっせいに始動する場合に，その効果を発揮するものである。

機関を始動するために始動スイッチ2を閉じると，電源1—始動スイッチ2—接点13—電磁コイル6—温度リレー8—電源1の回路が形成されて電磁コイル6は励磁されメインスイッチ3の接点4，4′および補助接点5が閉じて始動電動機7は起動する。この場合補助接点5は電磁コイル6の自己保持回路を形成するので，始動スイッチ2を引続き閉じておく必要はない。機関が始動して指定回転数以上に達すると，発電機18の発生電圧によってリレー17が作動するので保安スイッチ12のコイル16が励磁して接点13が開く。そうすれば電磁コイル6は消磁されて接点4，4′および補助接点5が開き始動電動機7は停止する。この場合接点4，4′は図示の位置に復帰し短絡回路を形成するので，発電ブレーキ作用により始動電動機7は急速に停止する。機関が停止しはじめると発電機18の発生電圧が下がり，指定値に達するとリレー17は図示の状態に復帰する。したがってコイル16は消磁するが，タイムスイッチ14には電圧を誘起しているので，このエネルギーによりタイムスイッチ14は機関が完全に停止してから接点13を閉じる。タイムスイッチ14は機関の停止後に復帰するように設計されているので，機関回転中誤って始動スイッチ2を閉じても始動電動機7は回転せず，ピニオンが突入してピニオンならびに機関のリングギヤを損傷することはない。

機関始動時なんらかの故障によって機関が始動せず始動電動機7が過負荷となった場合，温度リレー8が作用して接点11により電磁コイル6を消磁して接点4，4′を開き始動電動機7の焼損を防止する。機関は始動したが機械的故障によってピニオンがリングギヤから抜けない場合，図示の短絡回路によって始動電動機7は発電ブレーキの状態となるため，温度リレー8が作動して接点10を開き機関を停止する。さらに始動スイッチ2が閉路の状態で機関が始動直後事故により停止し，かつピニオンとリングギヤとの係合がはずれている場合，始動電動機7は短絡回路によって発電ブレーキの状態となりただちに停止する。この場合機関停止に伴なって発電機18の発生電圧はなくなるが，接点13はタイムスイッチ14のエネルギーにより指定された時間開かれているため，機関停止の状態で始動電動機回路を形成して回転中の始動電動機7を再始動することはない。