U. D. C. 621.039.524.4 : 621.039.514

# 沸騰水形原子炉における二相流の動特性

## Two-Phase Flow Dynamics in Boiling Water Reactors

金　井　　務* 　川　合　敏　雄** 　永　井　将　之**
Tsutomu Kanai　　Toshio Kawai　　Masayuki Nagai

内　容　梗　概

沸騰水形原子炉の動特性と密接に関係する二相流の動特性について，中研で行なっている理論的な研究を中心に二，三の問題を重点的に述べる。まず沸騰水路を加熱したときに気泡体積率が時間的にどう変化するかを記述する気泡方程式の要点を記す。この方程式は実験的検証を経てBWR動特性の予測や実験結果の整理に用いうるものであるが，まだ十分完成されたものではない。本報ではこの方程式の成立をささえている仮定を理論的に検討して第一に二相流中の気相液相の流速の比，いわゆるすべり比はある程度根拠のある概念であり，それを気泡体積率だけの関数と考えた仮定は正当であったこと，第二に二相流中の音速が十分速いと仮定してよい場合に上の理論が用いられることを示した。終わりに二相流中ではなぜ音速（圧力伝ぱ速度）がおそくなるかを物理的に説明した。

## 1. 緒　　言

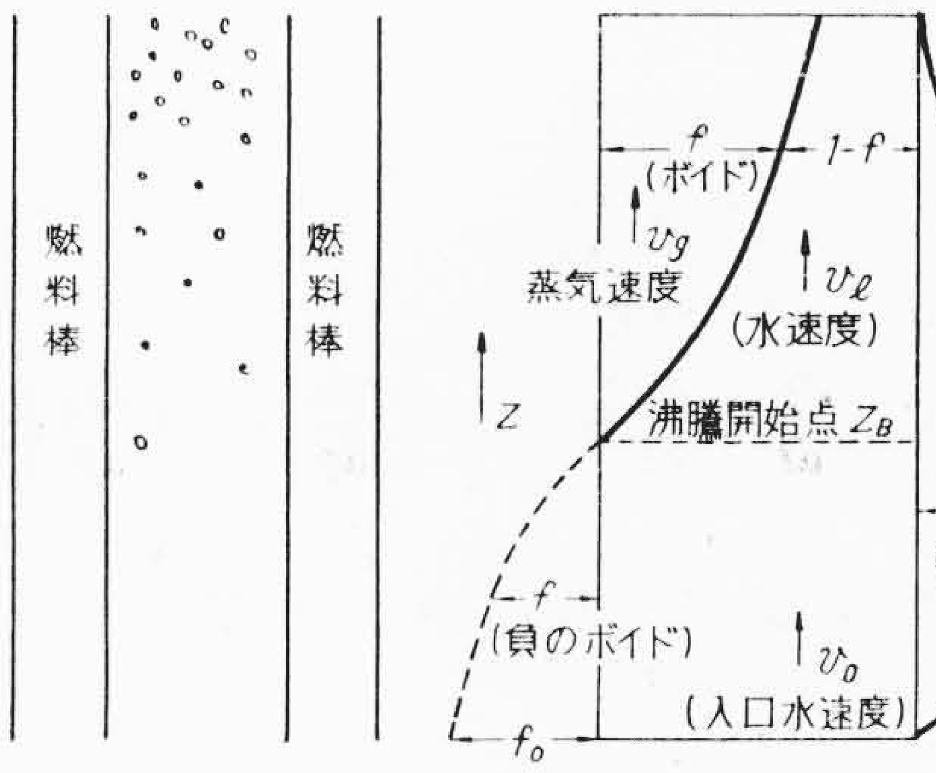
BWR動特性の研究はANL，GEなどで古くから行なわれ多くの研究が発表されている[(1)]。発電所としての動特性にはプラント動特性や制御方式が主要な役割を果たすが，炉心の安定性を保証することが重要な問題であることはいうまでもない。炉心の安定性を考えるには核反応，燃料棒からの熱伝導，水力学を含む一巡ループのおのおのについての知識を必要とする。ここでもっぱら扱う水力学部分は加熱管内の沸騰水の性質という古くからの問題であり，対象が複雑で現象も多様なため多くの実験とその整理が積み重ねられてきた[(2)]。しかしその動特性となるとBWRとの関連ではじめて重要となったためか，最近ようやく研究が始まった段階であり[(3)(4)]，それをすっきりした形で理解することは現在解決を要する問題の一つである。

われわれはさきに沸騰水路を流れる二相流の気泡分布の時間的変化を記述する気泡方式を提出し[(5)]，BWR動特性の計算上最もあいまいであった気泡体積の計算法を一応確立した。この論文ではまず気泡体積率の時間変化を記述する気泡方程式を導き，次いで基礎方程式がどのように正当化され，あるいは適用限界が明らかにされたかを記すことにする。

## 2. 気泡方程式

従来のBWR動特性に関連して行なわれた二相流の過渡応答に関する議論は，熱源，圧力，入口水温，入口流速の変化に対する気泡体積率の変化をそれぞれ別個に物理的直観を働かせながら取り扱ってきたが，上記の各効果はそれぞれ沸騰境界の移動や内部流速の変化を伴い，その結果また蒸発量にも影響があるため，理論はきわめて複雑難解で，推論の誤りや見落しもありがちな不完全なものであった。さらに原子炉の反応度にフィードバックさせるためには，一定量の気泡に対しても外乱の種類によってその効果が異なるという事情も考慮しなければならない。このように複雑で，また現象に十分なれていない対象を扱うには，一歩退いて疑問の余地のない基礎方程式から理論的に考えるのが一つの方法である。

単位断面積の水路へ沸点未満の水が流速$v_0$で流入し，高さ$z$に沿って流れるにつれ壁から熱（毎秒水の単位体積あたりに換算して$Q$ cal）を受けて上昇する。横断面内の混合が十分行なわれると仮定すればある高さで沸点に達し，それから上は蒸気と水の混合したいわゆる二相流となり，両相別々の平均速度$v_l$と$v_g$とで流れ去るわけである。




第1図　チャンネル内の二相流

気泡集団をこまかく考えて統計を取るような二相流固有の安定性の問題は別にして巨視的に流体力学の対象としてみると，通常の流体力学で質量，エネルギー，運動量の三つの保存則を用いて密度，流速，圧力を解くのに対して二相流では一般に水と蒸気の両速度を求めなければならないので，方程式としては両相に対する運動方程式を立てなければならない。しかし四つの連立偏微分方程式を解くことは一次元問題とはいえ手数がかかるうえ見通しもよくないであろう。そこでわれわれはまず次の仮定をおく。

（i）炉内圧力は空間的に一定である。しかし系全体の圧力は時間的に変動する。

（ii）気相と液相の速度の比はあらかじめ気泡体積率の関数として実験的にきまっている。

このうち(ii)については，すべり比の物理的根拠があいまいで，流体力学的に検討する必要がある。また(i)については，高圧の強制循環方式のBWRでは良い近似となるが圧縮性の著しい大気圧付近で運転する炉においては圧力の空間分布を無視するわけにはいかない。この点は次章以下で詳しく論じる。

この二仮定のおかげで運動量保存の二つの偏微分方程式が不要となり気泡方程式を導くための出発点となる方程式は，質量，エネルギーの保存則（第1図参照）

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_l(1-f)+\rho_g f\}+\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l+\rho_g f v_g\}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_l e_l(1-f)+\rho_g e_g f\}+\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l h_l(1-f)v_l+\rho_g h_g f v_g\}=Q \quad \cdots\cdots(2)$$

および気相と液相の速度比（すべり比）の関係式

* 日立製作所中央研究所　工博
** 日立製作所中央研究所

$$s=\frac{v_g}{v_l} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

の三つとなる。

(1)，(2)式から $\partial f/\partial t$ を消去し $z$ に関して積分すると"体積保存の積分"((4)式)が得られる。

$$(1-f)v_l+fv_g=v_l(z_B,t)+w(z,t) \qquad (z>z_B)\cdots\cdots(4)$$

ただし

$$w(z,t)=\frac{V_{lg}}{h_{lg}}\int_{z_B}^{z}\left[Q+\frac{dp}{dt}-\frac{dp}{dt}\times\left\{\rho_l(1-f)\frac{dh_l}{dp}+\rho_g f\frac{dh_g}{dp}\right\}\right]dz-\frac{dp}{dt}\int_{z_B}^{z}\left\{(1-f)\frac{1}{\rho_l}\frac{d\rho_l}{dp}+f\frac{1}{\rho_g}\frac{d\rho_g}{dp}\right\}dz \quad \cdots\cdots(5)$$

(4)と(1)とから $f$ に関する偏微分方程式を導くと，次の"気泡方程式"が得られる。すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial t}+U\frac{\partial f}{\partial z}=q\cdots\cdots(6)$$

ただしここに

$$q=\frac{1}{\rho_g h_{lg}}\cdot\frac{1-f+sf\frac{\rho_g}{\rho_l}}{1-f+sf}\times\left[Q+\frac{dp}{dt}-\frac{dp}{dt}\left\{\rho_l(1-f)\frac{dh_l}{dp}+\rho_g f\frac{dh_g}{dp}\right\}\right]+\frac{dp}{dt}\frac{f(1-f)}{1-f+sf}\left(s\frac{d\rho_l}{\rho_l dp}-\frac{d\rho_g}{\rho_g dp}\right)\cdots\cdots(7)$$

$$U=\frac{s+f(1-f)\frac{\partial s}{\partial f}}{1-f+sf}v_l \quad \cdots\cdots(8)$$

(6)式は外部から加える熱，圧力および境界条件として入口温度，流速を与えて気泡体積率 $f$ を求める基礎的な式で，これを気泡方程式と呼ぶ。この式は時間 $t$ と空間 $z$ についての一階の偏微分方程式で，たとえば加熱されつつ流れる一次元流体の温度の式

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial z}\right)=Q$$

からの類推からわかるように，$U$ は $f$ の伝わる速さであり，$q$ は $f$ を増す作用をする"等価熱源"である。数学的にいえば[6]，気泡方程式の解は

$$\frac{df}{dt}=q(z,t,f)$$

$$\frac{dz}{dt}=U(z,t,f)$$

の連立常微分方程式の解をつづり合わせたものである。この連立式から入口条件 $\left(\text{入口の} f \text{と} z, \frac{dz}{dt}\right)$ を初期値として，初期値ごとに $t$ をパラメータとする一本の曲線ができ，その曲線群を集めて解となり，$t=\text{const}$ の面で切ったときの $f(z)$ がその時刻での気泡体積率分布を与える。また一点に乱れを加えるとその効果は $U$ の速さでつたわり，$q$ は流線に沿って $f$ の増加する速さを与えることが以上の理論により明らかである。たとえば入口温度が急変したとき，その境界はボイド体積の不連続面となって速さ $U$ で上昇してゆく。気泡伝達速度 $U$ は(8)から

$$U\longrightarrow v_g \qquad (f\to 0)$$

$$U\longrightarrow v_l \qquad (f\to 1)$$

となることがわかるが，たしかに気泡の少ないときは $U=v_g$，水の少ないときは $U=v_l$ となるのはもっともである。中間の $f$ に対してはどちらにも一致せず，場合によってはそのどちらよりも速いことがある。

ボイドは熱源 $Q$ と圧力変化 $dp/dt$ によって増すが，まず前者については通常考えられる因子のほかに $(1-f+sf\rho_g/\rho_l)/(1-f+sf)$ が掛かっている。これは加えた熱がそのまま気泡量の変化をもたらす直接効果のほかに，気泡量変化が必然的に流速に影響してそのため熱源の大きさが変化したのと同じ効果になる負の間接効果が伴うからである[5]。圧力の効果はエンタルピーの圧力依存からくる蒸発凝縮の効果と，密度の圧力依存による圧縮膨張の効果とより成り，前者のほうがけたちがいに大きい。また圧力変化と熱源とは大体等価であって

$$Q\sim\frac{dp}{dt}\rho_l(1-f)\frac{\partial h_l}{\partial p}$$

となるが，大気圧のほうが圧力効果が20～30倍大きいこともわかる。71気圧においては1〔ata/s〕の圧力変化は大体0.6〔cal/cm³s〕の熱源に相当するがこれは定格値の3％程度にすぎない。それに反し大気圧では20〔cal/cm³s〕となって定格値の100％以上となる。

われわれは以上の理論により計算機を用いて炉内のボイド分布の過渡変化を求めた[5]。その結果原子炉の反応度にどう効くかは，別に周知の方法[7]で計算することができる。

## 3. すべり比

沸騰水形原子炉の開発の初期に，大気圧下の沸騰水炉の可能性を検討したところ出力密度の点でとうてい使いものになるまいとの計算になったという話が伝えられている。例として1 m/sの冷却水を送って1 mの高さの炉心で沸騰させ，出口の蒸気体積率を50％に押さえようとすると出力密度は0.3 kcal/$l$•s以下となるが，通常のボイラやPWRでは数十kcal/$l$•sである。ところがSPERT-1は大気圧の沸騰水炉であるが54 $l$ の炉心水体積に対して54 kcal/s～200 kW程度までは安定な運転ができる[8]。このくい違いはすべりの考えで次のように説明している。

二相流中では気相と液相が入り乱れて流れているが，気相の平均速度は液相より何倍か大きいので，熱計算で求めた蒸気はすばやく流れ去り，その結果蒸気の占める体積率は比較的小さくなる。この比をすべり比といい，その測定も速度からではなく，加えた熱と気泡体積率を測り，熱と質量のバランスから速度比は理論上かくあらねばならぬと導かれる（9）式を用いて間接的に求められるものである[2]。

$$s=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-f}{f}\cdot\frac{\rho_l}{\rho_g}\cdots\cdots(9)$$

こうして膨大な熱実験のデータがすべり比に整理され，逆に気泡体積率を知るためにはすべり比の実験値を用いて計算されてきた。しかしその物理的な基礎づけがあいまいなため，逆流時のすべりの概念は明らかに矛盾しているし，大気圧下の数十というすべり比の値などは直観的には大きすぎると思われている。静水中を上昇する気泡は最大速度でも30 cm/sをこえないと実験でたしかめられている[9][10]。

流体力学的に厳密に考えることは今のところ不可能であるが，すべり比は流体の運動量保存の式(Eulerの式)の代用になっていることから考えて，すべりの比の理論は液相気相の運動方程式から導かれると予想される。すなわち定常状態一次元では運動量の収支は[4]

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l^2\}&=-(1-f)\frac{\partial p}{\partial z}-\rho_l(1-f)g+\Gamma_{g\to l}-\Gamma_{l\to w}\\ \frac{\partial}{\partial z}\{\rho_g f v_g^2\}&=-f\frac{\partial p}{\partial z}-\rho_g fg-\Gamma_{g\to l}-\Gamma_{g\to w}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

この両式を加えて

$$\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l^2+\rho_g f v_g^2\}$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial z}-\{\rho_l(1-f)+\rho_g f\}g-(\Gamma_{l\to w}+\Gamma_{g\to w}) \qquad \cdots\cdots(11)$$

なる全運動量保存の式が得られる。これをさきの質量，エネルギー保存則に加えたものは次章で詳しく論ずる。一方(10)式から$p$を消去すれば

$$\frac{1}{1-f}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l^2\}-\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_g f v_g^2\}$$
$$=-(\rho_l-\rho_g)g+\left(\frac{1}{1-f}+\frac{1}{f}\right)\Gamma_{g\to l}$$
$$-\frac{1}{1-f}\Gamma_{l\to w}+\frac{1}{f}\Gamma_{g\to w} \qquad \cdots\cdots(12)$$

この右辺は順に重力場，両相間および両相と壁との運動量の交換をあらわしていて複雑にみえるが，特に熱を加えないときには左辺が0となるので右辺も当然0でなければならない。ところが運動量の交換はそのときの流速や気泡体積率によるだけで，その高さ方向のこう配によらないと仮定すれば(12)の右辺は恒等的に0となり

$$\frac{-f}{1-f}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l^2\}+\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_g f v_g^2\}=0$$

または

$$\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l^2+\rho_g f v_g^2\}-\rho_l v_l\frac{\partial v_l}{\partial z}$$
$$=\frac{v_l}{1-f}\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_l(1-f)v_l\} \qquad \cdots\cdots(13)$$

ここでふたたび蒸発がない場合を考えると右辺は0となり，重量流量率$x$の定義式

$$\left.\begin{aligned}\rho_g f v_g&=Gx\\ \rho_l(1-f)v_l&=(1-x)G\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

$G$: 重　量　流　量

を用いてかきかえると完全微分の形になって

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(1-x)^2}{(1-f)}+\frac{x^2}{f}\frac{\rho_f}{\rho_g}-\frac{1}{2}\frac{(1-x)^2}{(1-f)^2}\right\}=0$$

が得られ，$x=0$で$f=0$となるように積分定数をきめると

$$x=\frac{f(1-2f)+f\sqrt{(1-2f)^2+f\left\{2\frac{\rho_l}{\rho_g}(1-f)^2+f(1-2f)\right\}}}{2\frac{\rho_l}{\rho_g}(1-f)^2+f(1-2f)} \qquad \cdots\cdots(15)$$

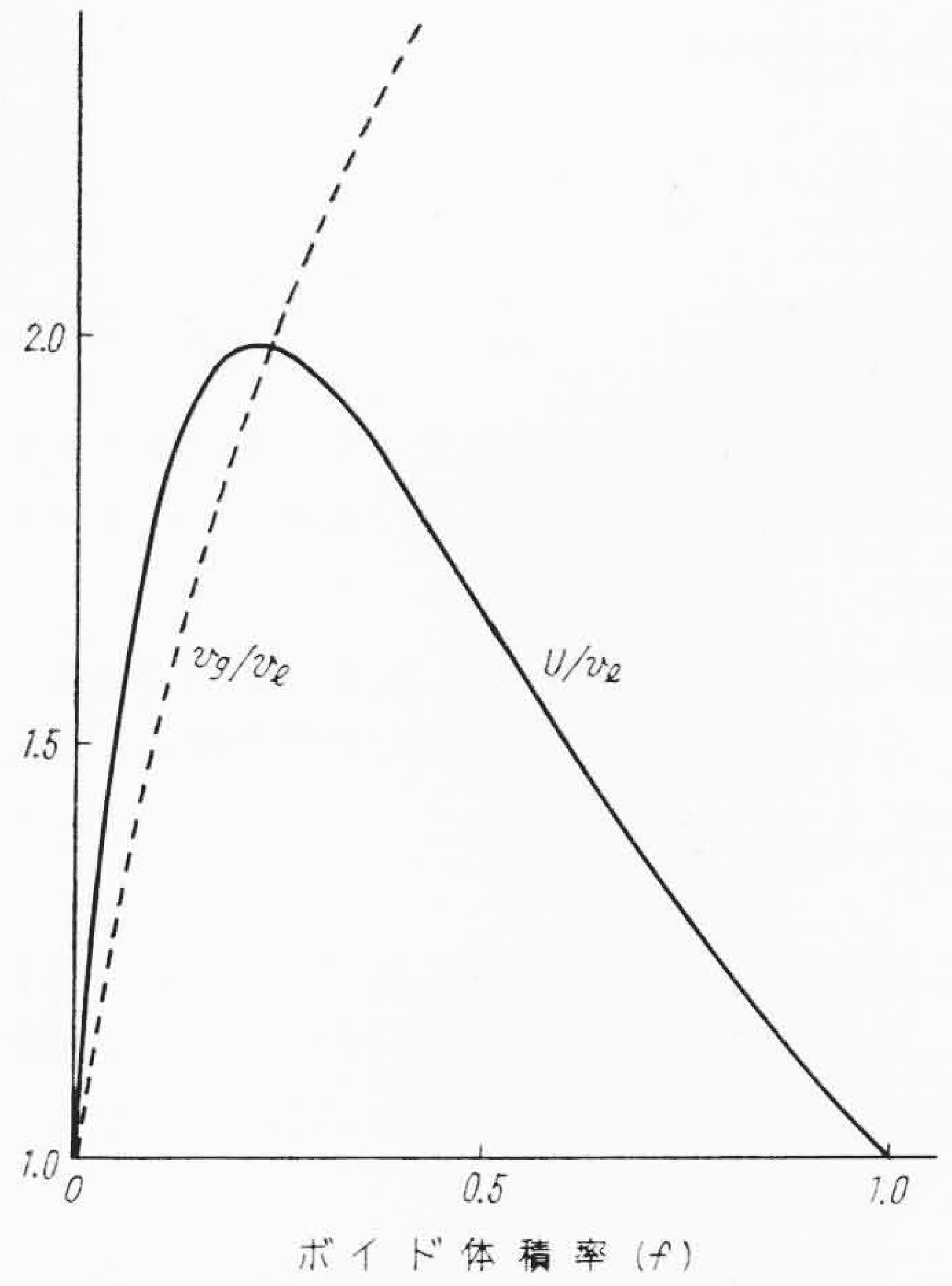
となる*。この式は加熱のない場合の関係式であるが，以下一般に成り立つものと仮定し，(9)式に代入するとすべり比$s$が気泡体積率$f$の関数として求まり次式で表わされる。

$$s=\frac{1-f+\sqrt{1+\left(\frac{\rho_l}{\rho_g}-1\right)2f}}{2-\frac{\rho_g f}{\rho_l}} \qquad \cdots\cdots(16)$$

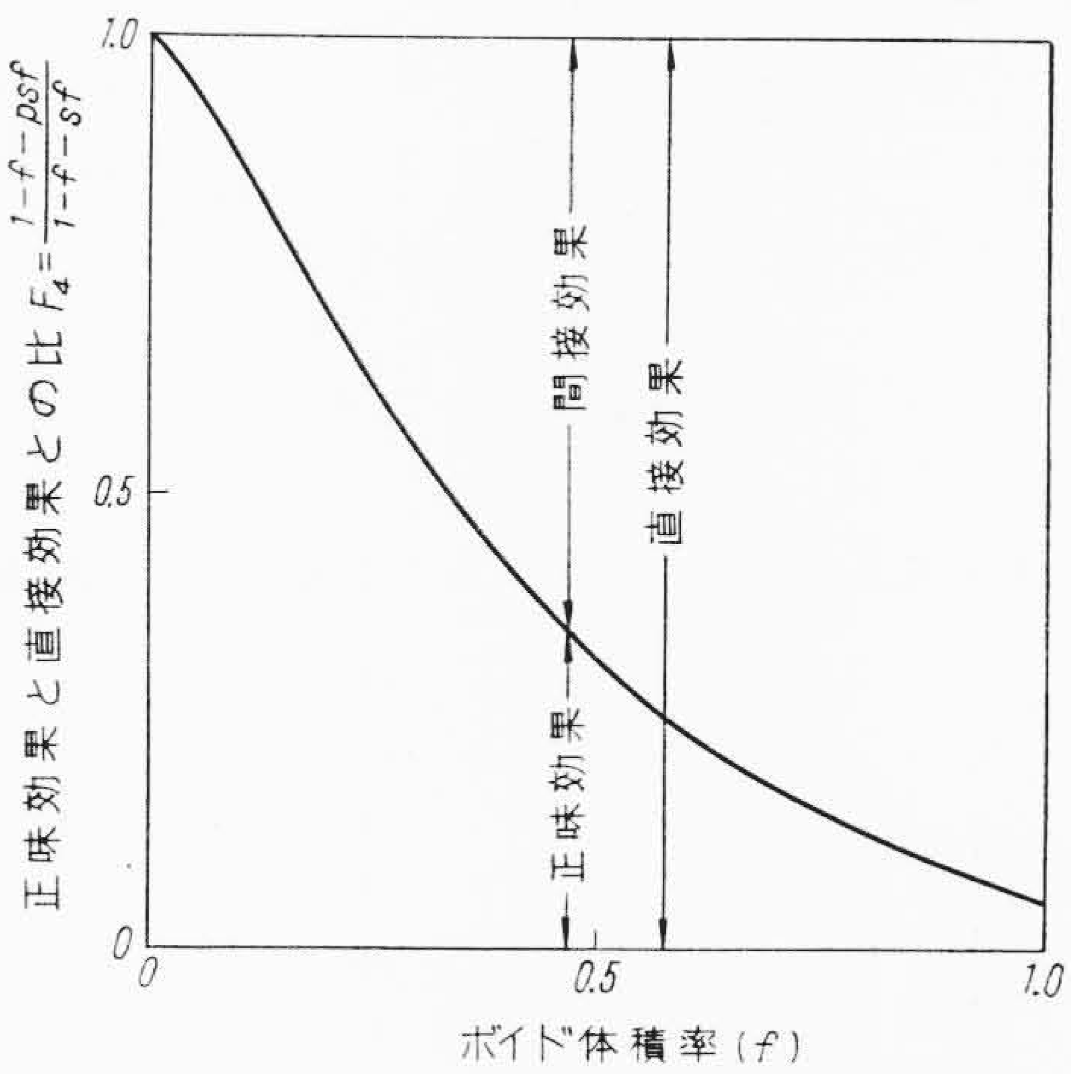
(16)式は流速の効果を説明できない欠点はあるが，実験値との対応は良好であるとされている。さらに$s$が気泡体積率だけの関数であることは気泡方程式に代入するのにきわめて好つごうである。(16)式を用いて

$$\frac{U}{v_l}=\frac{s+f(1-f)\frac{\partial s}{\partial f}}{1-f+sf}$$

* この式はGEのLevyによって導かれ，実験とよく合っている[11]。




第2図　ボイド伝ぱ速度$U$および蒸気$v_g$の計算例 (71 ata)




第3図　等価ボイド熱源"$q$"における間接，直接効果比 (71 ata)

$$\frac{(\text{正味熱源})}{(\text{直接熱源})}=\frac{1-f+sf\frac{\rho_g}{\rho_l}}{1-f+sf}$$

を計算して**第2，3図**に示した。われわれがさきに実験的に求めた$s(f)$を用いて計算したもの[5]と似た傾向を示し特に作用伝ぱの速度$U$が，ある領域で両相いずれの流速よりも速いのが注目される。

## 4. 圧力分布の考慮

この章では，二相流固有のすべりを無視する近似によって，その流れを従来の流体力学の問題に帰着させた上で炉内圧力の空間的変化を考慮に入れた理論を述べ，前の理論との関連を考えてみる。

ここで用いた基本的仮定としては

(1)　気相液相間のすべりはない。したがって単相流の問題に帰着しうる。

(2)　状態量は沸騰領域では飽和関係をみたしている。

(3)　水と気泡はよく混合しており，均質流体と考えてよい。

これらの仮定により，問題は"熱を受けつつ流れる圧縮性の強い単相流"となって，ふつうの流体力学を適用できる。質量，エネルギー，ならびに運動量の保存則より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v)=0 \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\rho T\left\{\frac{\partial s}{\partial t}+v\frac{\partial s}{\partial z}\right\}=Q \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\rho\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial z}-F(\rho, v)\frac{\rho v^2}{2D}-\rho g \quad \cdots\cdots(19)$$

ここで，気泡体積率 $f$ の代わりに密度 $\rho$ を，またエネルギーにはエントロピー $s$ を変数として用いている（本節の $s$ はすべてエントロピーを表わす）。

以上の3式において未知数は $\rho$, $s$, $v$, $p$ の4個であるから，式が一つ不足で，これを補うために二相流の状態方程式を考えると

$$\frac{\rho \Delta V}{\Delta s}\delta s=-\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{\delta p}{\rho c^2} \quad \cdots\cdots(20)$$

ただし，これは注目する状態の近くにおける $\rho, s, p$ の微小変化の間の関係式で，変化は飽和状態に沿って行なわれると仮定した。また，断熱変化 $\delta s=0$ のもとで音速[12] $c=\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_s}$ なることを用いた*。

さて，ここで定常状態のまわりの微小変化のみを扱うことにして線形化を行ない，$\delta s$ を消去すると $\delta\rho$, $\delta v$, $\delta p$ に関する三つの偏微分方程式を得る。これは適当な変数変換によって簡単化でき，その結果つぎのように書かれることがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0+c & 0 \\ 0 & 0 & v_0-c \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -q \\ q \\ q \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(21)$$

ただし，$y$ は $\rho, v, p$ の変化分と次のように関係づけられる。

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta\rho}{\rho_0} \\ \dfrac{\delta p}{\rho_0 c^2} \\ \dfrac{\delta v}{c} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\rho}{\rho_0} \\ \dfrac{\delta p}{\rho_0 c^2} \\ \dfrac{\delta v}{c} \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(22)$$

これらのことから，三つの乱れ $y_1$, $y_2$, $y_3$ のうち，$y_1$ は密度波といえるもので $v_0$ の速さで伝ぱされ，$y_2$ と $y_3$ は圧力波でそれぞれ $v_0+c$ および $v_0-c$ の速さで伝わるものであると解釈される。密度 $\rho$ は(22)式から

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0}=y_1+\frac{1}{2}(y_2+y_3) \quad \cdots\cdots(23)$$

となって，密度変化はふつう考える低速成分 $y_1$ のほか，圧力波による密度増加の寄与を含んでいる。もし熱源 $q$ を $dt$ 時間パルス的に加えると，発生する $y$ の大きさは(21)式から

$$y_1=-q\,dt \qquad y_2=y_3=q\,dt$$

となり，(23)式に代入すると $\delta\rho/\rho_0=0$ となる。すなわち急激に加えた熱はその瞬間には密度変化を招かず，圧力波 $y_2$, $y_3$ が音速で消え去って $y_1$ だけが残留したとき $\delta\rho/\rho_0=-q\,dt$ の効果が見えることになる。熱源の効果が現われるのには，圧力波が系外に解放される時間，（系の長さ）/（音速）を要するが，いま大気圧下の沸騰水中の音速は1.5 m/s 程度であるから1 m 程度の炉心については1秒より速い現象についてはこのおくれ効果を無視することはできない**。それに反して動力炉で用いる71気圧の沸騰水中では圧力波は 50 m/s 以上であるからふつうの場合音速無限大と考えてよい。この場合には $y_2$, $y_3$ は加えられた外乱，および $y_1$ に対して直ちに平衡に達して，(21)式において $\frac{\partial}{\partial t}y_2$, $\frac{\partial}{\partial t}y_3$ を0とおいた値をとる。すると三つの連立方程式は $y_1$ だけに関する次の式に帰する。

$$\frac{\partial}{\partial t}y_1+\frac{\partial}{\partial z}(v_0 y_1)=-q+\frac{1}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial z}\cdot\int_{z_B}^{z}q\,dz+(\text{圧力効果}) \quad \cdots\cdots(24)$$

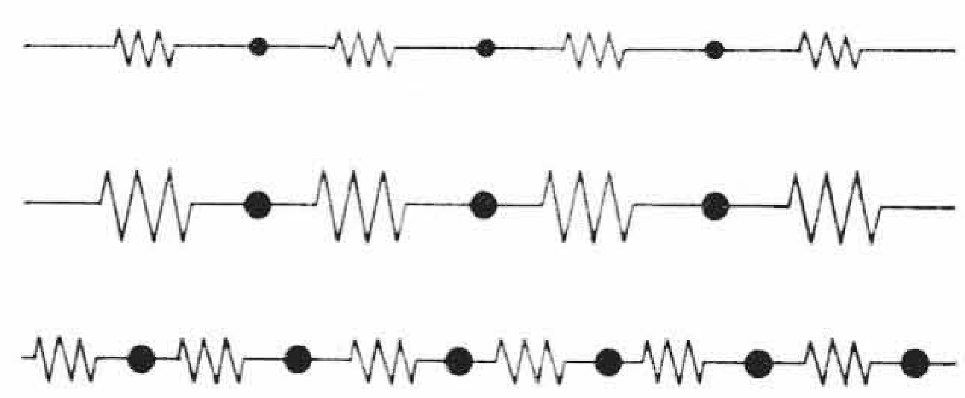
これは気泡方程式において $s=1$ とおき，かつ微小変化を仮定して線形化したものにあたっている[5]。

本章の結論をまとめると，二相流では圧縮性が強いので音速がおそいが，音速と炉の大きさできまる時間に比べて十分ゆっくりした変化を扱う場合には，圧力波の伝ぱを考える必要がなく，2章の気泡方程式が成立する。

## 5. 二相流中の圧力伝ぱ機構

前章の考察で，音速が大きくて系内の圧力再分布が瞬時に起こるときの近似が気泡方程式の根本にあることがわかった。二相流中の音速はふつう圧縮率の計算から求められ，水-空気の場合には実験的にも 20-30 m/s とたしかめられている[14]。水-蒸気のような凝縮蒸発を伴う場合には音速は一層おそく，大気圧下で 2～3 m/s，三重点では 1.2 mm/s と極端におそいことが計算されている[15]。水-蒸気二相流中の音速は最近注目を集めて実験が行なわれているが，理論どおりの値はまだ報告されていない。理論的音速は圧縮率から求めることは周知の方法であるが，たとえば音速1,410 m/sの水と，340 m/s の空気とを同体積で混合した媒質中を伝わる音速が 23 m/s であるとの答を出してみると，そのおそいこと特に両音速の中間にこないことに奇異の念をいだく人が多い。ふつうは**第4図**のバネ模型により，「二相流の場合には水の重い錘と空気の弱いバネを組み合わせるからである」と説明している。しかし水-空気が2～3層しかない区間の両端で音を発し検出すると，1,410 m/s と 340 m/s で両相を通過した第一波（平均速度 548 m/s）が届くことも確かである。この両者を矛盾なく理解するには圧力波の伝ぱについて一層立ちいった考察を要する。

密度 $\rho$，音速 $c$ をもつ媒質1と2が**第5図**のように層状をなして




第4図　二相流中のおそい音速の説明図

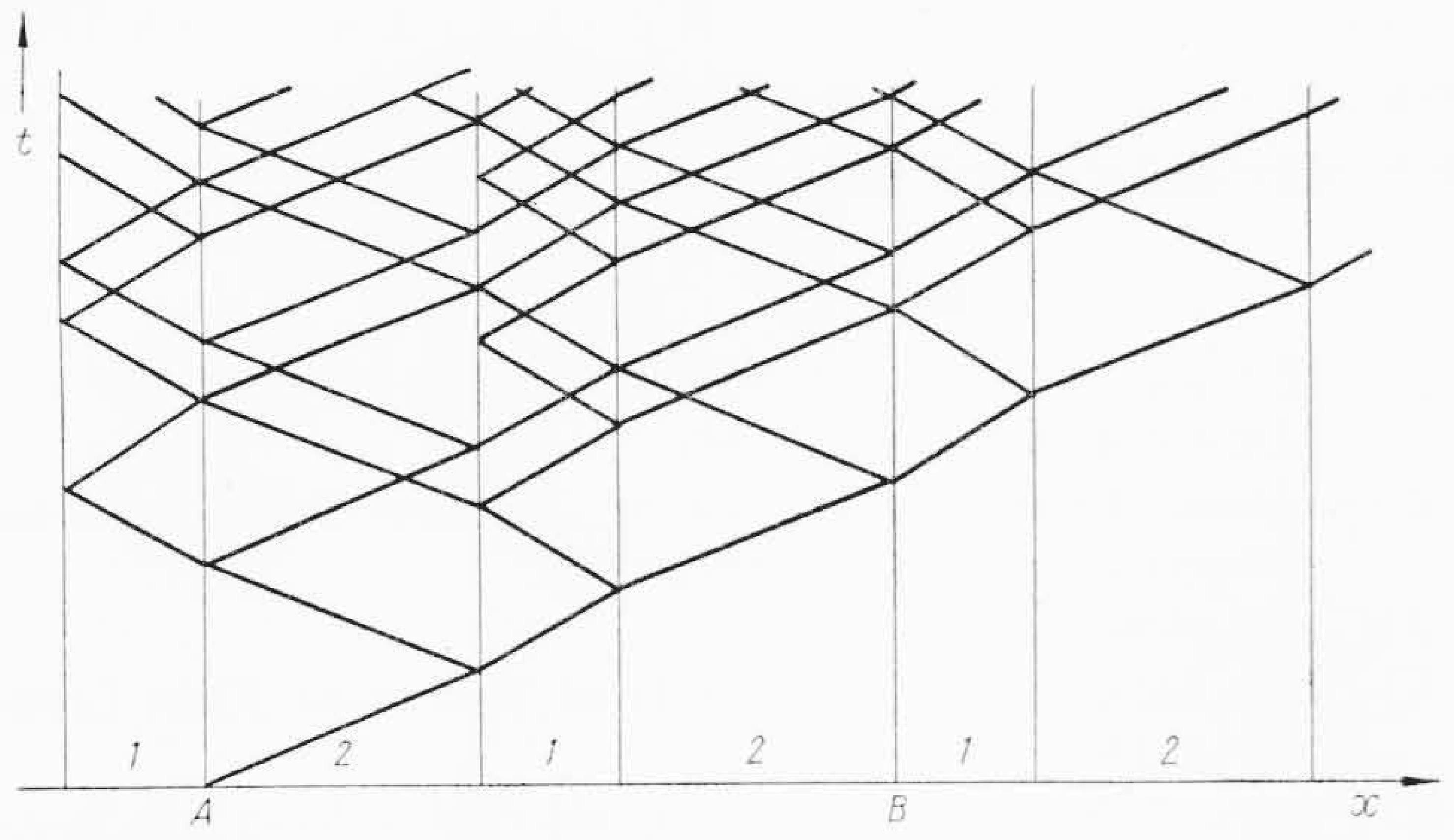
第1表　媒質1から2への透過率

| | 透過率 | 反射率 | 計 |
|---|---|---|---|
| 圧力 | $\frac{2z_2}{z_1+z_2}$ | $\frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}$ | $\neq 1$ |
| 速度 | $\frac{2z_1}{z_1+z_2}$ | $\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$ | $\neq 1$ |
| 運動量 | $\frac{2z_2}{z_1+z_2}$ | $\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$ | 1 |
| エネルギー | $\frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}$ | $\frac{(z_2-z_2)^2}{(z_1+z_2)^2}$ | 1 |

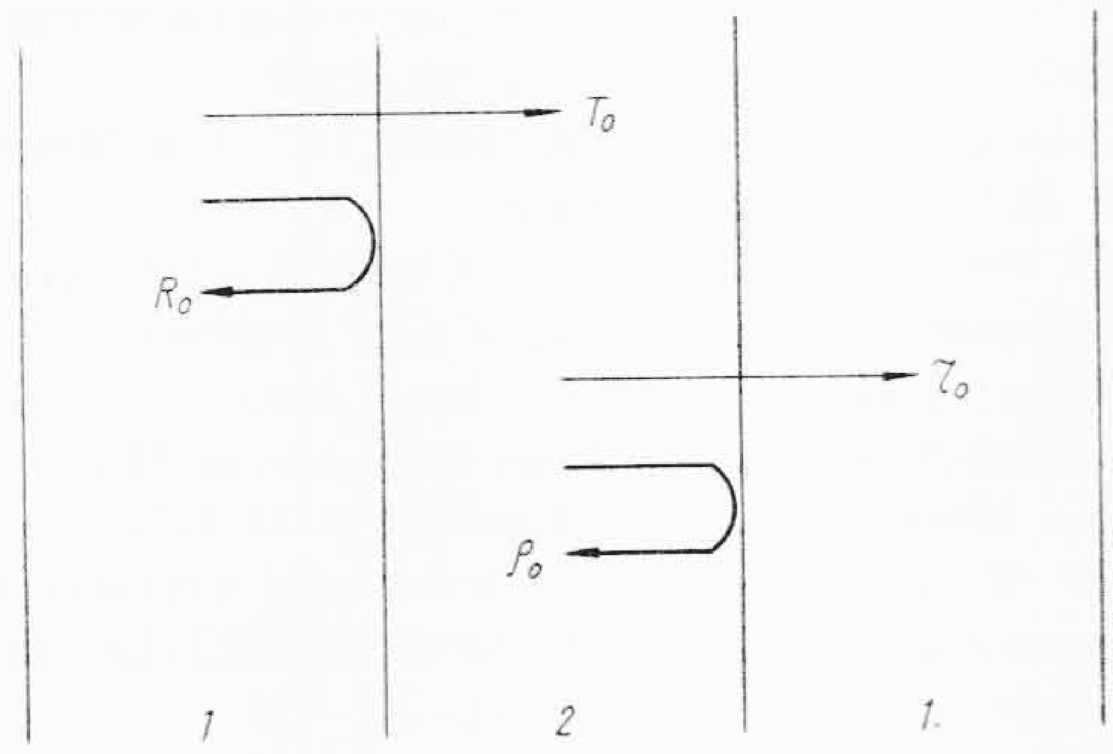
表中 $z_1=\rho_1 c_1$，$z_2=\rho_2 c_2$

* 二相流の状態方程式および音速に関する数値は日立評論原子力特集号（1962）中に筆者の論文がある。

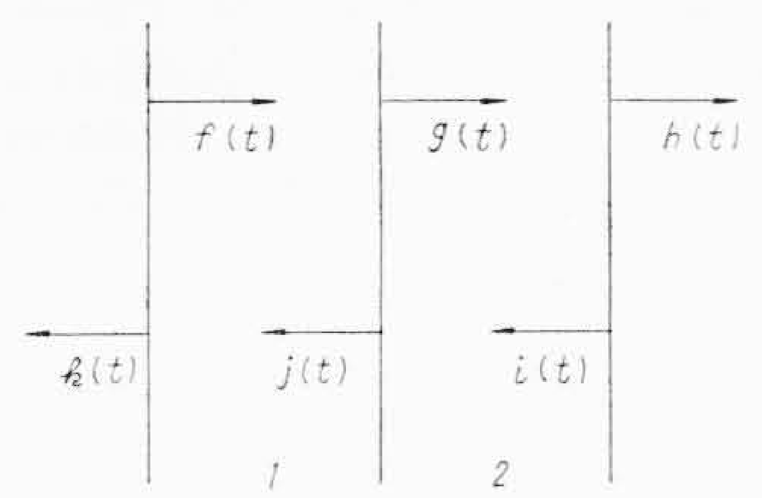
** SPERT-1の模擬燃料要素を電気加熱して出力ボイド伝達関数の測定をしたときに現われた 0.30 秒の時間おくれはこうして説明できよう[13]。




第5図　一点Aを出た波の透過，反射による伝ぱ




第6図　運動量の反射透過係数




第7図　ブロック伝達関数を求める説明図

一次元の管内に規則的にならんでいるものとし，その体積率を$f$とする。媒質1から2へ入射する圧力波の透過，反射は音響の教科書[12]によれば第1表のとおりである。これらはその境界で圧力と速度が連続でなければならないとする条件から導かれるもので，当然運動量* $\rho\delta v\cdot cdt$ とエネルギーは保存されている。

第5図のような層状構造の一点の圧力を$\Delta t$時間だけ外部から高めたとしよう。その結果は圧力だけでなく速度または運動量に乱れを与えたことにもなり，それらは比例関係にあってどの一つを用いてもほかの量が直ちに求められるので，ここでは物理的意味がはっきりしており，かつ反射透過後の量が保存される特長のある運動量を用いた議論を行なう。このとき1から2または2から1への運動量透過反射の係数を，第6図のように定義すると

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{2z_2}{(z_1+z_2)} & \tau_0 &= \frac{2z_1}{(z_1+z_2)} \\ R_0 &= \frac{(z_1-z_2)}{(z_1+z_2)} & \rho_0 &= \frac{(z_2-z_1)}{(z_1+z_2)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

となる。ここで注意すべきことは音響インピーダンス$z$の小さい媒質から大きい媒質にぶつかって反射する運動量は符号が変わることである。打ち込まれた運動量は速度$c_1$または$c_2$で直進し，次の境界面で(25)式の割合に従って透過または反射し以下ジグザグコースを経てひろがってゆく(第5図)。一点で観測していると，真直に透過ばかりをくり返してきたものがまず到達し，次いで1回，2回反射したものがやってくることになる。多数反射の波は反射率がたくさん掛かるだけ弱いけれども，各所で反射したものの和となり組み合わせの数がそれだけ多いから，もし境界の数が十分多いならば多数反射のほうが強く，$Q$回散乱を中心として鋭いピークが出るものと予想される。反射面の数が多ければ事実上$Q$回散乱波だけが観測にかかり，その到達時刻は反射をくり返してむだに過ごした時間だけおくれることになろう。したがって二相流中の音速測定にあたっては発音体と受音体の中間のみでなくその外側も含めて約300個以上の反射面に相当する気泡を置かなければ圧力波の形は10%以上くずれるという結論になる。

以上の推論が正しいことを以下に計算で示そう。まず第7図のように物質1と2の層をまとめて一ブロックとし，そのブロックにはいってきた波と出てゆく波の関係を調べる。第7図において$f, g$などは境界面を右または左に進む運動量でそれぞれ時間の関数である。$g$を例にとるとそれは$t_1=\Delta X_1/c_1$以前の$f$の透過したものと$t_2=\Delta X_2/c_2$以前の$i$の反射したものの和であるから

$$g(s)=T(s)f(s)+\rho(s)i(s)$$

となる。ここに$g(s)$は$g(t)$のラプラス変換，また

$$T(s)=T_0e^{-st_1} \qquad R(s)=R_0e^{-st_1}$$
$$\tau(s)=\tau_0e^{-st_2} \qquad \rho(s)=\rho_0e^{-st_2}$$

その他の関係も書き上げて中間量を消去し，左から入射した波に対する透過波と反射波の伝達関数は

$$h(s)=\frac{T\tau}{(1-P^2)(1-R^2)-\rho RT\tau}$$

$$k(s)=\frac{(1-P^2)R^2+\rho RT\tau}{(1-P^2)(1-R^2)-\rho RT\tau}\frac{T}{R}$$

となる。右から入射した運動量に対する透過反射の伝達関数は上式で$T$と$\tau$，$R$と$\rho$を交換して得られるがこれを$h'$，$k'$とおく。ただし$h'=h$は明らかである。

このブロックをならべて$N=1, 2, 3, \cdots\cdots$とし，$N$の点を右または左に進む運動量を$\overrightarrow{a}_N$，$\overleftarrow{a}_N$とすると

$$\overrightarrow{a}_N(s)=h(s)\overrightarrow{a}_{N-1}(s)+k'(s)\overleftarrow{a}_N+\overrightarrow{b}_N(s)$$
$$\overleftarrow{a}_N(s)=h(s)\overleftarrow{a}_{N-1}(s)+k(s)\overrightarrow{a}_N+\overleftarrow{b}_N(s)$$

となる。ここに$b_N$は点$N$に外部から加える運動量。次によく使う技巧で，generating function $A$，$B$を次式(27)で定義[16]すると，上の式は簡単に

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{A} \\ \overleftarrow{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\zeta & k \\ k & \dfrac{h}{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A} \\ \overleftarrow{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overrightarrow{B} \\ \overleftarrow{B} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

となる。ただし

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A} &= \sum_{N=-\infty}^{\infty}\zeta^N\overrightarrow{a}_N(s) & \overleftarrow{A} &= \sum_{N=-\infty}^{\infty}\zeta^N\overleftarrow{a}_N(s) \\ \overrightarrow{B} &= \sum_{N=-\infty}^{\infty}\zeta^N\overrightarrow{b}_N(s) & \overleftarrow{B} &= \sum_{N=-\infty}^{\infty}\zeta^N\overrightarrow{b}_N(s) \end{aligned}\right\} \cdots(27)$$

$A(\zeta, s)$は直ちにとける。

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{A} \\ \overleftarrow{A} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1-\dfrac{h}{\zeta} & k \\ k' & 1-h\zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overrightarrow{B} \\ \overleftarrow{B} \end{bmatrix}}{1+h^2-kk'}\{1-f(\zeta+\zeta^{-1})\}^{-1}$$

$$f=\frac{h}{(1+h^2-kk')}$$

特に$N=0$においてパルス的に右むき運動量を加えたいときの点$N$における値は

* $\rho\delta v$は運動量密度で，運動量のパルス持続時間を$dt$とすれば媒質$i$では$c_i dt$のひろがりをもっている。そのひろがりについて積分した$\rho c\delta v dt$を以下運動量という。その符号は$\delta v$できまる。

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{a_N} \\ \overleftarrow{a_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k' \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1+h^2-kk'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} f^n {}_nC_r \zeta^{n-2r}$$

（の $\zeta^N$ の係数）

$$= \frac{(1 \text{ または } k')}{1+h^2-kk'} \sum_{Q=0}^{\infty} f^{N+2Q} {}_{N+2Q}C_Q$$

$N, Q$とも大きいとき，$C$をスターリングの公式で書きかえ，$Q$についての和を積分におきかえ，被積分項はある$Q$を中心として鋭いガウス形の山をなしていることの考察から近似的に積分を行なうと

$$\overleftarrow{a_N}(s) \doteqdot \{\varphi-\sqrt{\varphi^2-1}\}^N$$

$$\varphi \equiv \frac{1}{2f} = \frac{\cosh(t_1+t_2)s - R_0^2\cosh(t_1-t_2)s}{1-R_0^2}$$

となることが計算で示される。そこで$t_1$，$t_2 \to 0$，$N \to \infty$とすると

$$\overrightarrow{a_N}(s) = e^{-Ts}, \quad T^2 = N^2\left\{t_1^2+t_2^2+2t_1t_2\frac{1+R_0^2}{1-R_0^2}\right\} \qquad \cdots\cdots(28)$$

となる。こうして第$N$番のブロックには時間$T$を要することがわかり，これより音速$c$は$R_0$を(25)式でかきかえると

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{f_1}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{c_2}\right)^2 + \frac{f_1}{c_1}\frac{f_2}{c_2}\left(\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}\right) \qquad \cdots\cdots(29)$$

となる。

一方圧縮率から定義される音速は周知のようにまさに上の式そのものであり，われわれの推論が正しかったことを示している。

問題は水-蒸気などの二相流の場合蒸発凝縮が起こるのは周波数の低いゆっくりした変化に限られるから，その検出にはパルス的音圧では不適当かもしれない。正弦状の圧力変化を加えて激しい沸騰雑音の中の信号を検出することが問題となる。

## 6. 結　　言

BRWの炉内ボイド分布を記述する気泡方程式と，その成り立つための根拠に関する理論的考察を記した。この考察を通じて，われわれが提出当初予想したよりは一層根拠のある方程式であるとの感を深くしている。その実験的検証はJPDRの動特性解析で原研により計画されているが，この場合はプラント動特性の影響がつよく，炉心内の気泡動特性に関してはっきりしたデータが得られないおそれもある。逆にいえば，SPERT-1やEBWRのような実験炉は別として，酸化ウラン燃料棒を用いる高圧動力炉では核・熱・水のループのうち熱のところが安定化によく効いて，一巡ループがフィードバックによる不安定を起こすことがなくなってしまっている。こうしてBWR開発の初期からの問題であったフィードバック不安定は解明され，回避されている。残る問題の一つは，BWRの出力密度を上げてゆくと二相流自体の不安定現象が発生して現在出力の上限を押さえる要因となっている。またドレスデン発電所の試運転で現われた周期5～6秒の水力学的振動の解釈や舶用原子炉の動特性に対しては，水力学的回路の安定性と二相流自体の安定性に関する一層の研究を必要としている。そもそも二相流は，軽い気泡が重い液相の下に浮いている不安定な流体であり，乱流中で作用し合う気泡集団の統計をいかに簡単化して有用な結論を早く出すことがこれからの目標である。

本研究にご理解いただいている電気学会原子力発電所制御専門委員会大山主任ほか各委員，原研計測制御研究室三井田氏，日立工場原子力課の諸氏に感謝する。

## 参　考　文　献


(1) 電気学会，原子力発電所制御専門委員会編： 沸騰水形原子力発電所の動特性と制御 (1961)
(2) Lottes, Petrick, Marchaterre. Lecture Notes on Heat extraction from BWR ANL-6063
(3) ANL-6381, 6385, 6369
(4) E. S. Beckjord: The Stability of Two-phase Flow Loops GEAP-3493
(5) 金井，川合，亀田： 原学誌 3, 168 (1961), Void Reactivity response in BWR
(6) A. Sommerfeld: Partial Differential Equation in Physics (Academic Press 1949)
(7) グラストン・エドランド： 原子炉の理論(みすず書房 1955)
(8) F. Schroeder et al: NSE 2, 96 (1957)
(9) O. Miyagi: Phil. Mag. 50 (1952) 112, The Motion of an Air Bubble Rising in Water
(10) F. N. Peebles, H. J. Garbor: Chem. Engr. Progress (1953) 88, Studies on the Motion of Gas Bubbles in Liquids
(11) S. Levy, J. Heat Tranfer: May 1960, 113, Steam Slip-Theoretical Prediction from Momentum Model
(12) Fluid Mechanics: L. D. Landau, E. M. Lifschitz
(13) R. W. Wright, S. M. Zivi: Power-void Transfer Function Measurements in a Simulated SPERT-IA Moderator Coolant Channel (1960) RWD-RL-176
(14) H. B. Karplus: The Velocity of Sound in a Liquid Containing Gas Bubbles AEC-COO-248
(15) H. B. Karplus: Propagation of Pressure Waves in a Mixture of Water and Steam. ARF-4132-12
(16) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Charles E. Tuttle Co. (1950)


## 記　　号

$c$： 音速(圧力伝ぱ速度) (cm/s)
$D$： 水路の等価直径 (cm)
$e$： 内部エネルギー (erg/g)
$f$： 気泡体積率
$F(\rho, v)$： Fanning factor
$g$： 重力の加速度 (cm/s$^2$)
$h$： エンタルピー (erg/g)
$h_{lg}$： 気化の潜熱 (erg/g)
$p$： 圧　力 (dyne/cm$^2$)
$Q$： 熱源密度 (erg/cm$^3$s)
$s$： すべり比，エントロピー (erg/g℃)
$\Delta s$： 気化によるエントロピー変化 (erg/g℃)
$T$： 温　度 (°K)
$v$： 流　速 (cm/s)
$\Delta V$： 気化による比体積変化 (cm$^3$/g)$=V_{lg}$
$x$： 蒸気の重量流量率
$\Gamma_{g\to l}$： 気相から液相への運動量 (単位高さ当たり)
$\Gamma_{l\to w}$, $\Gamma_{g\to w}$： 液相および気相から壁に伝えられる運動量 (単位高さ当たり)
$\rho$： 密　度 (g/cm$^3$)

suffix

$l$： 液相を示す
$g$： 気相を示す
0： 定常値を示す