

各種標準スプラインの強さの解析

(主としてインボリュートスプラインについて)

Analysis of the Strength of Some Standard Splines
(Mainly of the Involute Spline)

保 延 誠* 岸 正 也*
Makoto Honobe Masaya Kishi

内 容 梗 概

各種の標準スプライン (おもにインボリュートスプラインの JIS 方式と SAE 方式, そのほか角形スプライン, インボリュートセレーション) について, 性能を比較した。インボリュートスプラインに関しては, 多くの点で, JIS 方式は SAE 方式にまさると判断される。

また, スプラインの大きさを押えられた場合, その強さを高めるのに適当な軸長, 歯数, その他の方法について, その効果を解析した。

1. 緒 言

近年, インボリュートスプラインは, その利点が認識され, 角形スプラインに代わって, 次第に広く使われるようになってきた。

インボリュートスプライン方式を大別すると, ダイアメトルピッチ (DP) 方式とモジュール (m) 方式に分けられる。

DP 方式の代表として, SAE 規格 (アメリカ), BS 規格 (イギリス) があり, m 方式は, BNA 規格 (フランス), ISO (国際標準化機構) 案, JIS 規格 (JIS D2001 自動車用インボリュートスプライン) がある。

インボリュートスプラインの規格としては, SAE 規格が最初に日本に紹介されたので, 国鉄その他のように SAE 規格をモジュールに換算 (歯形は SAE と同じで, 歯の大きさの段階を標準モジュール, すなわちメートル方式にした) し使用している例もかなりある。その製品の一例を第 1 図に, はめあい状態を第 2 図に示す。

その後, 1959 年に JIS 規格, 自動車用インボリュートスプラインが制定され, 国内でだんだん使用されるようになってきた。その製品の一例を第 3 図に, はめあい状態を第 4 図に示す。

このように, 国内では, SAE 方式と JIS 方式が混用されている現状であるが, 将来の混乱をさけるためには, どちらかへの統一が望ましい。このような経緯から, 次のような点をはっきりさせるため検討を試みた。

- (1) JIS 方式と SAE 方式の実用的な総合比較 (設計しやすさ, 強さ, 作りやすさなど)
- (2) インボリュートスプラインの強さの定量的な位置づけ (角形スプライン, セレーションなどに対して)
- (3) インボリュートスプライン設計の要点, 強さを高める方法の効果の解析

などである。

2. JIS 規格と SAE 規格の歯形形状比較

インボリュートスプラインの強さを知るため, はじめに JIS および SAE の各規格の歯形形状を比較した。

まず代表として, 中心合わせ方式を歯面合わせとしたときの平底形および丸底形インボリュートスプラインについて比較した。

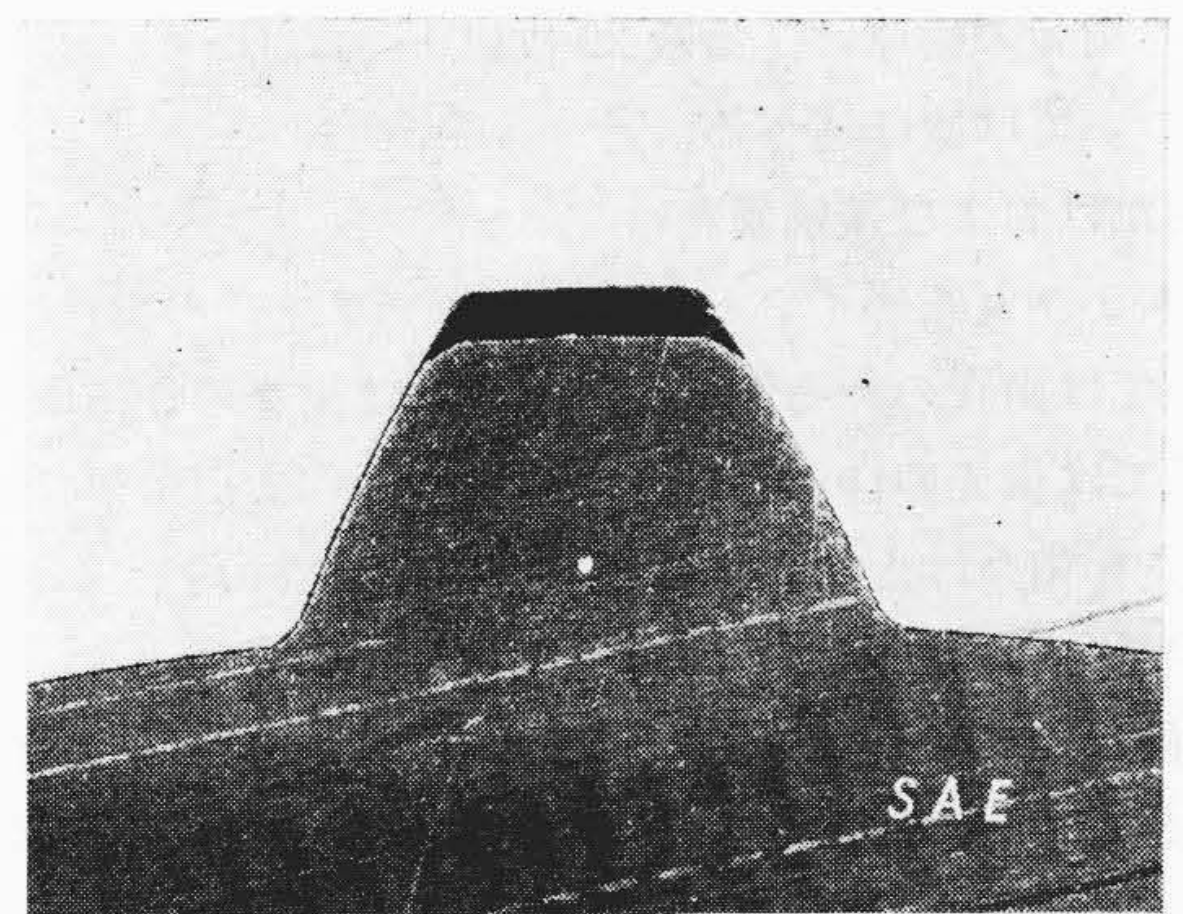
強度と関連づけるため比較基準として, 軸大径を同一寸法としたときの軸小径に対する歯たけ, 接触歯たけ, 歯元の丸み, 歯元の歯厚をとった。

それらの結果は, 大略次のようになる。

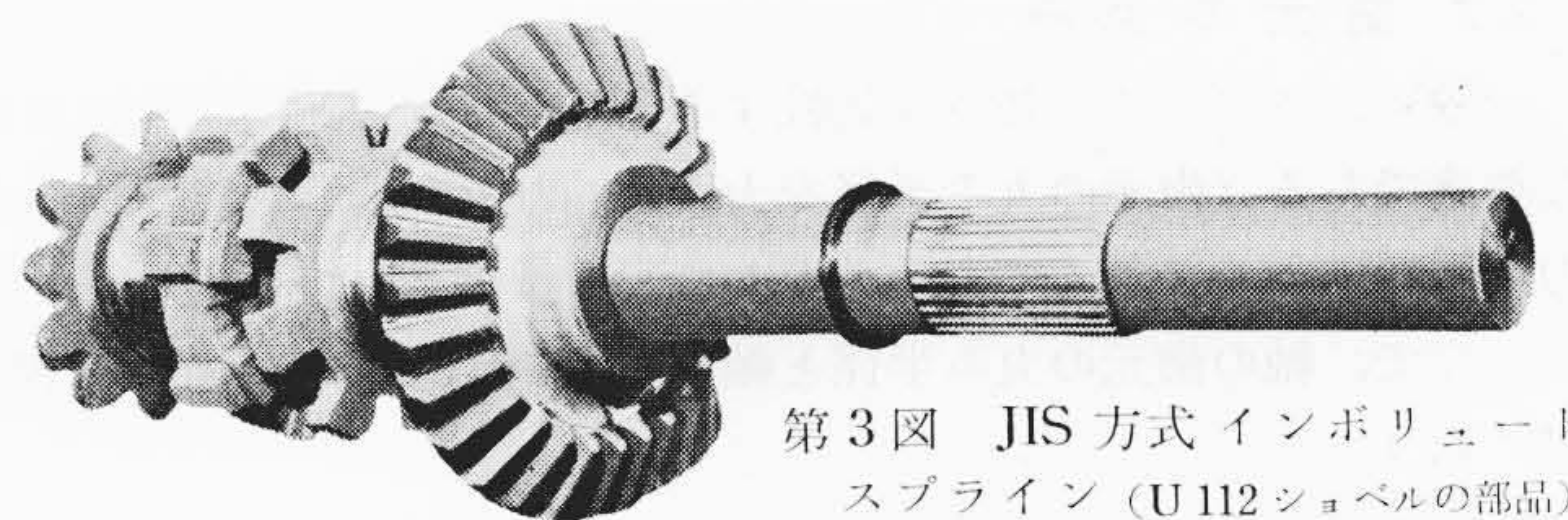
* 日立製作所亀有工場



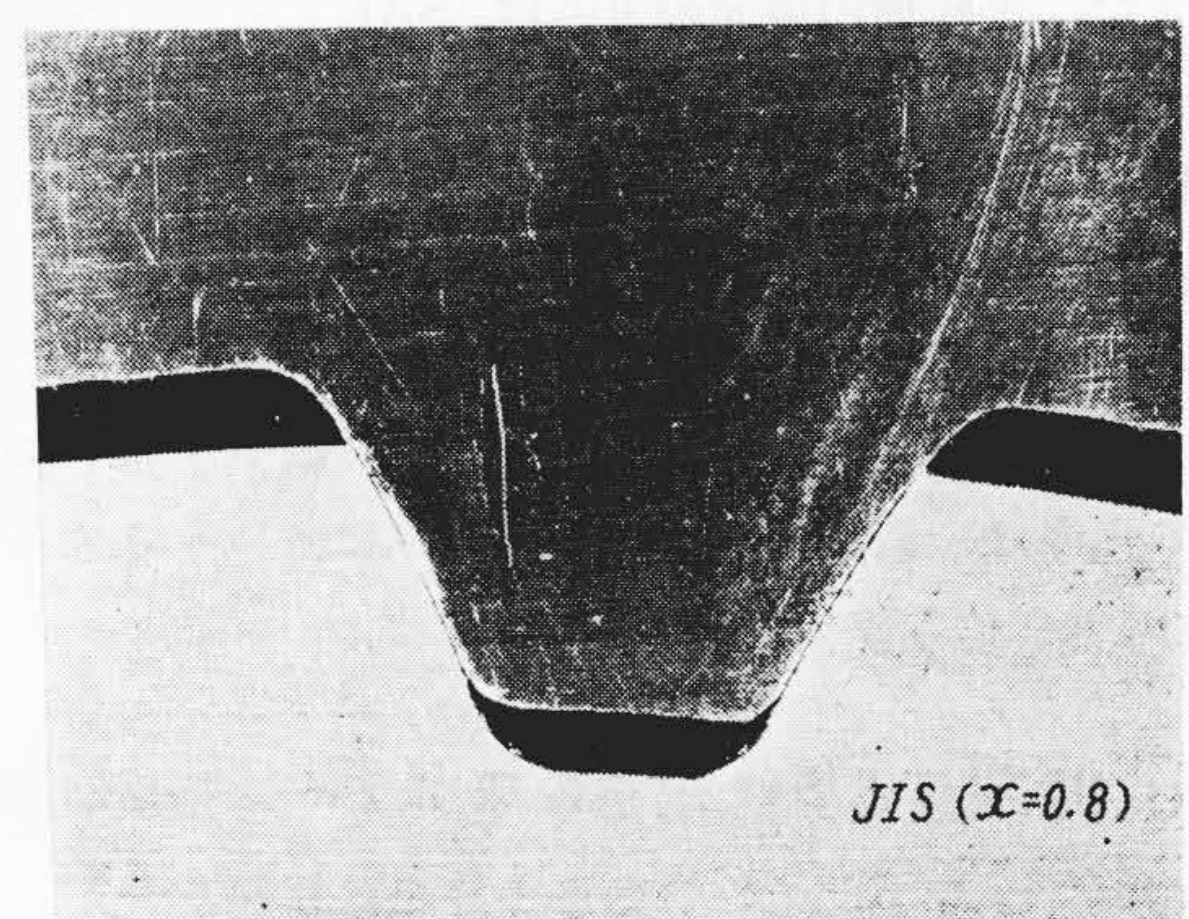
第 1 図 SAE 方式インボリュートスプライン (国鉄ディーゼル機関車 DD13 の部品)



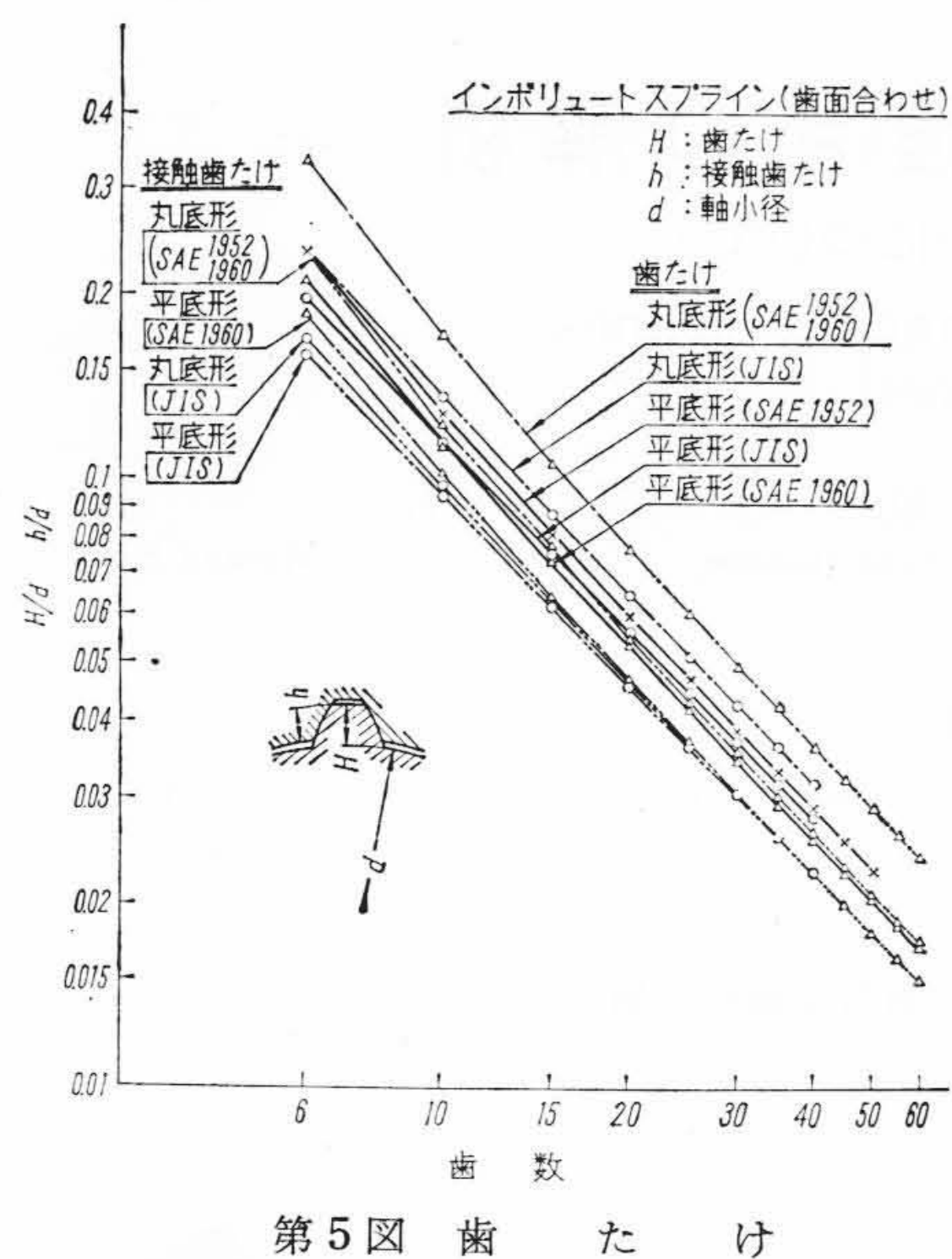
第 2 図 SAE 方式インボリュートスプラインの歯形 (断面写真) 小径合わせ, 固定はめあい歯数 24 枚



第 3 図 JIS 方式インボリュートスプライン (U 112 ショベルの部品)



第 4 図 JIS 方式インボリュートスプラインの歯形 (断面写真) 歯面合わせ, 固定はめあい歯数 24 枚



(1) JIS は圧力角 20 度で 0.8 m 転位した歯形であり, SAE は圧力角 30 度の非転位歯形である。

(2) 軸大径を等しく押えたとき,

(i) 歯たけおよび接触歯たけは、JIS に比べ SAE が大きい。

(ii) 歯元の丸みは、SAE に比べ JIS が大きい。

(iii) 歯元の歯厚は、歯数 20 枚以下では JIS が大きい。

各項については次に述べる。

2.1 歯たけおよび接触歯たけ

平底形および丸底形インポリュートスプラインの歯たけは、小径(軸においては歯底の作る円、穴においては歯先の作る円の直径)から大径(軸では歯先の作る円、穴では歯底の作る円の直径)までの半径方向長さを歯たけとし、接触歯たけとは軸外歯と穴内歯の実際接触部分の半径方向長さである。

以下、歯たけおよび接触歯たけの比較結果を第5図に示す。接触歯たけはSAEが歯数の少ないところで、たとえば、歯数10枚で約7% JISよりも大きく、歯数35枚以上になるとほぼ等しくなる。

また、歯数が少なくなるほど、歯たけ(H)と軸小径(d)の割合が大きくなる。

2.2 歯元の丸み

一般に、スプライン強さを比較する条件として歯元の丸みは重要な要素である（歯元の丸み半径を大きくした丸底形スプラインは応力集中を小さくできるので重荷重の使用に推奨されている）。

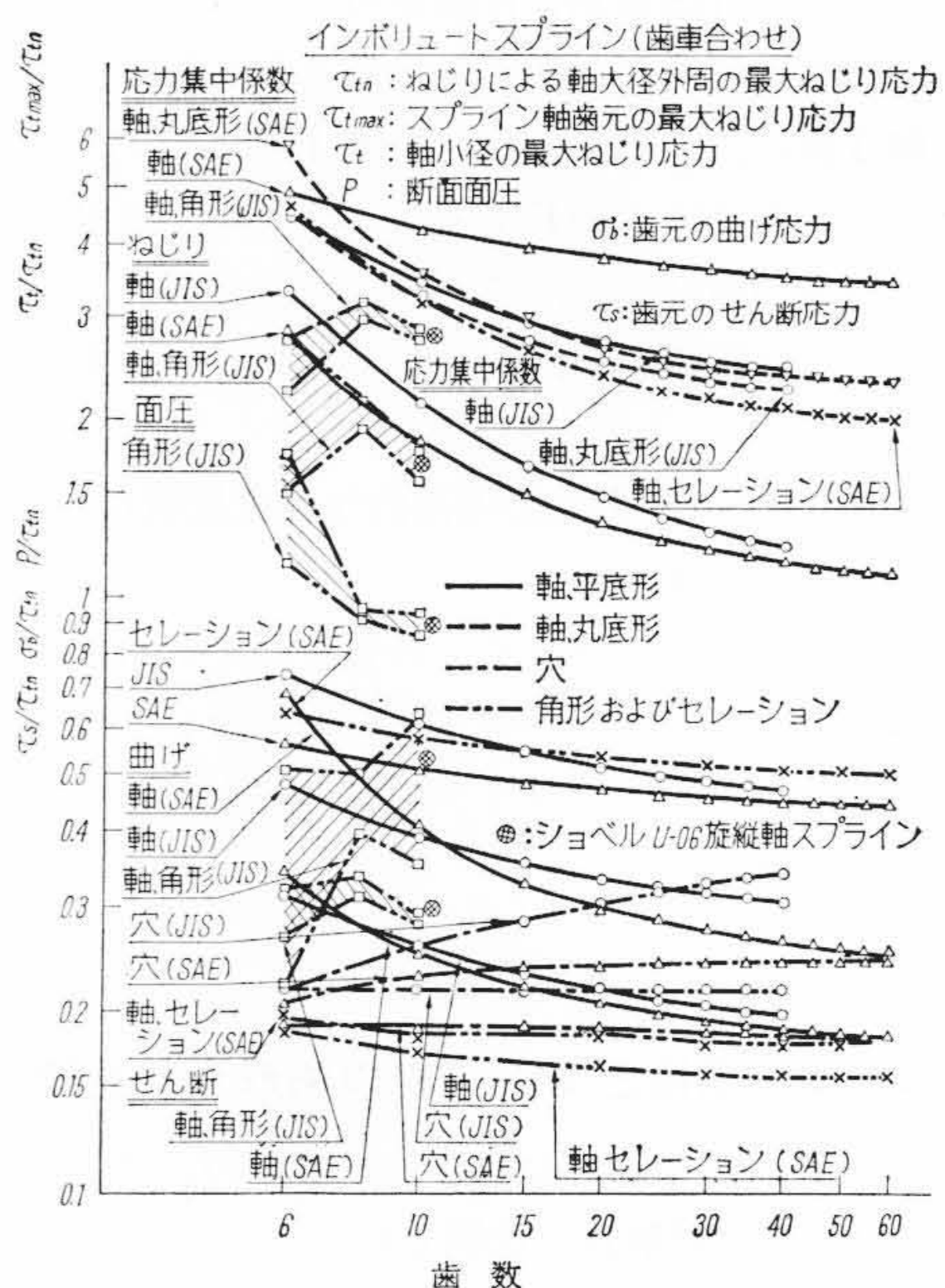
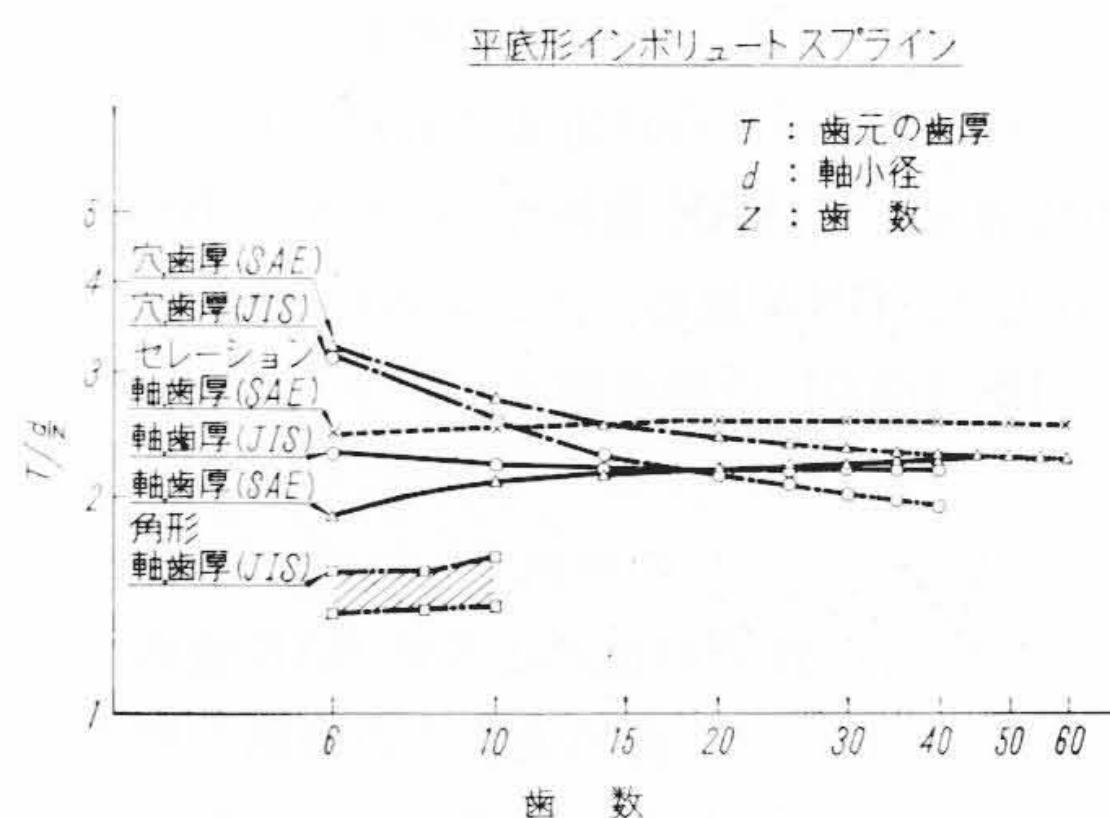
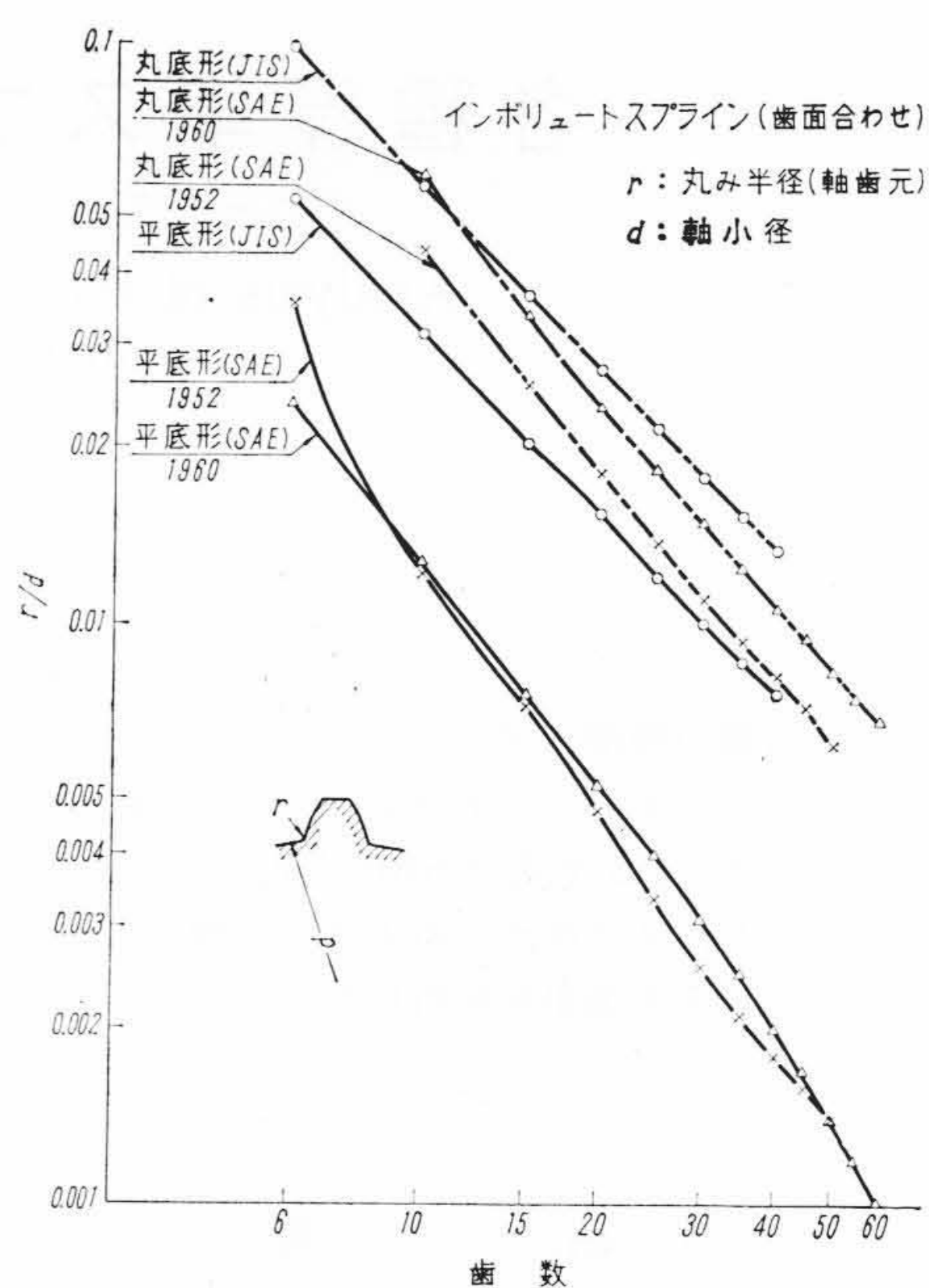
ここで、軸の歯元の丸み半径と軸小径との比を求めた結果を第6図に示す。

一般に、歯数が少なくなるほど歯元の丸みと軸小径との比が大きくなる。また、平底形の歯元の丸みは、SAE に比べ JIS が約 2.5～3 倍大きい。

2.3 齒元の齒厚

歯元の歯厚は、軸小径上(穴の場合は穴の大径)の歯厚(軸小径円上にインボリュート歯形曲線が交わる点での歯厚) T について、軸小径上の1モジュールとの比を求めた。その結果を第7図に示す。

軸歯元の歯厚は、歯数 20 枚以下では SAE に比べ JIS が大きく、歯数 10 枚のとき約 5% 大きい。



第8図 応力集中係数，ねじり，面圧，曲げ，せん断
($l/d=1$ の場合， l ：軸長， d ：軸大径)

3. JIS 規格と SAE 規格のスプライン強度比較

前章において、スプラインの歯形を簡単に比較したが，ここでは単純な平均（軸方向に沿ってのかたあたりを無視したもの）応力に分解してスプライン強さを比較した。

スプラインの主要機能は、回転力の伝達であり、またベアリング軸径を決定する場合、スプライン軸を支持するベアリング内径から、スプライン軸大径が定まる場合が多い。すなわち、主要制限寸法は軸大径である。

それゆえ、軸大径を丸棒としたときのねじりによる軸大径外周部の最大ねじり応力(最大せん断応力)を公称応力とし、これを基準にしてスプラインの種々の平均応力を使用歯数範囲について計算し比較した。

比較したものは、歯面面圧、歯元のせん断応力、歯元の曲げ応力、歯元のねじり応力集中係数である。

これらの計算結果をまとめて第8図に示す。

3.1 歯面の平均接触面圧 p_0

歯面の面圧は、接触歯面の接線方向への投影面積に、どの歯も等しく、しかも一様に分布しているものとする。

一般に、JISはSAEに比べ平均接触面圧は高い。このことは、第5図に示すようにJISの接触歯たけがSAEより短いからである。

3.2 歯元の平均せん断応力 τ_s

荷重の作用点を接触歯たけの中央としたときの歯元の平均せん断応力 τ_s とねじりによる軸大径外周部の最大ねじり応力 τ_{tn} との比を求め比較した。

3.3 歯元の平均曲げ応力 σ_b

荷重の作用点が接触歯たけの中央としたときの歯元の平均曲げ応力 σ_b と軸大径の最大ねじり応力 τ_{tn} との比を求め比較した。

3.4 軸歯元の平均ねじり応力 τ_t

軸小径を丸棒としたときの外周部の最大ねじり応力 τ_t と、軸大径を丸棒としたときの外周部の最大ねじり応力 τ_{tn} との比を求めた。

JISとSAEの軸大径を等しく押えた軸歯元の平均ねじり応力は、SAEに比べJISは高い(歯数20枚のとき約10%高い)。

次に歯数が多くなるほど、歯元の平均ねじり応力は低くなる。たとえばJISの場合、歯数10枚に比べ20枚の場合は約30%低くなる。

この理由は、歯数が多くなるほど軸大径に比べ軸小径が大きくなり、歯元の平均ねじり応力を低める。すなわち、軸大径を等しく押えて歯数を増すと、モジュールは小さくなり必然的に軸小径が大きくなるからである。

3.5 ねじりによるスプライン軸の応力集中

スプライン軸の歯元のねじり応力集中を求める式として、中沢博士の多数のみぞのある軸についてねじり応力集中係数を求める実験式を用いた⁽¹⁾。

$$\alpha_{k0} = \frac{r_0}{R_0} \left[1 + 0.170 \frac{t}{\rho_0} \left\{ 1 + \frac{3.94}{0.10 + t/\rho_0} \right\} + \frac{6.38 \{ 1 + 0.1 (t/\rho_0) \}}{[2.48 + (r_0/t) (0.04 + t/\rho_0)^{1/3}]^2} \right] \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 r_0 = 軸小径の半径

R_0 = 軸大径の半径

ρ_0 = 歯元の丸み半径

t = 歯たけ

ここで、 α_{k0} は歯元の最大ねじり応力と、スプライン軸と等しい外径の丸棒を同じねじれ角、ねじったときの最大ねじり応力との比である。したがってこれを同じねじりモーメントでねじったときの応力集中係数に直す必要がある。

ここで、中沢博士はねじりモーメントの計算にスプラインのねじりこわさに関する換算平均直径 d_h を用いることを提案している。

$$d_h = d_3 + K_0 (d_3/d_2) (d_2 - d_3) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 d_2 : 軸大径

d_3 : 軸小径

K_0 : 歯形の種類の係数

(2)式における、同一外径の円形断面軸に対するスプライン軸のねじりこわさの低下率を γ とすれば、

$$\gamma = (d_h/d_2)^4 \dots\dots\dots (3)$$

したがって、ねじりモーメントを等しくしたときのスプライン軸歯元の応力集中率 α_0' は、

$$\alpha_0' = \frac{\alpha_{k0}}{\gamma} = \frac{\tau_{tmax}}{\tau_{tn}} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 τ_{tmax} : スプライン軸歯元の最大ねじり応力

τ_{tn} : 軸大径を丸棒としたときの外周部の最大ねじり応力

(4)式より各歯形についてねじり応力集中係数を求めた結果を第8図に示す。

ここで、平底形と丸底形インボリュートスプラインを比較する。JISでは丸底形インボリュートスプラインの歯元の丸み半径は平底形の歯元の丸み半径の約1.75倍の大きさである。しかし、同一内径のベアリングに使用したとき、すなわち軸大径寸法を等しくしたとき、丸底形に比べスプライン軸のねじり強さが必ずしも大幅に強くない(かえって、弱まることもある)。

このことは丸底形スプライン軸小径($dr' = d - 2.6921m$)は、平底形スプライン軸小径($dr = d - 2.4m$)に比べ小径で0.2921m減少し、軸小径外周部の最大ねじり応力が増すためである。

また、歯数についていえば、歯数が少ないほど歯元の丸み半径と軸小径の比は大きい。すなわち、軸大径を等しい寸法としたとき歯数の少ないほど、軸小径の減少は大きく、スプライン軸歯元のねじり応力集中が増す。

4. スプラインの強さを高める方法

4.1 スプラインの歯の軸方向に沿っての面圧分布(かた当たり)の計算

スプラインの軸方向に沿っての面圧分布を一様にする(かた当たりを少なくする)ことは、スプラインの強さを高める一方法である。

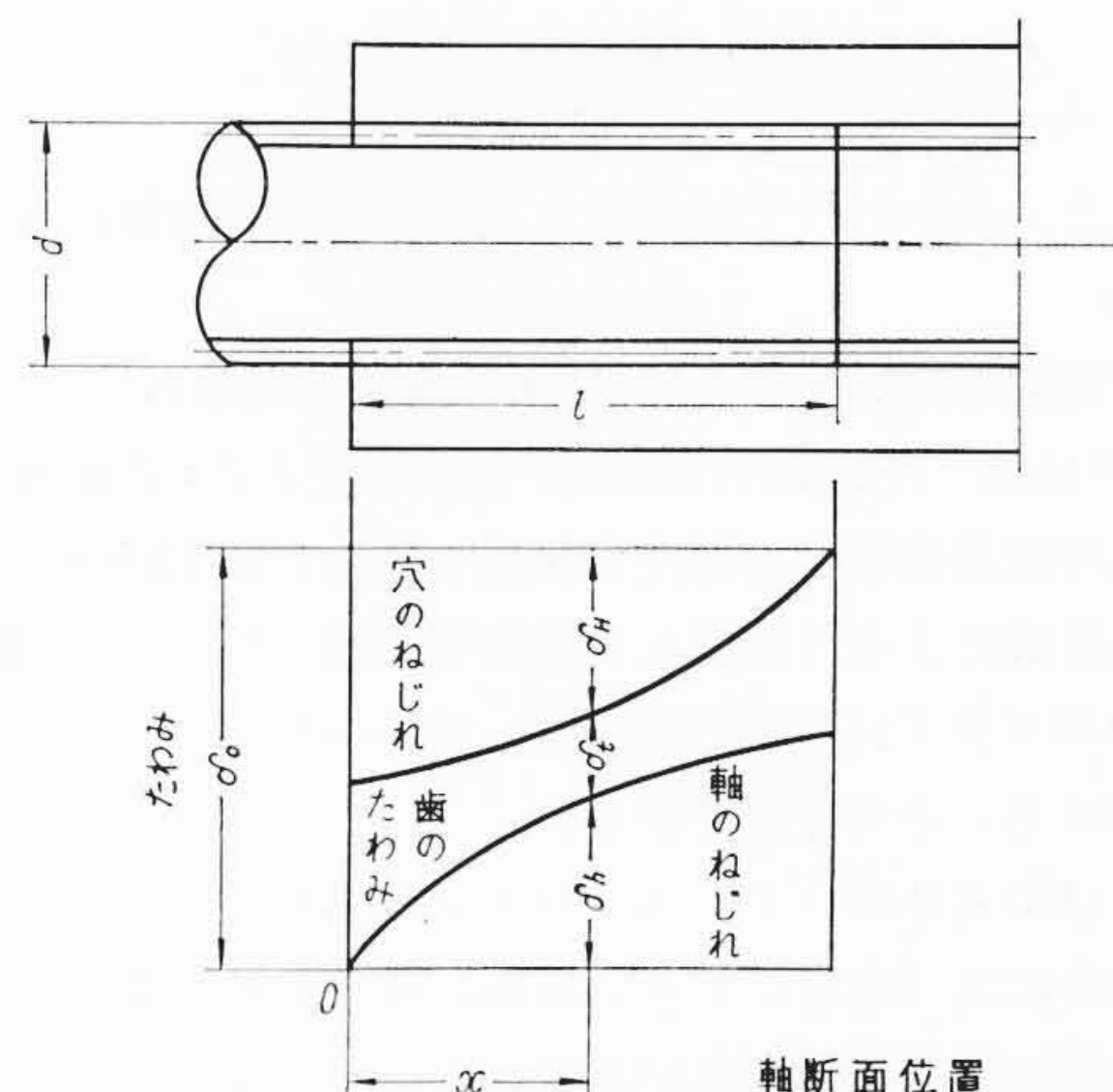
ここで、スプラインの歯の軸方向に沿っての面圧分布が、スプラインの軸長によってどのように変わるかを計算し、また、スプラインの軸長を長くしていったときのかた当たりによるその最大面圧の変化を計算した。

これらの計算の前提は、次のとおりである。

- (i) スプラインの製作誤差は無視する。
- (ii) 回転力だけが伝えられる場合とする。
- (iii) 任意の軸直角断面上で、荷重はスプライン軸と穴との相対変位に比例するものと仮定する。

以上の前提の下で、回転力が比較的短いスプライン軸長を通して、軸から穴へ伝達される場合、軸と穴の変位の関係は、第9図に示すようになる。

ここで、歯のたわみ δ_t は軸と穴の歯のたわみの和である。ねじれ



第9図 軸のねじれ歯のたわみの関係

による軸の x 点の変位を δ_h (δ_t と同じように周方向の線変位をとり、常に正と考える)、穴の x 点の変位を δ_H とすると、第 9 図から

$$\frac{d\delta_h}{dx} = k_h^{-1} T \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 T : 任意の軸直角断面上でスプライン軸側を流れるトルク

x : 軸の根本側からとったスプライン軸直角断面位置

k_h : スプライン軸のねじりこわさ

$$-\frac{d\delta_H}{dx} = k_H^{-1} (T_0 - T) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 T_0 : スプラインの全伝達トルク

k_H : スプライン穴のねじりこわさ

(5)式から

$$\frac{d^2\delta_h}{dx^2} = k_h^{-1} \frac{dT}{dx} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{ここに、} \frac{dT}{dx} = -k_P, k_t, \delta_t \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 k_P : 単位面圧当たり、軸方向に沿っての軸側回転力こう配で、スプライン歯の接触歯たけなどから定まる定数

$$\therefore \frac{d^2\delta_h}{dx^2} = -k_h^{-1} \cdot k_P \cdot k_t \cdot \delta_t \dots\dots\dots (9)$$

(6)式から

$$-\frac{d^2\delta_H}{dx^2} = -\frac{k_h}{k_H} \cdot \frac{d^2\delta_h}{dx^2} \dots\dots\dots (10)$$

$$\therefore \frac{d^2\delta_h}{dx^2} \left(1 + \frac{k_h}{k_H}\right) = -\frac{d^2\delta_t}{dx^2} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\frac{k_h}{k_H} = \mu, \frac{k_P}{k_h} \cdot k_t = k$ とおくと、(9)および(11)式から

$$\frac{d^2\delta_t}{dx^2} = (1 + \mu) k \delta_t \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $(1 + \mu) k = \lambda^2$ とおくと

$$\delta_t = \frac{T_0}{\lambda} \left\{ \frac{(k_H^{-1} + k_h^{-1} \cosh \lambda \cdot l) \cosh \lambda \cdot X}{\sinh \lambda \cdot l} - k_h^{-1} \sinh \lambda \cdot x \right\} \dots\dots\dots (13)$$

次に、軸方向に沿っての歯のたわみの平均を $\delta_{t \text{ mean}}$ とすると、

$$\delta_{t \text{ mean}} = \frac{1}{l} \int_0^l \delta_t dx = \frac{T_0}{l \cdot \lambda^2} (k_H^{-1} + k_h^{-1}) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、軸方向に沿っての歯のたわみと歯の平均たわみとの比を求めると(13)式および(14)式から

$$\frac{\delta_t}{\delta_{t \text{ mean}}} = \frac{l \cdot k \{ \mu \cosh \lambda \cdot x + \cosh \lambda (l - x) \}}{\lambda \cdot \sinh \lambda \cdot l} \dots\dots\dots (15)$$

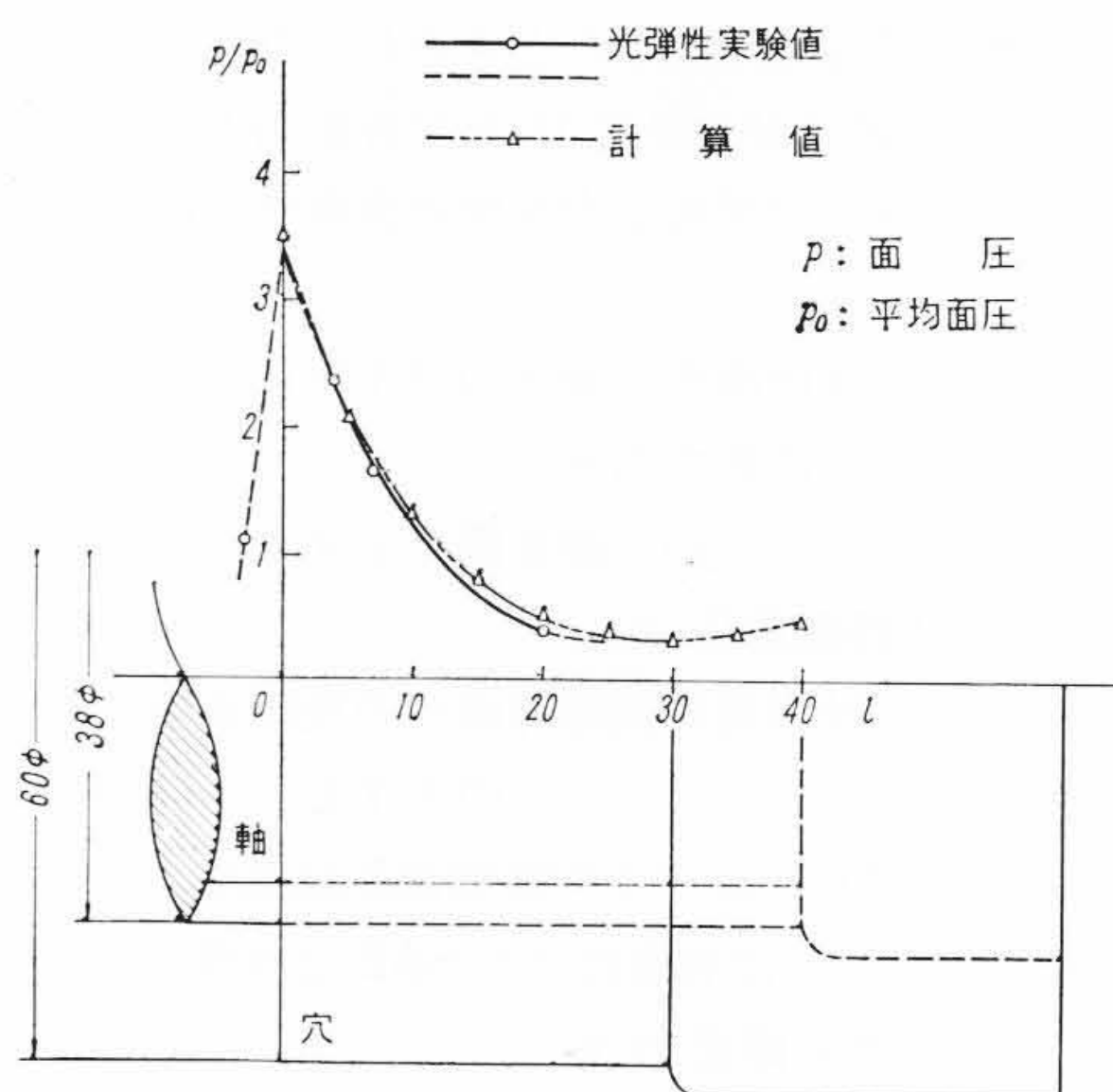
(15)式とわれわれの工場で行なった光弾性の実験結果⁽²⁾とを比較する。

光弾性実験に用いたモデルは、歯数 8 枚の角形スプラインであり、軸大径 38 mm、穴と軸のはめあい部分の長さ $l = 40$ mm である。

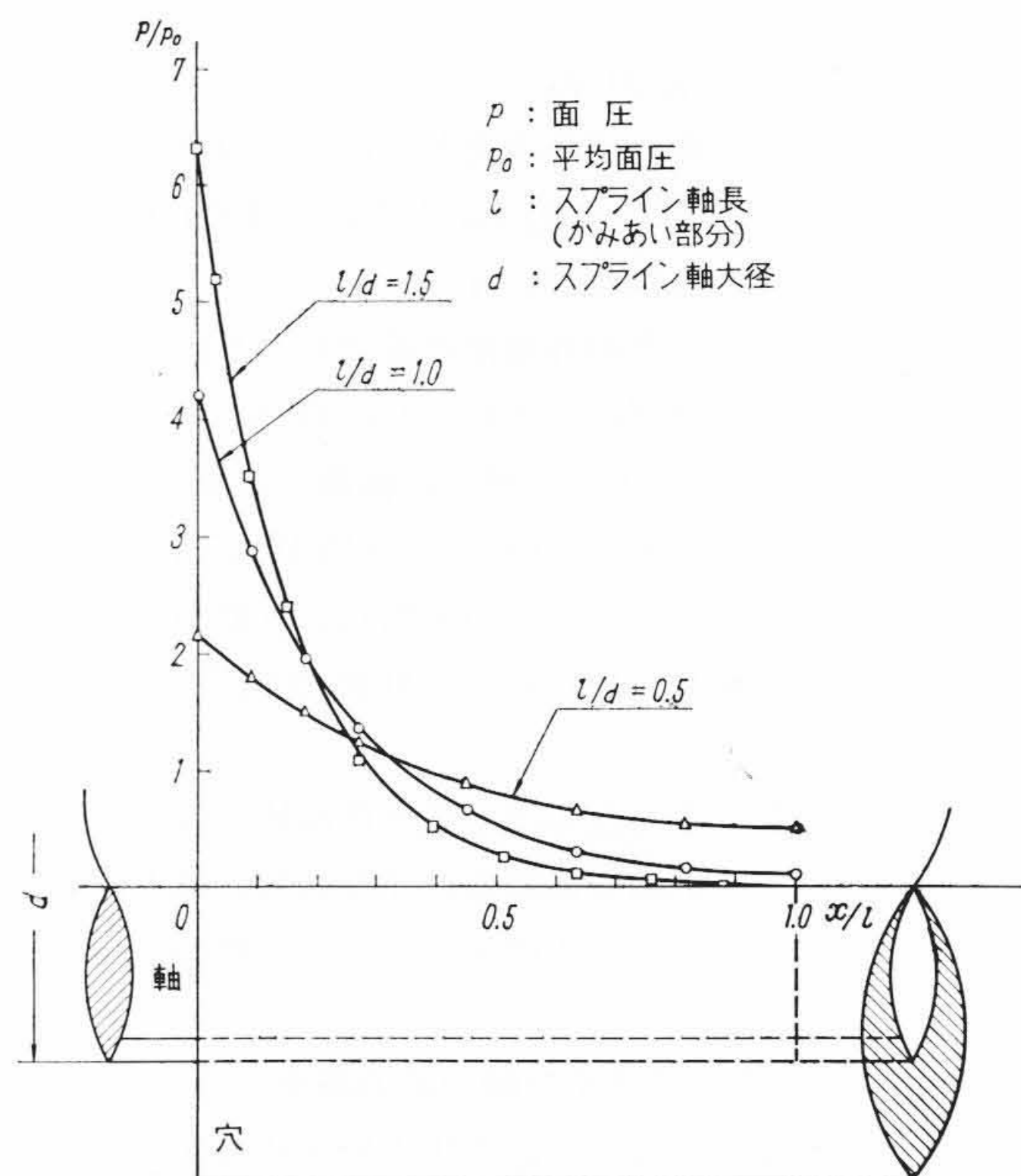
(15)式の計算結果と光弾性実験値を比較し第 10 図に示す。第 10 図で、(15)式による計算値と光弾性実験値とが、ほぼ一致している。

一般のスプラインの軸方向に沿ってのかた当たりの大きさは(15)式を使用することで推定できる。

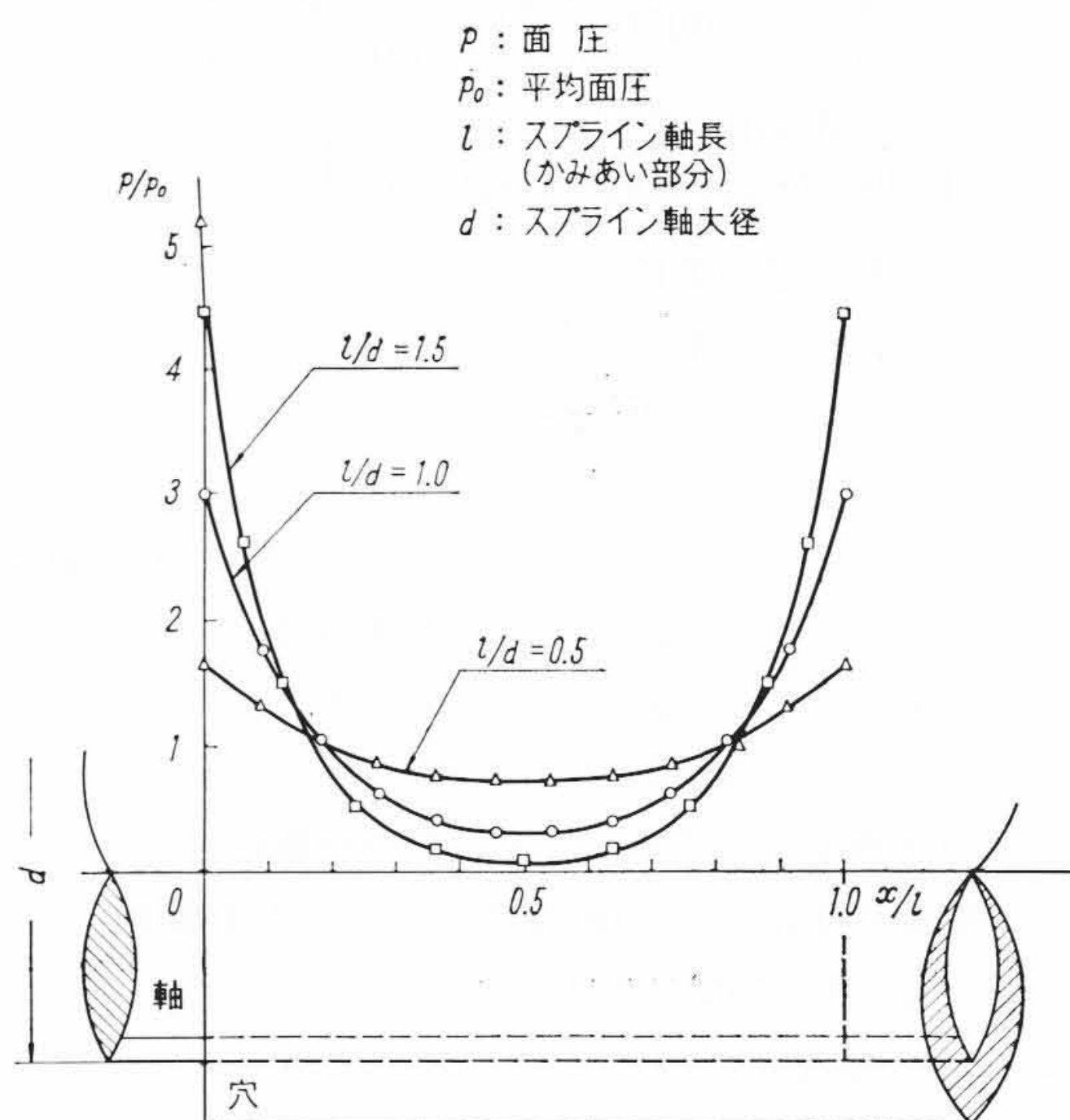
次に、(15)式を用いて、スプラインの穴のねじりこわさが軸のねじりこわさに比べ非常に大きい場合、すなわち穴側の外径がスプラインの大径に比べ十分大きいとき、インボリュートスプラインで歯数 20 枚、モジュール 5、 $l/d = 1$ (スプライン軸のはめあい部分の長



第 10 図 軸方向に沿っての面圧分布 (角形スプライン、歯数 8 枚)

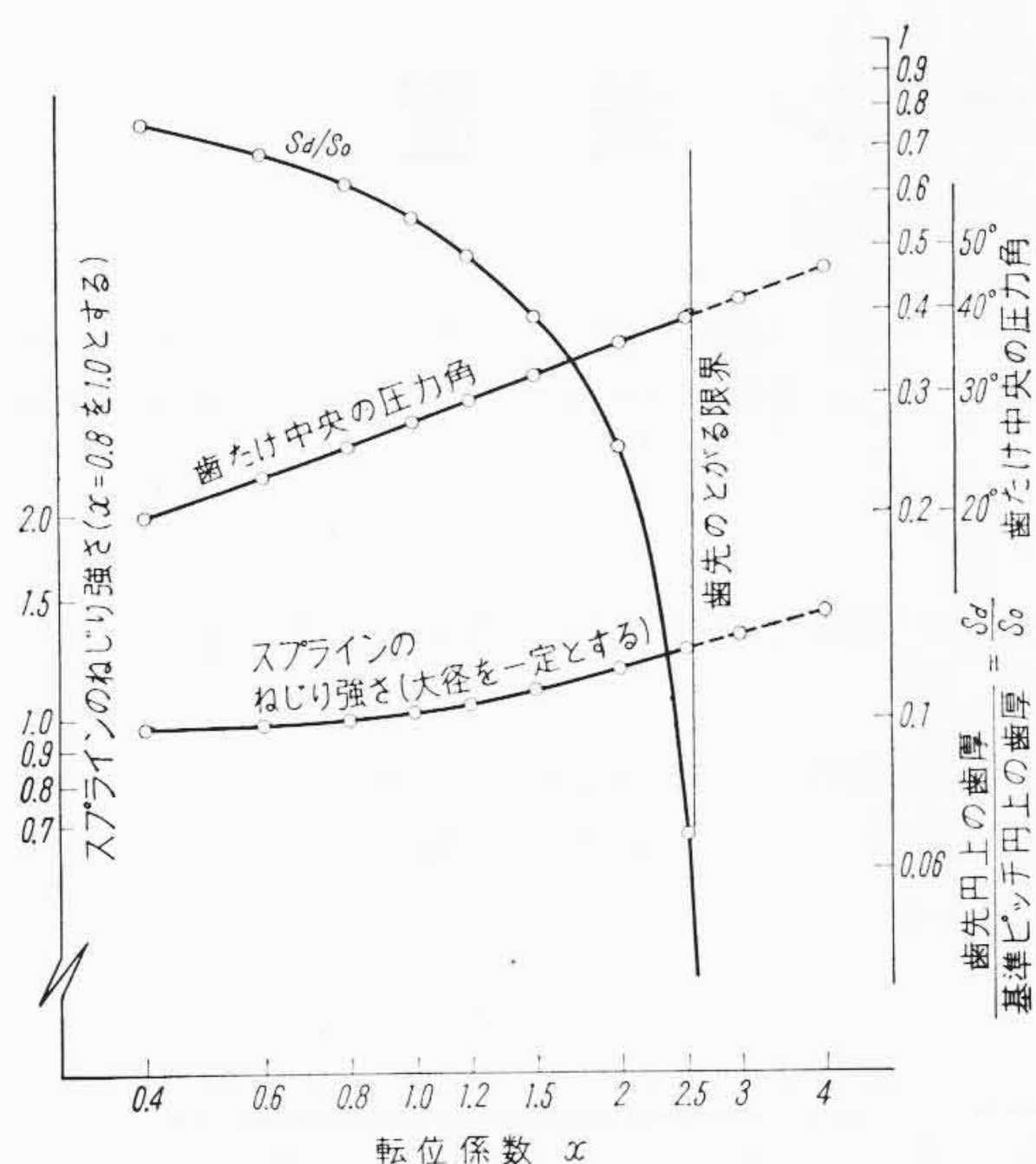


第 11 図 軸方向に沿っての面圧分布 (穴のこわさ>軸のこわさ歯数 20 枚)



第 12 図 軸方向に沿っての面圧分布 (穴のこわさ=軸のこわさ 歯数 20 枚)

さ l とスプラインの軸大径 d との比) の場合についてスプライン軸方向に沿っての面圧分布の計算結果を第 11 図に示す。



第13図 転位係数とスプライン軸のねじり強さ、圧力角、歯厚の関係（歯数20枚）

穴側のねじりこわさが大きいとき最大面圧は軸の根本側に生じ、平均面圧の約4.2倍になり、かなりのかた当たりとなる。

（実際には、穴と軸のなじみにより、かた当たりはこの図に示す値より小さくなるものと考えられる）

次に、軸と穴のねじりこわさの等しい場合について、かた当たりを計算した結果を第12図に示す。

以上、穴のねじりこわさが非常に大きい場合と、軸と穴のねじりこわさが等しい場合のかた当たりを比較すると、たとえば、歯数20枚、 $l/d=1$ で軸と穴のねじりこわさが等しい場合は、穴がこわい場合に比べ、約28%かた当たりは減少する。

一般に、かた当たりは軸と穴のねじりこわさを近づけることにより、穴がこわいときに比べ、約20~30%減ることがわかる。

4.2 転位によりスプライン軸の強さを高める方法

転位量を多くすることによって、スプライン強さは高められる。その理由は、

- (i) 転位量を増すことによって、軸大径と軸小径の比が小さくなる。すなわち、軸大径を同じくすると軸小径が大きくなり、ねじりによる強さを高める。
- (ii) 軸の歯元の丸み半径が大きくなり、歯元の応力集中を低める。
- (iii) 歯元の歯厚が大きくなる。

次に、JIS規格のインボリュートスプライン、歯数20枚、転位係数0.4~2.5のスプライン軸について、ねじりによる応力集中係数を計算した。

標準転位（転位係数 $x=0.8$ ）の応力集中係数と各転位係数の応力集中係数との比を求め、その結果を第13図に示す。

第13図で転位係数 $x=1.5$ のときのスプライン軸のねじり強さは、標準転位のスプライン軸に比べ約10%高められたことがわかる。

5. 結 言

以上の調査、解析を総合して得た結論は次のとおりである。

- (1) スプライン軸が受ける最も過酷な応力は、軸の歯元のねじり応力集中で、たとえば歯数20枚（角形スプラインは10枚）の場

合、JISインボリュートスプラインに比べSAEインボリュートスプラインは約30%大きく、角形スプラインは約4%大きい。インボリュートセレーションは約11%小さい。

いうまでもなく、これらの応力は、できるだけ小さい方がよい。

(2) インボリュートスプラインに要求される種々の性能を総合すると、JIS方式はSAE方式にややまさる。

そのおもな理由は次による。

(i) 強 度

穴側と軸側の種々の強さを総合して、JIS方式はSAE方式にややまさる。

(ii) ころがり軸受の使いやすさ

ころがり軸受をスプライン軸に使うとき、軸受内径とスプライン大径が近くとれる。

(iii) 生産しやすさ

(a) JIS方式のインボリュートスプラインのはめあいには、一般のJISはめあい方式と関連づけられており、管理上都合がよい。

(b) JIS方式ははめあいの種類が多く、設計上便利である。

(3) スプライン軸の外径を等しく押えたとき、スプライン軸と穴側との間に回転力だけが伝わるときのスプライン軸の破損強さは、SAE方式に比べJIS方式は約23%増す。（面圧強さの点ではJISの方が不利）

(4) 軸の強さを高めるためには、歯数は、20~30枚程度が適当である。

(5) 穴側の軸に対する「すわり」を悪くするような荷重を受けないとき、適当な軸長は次の程度でよい。

歯数20枚のとき $l/d \approx 1$

歯数30枚のとき $l/d \approx 0.75$

(6) スプラインの強さを高める方式

(i) 穴と軸の歯の組み合わせが一定でよい場合（たとえば固定はめあいなど）は、穴と軸に合いマークを打って組み合わせ、各歯の荷重分担のムラをなじみによって、できるだけ早少なくくする。

(ii) はめあいのガタを、できるだけ少なくする。

(iii) 軸側についても穴側についても、組み合わせた応力の軸方向の分布をなるべく一様にし、しかも軸側と穴側とでバランスさせる。

(iv) かた当たりを少なくする。

(v) 製作精度を高め、各歯の荷重分担効率を高める。

(vi) 転位量を標準より大きくする。

終わりに、本研究を推進するにあたりご指導くださった上司の方方、並びにスプライン強度について種々ご教示いただいた亀有工場吉武主任に深謝の意を表わす次第で。

参 考 文 献

- (1) 中沢：機械学会論文集 Vol. 25, No. 155
- (2) 吉武：機械学会誌 Vol. 64, No. 508
- (3) 佐藤：機械学会論文集 Vol. 21, No. 103
- (4) 石川：機械学会論文集 Vol. 17, No. 59
- (5) 佐久間：機械の研究 Vol. 14, No. 1
- (6) JIS D 2001, 1959
- (7) JIS B 1601, 1958
- (8) SAE, 1952, 1960
- (9) AGMA: 220.01, 1946