

変断面片持はりおよび準かさ形水車発電機励磁機軸の固有振動

Natural Frequencies of Nonuniform Cantilever Beams and
Exciter-Rotor of Semiumbrella Type Water Turbine Generator

小堀 与一*
Yoichi Kobori

大森 基次*
Motoji Ômori

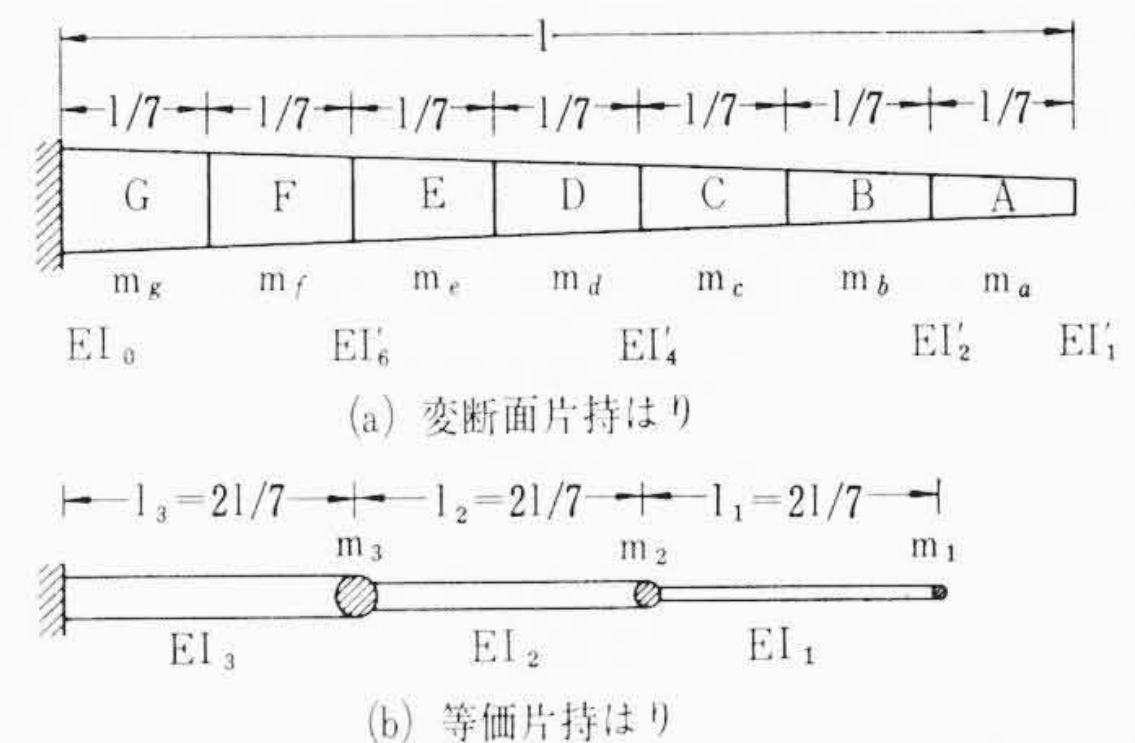
石井 久男*
Hisao Ishii

内 容 梗 概

変断面片持はりの固有振動数計算を簡便化するため、はりを3分割あるいは6分割し、階段状に断面が変化する質量のないはりに、集中質量が等間隔に分布する3質点系あるいは6質点系片持はりに近似的に置換して計算する方法を試みた。応用例として準かさ形水車発電機励磁機軸の1次固有振動数を計算し、実測値と比較した。3分割の場合、均一断面はりでは、1次、2次、3次振動数に対し、近似計算値は正しい値より、それぞれ1.3、6.5%および2.1%高く、6分割の場合はそれぞれ0.4、2.0%および3.0%高かった。円すい断面はりでは、分割区間の曲げこわさを区間で均一な段付はりの曲げこわさに等価とすることにより近似計算すると、計算値は、正しい値に比較し、1次、2次、3次振動に対しそれぞれ4.8、1.7%および3.1%高かった。準かさ形水車発電機励磁機軸の1次振動数を3質点段付はりとして計算したところ、計算値は実測値より約4%低くなることがわかった。

1. 結 言

細長いタービン翼、圧縮機翼、ニードル弁など是一種の変断面片持はりである。また準かさ形水車発電機の励磁機軸、モータのベルト車、タービン発電機のスリップリング軸およびある種の大形回転機の軸受部はその支持部に集中質量を有する一種の変断面片持はりである。片持はりは便利なため回転機械に好んで用いられるが、固有振動数が加振サイクルと一致またはその近辺にあるときは、異常に振動を拡大しやすく、同時に固定端の応力も大になり問題を起こしやすい。そこで機械設計者としては機械のどこかが片持はり状になっている場合は、固有振動数の計算に特に注意を払い、製作後振動による事故が起こらないようにする必要がある。一般にはりの固有振動数あるいは車軸の危険速度に関して正しい値を求めるには、はりまたは軸の長さを若干個々に分割し、多くの集中質量と質量のないばね(こわさ)よりなる多自由度質点系に置換し、支持部の剛性を考慮して電子計算機により計算する。しかしかにかに計算の機械化が進んだ現代といえども、設計者は振動数計算全部を電子計算機で行なわせるわけではなく、手計算では非常に困難か、特別の精度が要求される場合である。はりの太さが均一で、質量が1個か2個の場合は比較的容易に手計算できるが、そうでない場合はいかに精密な計算式や方法が与えられても、実用に供しがたいから、一般に大ざっぱな近似計算によって機械を設計しがちである。不幸にして計算と実際が異なり、はりが共振するような場合には、往々にして振動事故を起こすことがある。はりの振動数が公式で求められるような特定形の場合は問題はないが、一般に変断面のはりの固有振動数の計算を手計算で行なうには、はりの分割の数すなわち質点系の自由度の数をかなり少なく制限しないと、計算が煩雑で解を出すことが困難である。しかし分割数が少ないと精度が悪く実用にならない。とくに片持はりの場合はこの傾向がある。そこで著者らは分割の方法、こわさの選定を工夫して、比較的よい精度で解が得られるようにした。本報の方法によれば手動計算機でも実用上さしつかえない程度(正しい値の±5%の誤差)で振動数を算定することができることがわかった。



(a)図のはりを振動的に等価になるような質点—こわさ系におきかえる。
 $m_1 = m_a + m_b$, $m_2 = m_c + m_d$, $m_3 = m_e + m_f$ おき、 m_g は固定端におく。
 $EI_1 = l_1$ スパンに対する均一断面はりの曲げこわさ、 EI'_2 と EI'_4 の値により定まる。
 $EI_2 = l_2$ スパンに対する均一断面はりの曲げこわさ、 EI'_4 と EI'_6 の値により定まる。
 $EI_3 = l_3$ スパンに対する均一断面はりの曲げこわさ、 EI'_6 と EI_0 の値により定まる。

第1図 変断面片持はりの分割

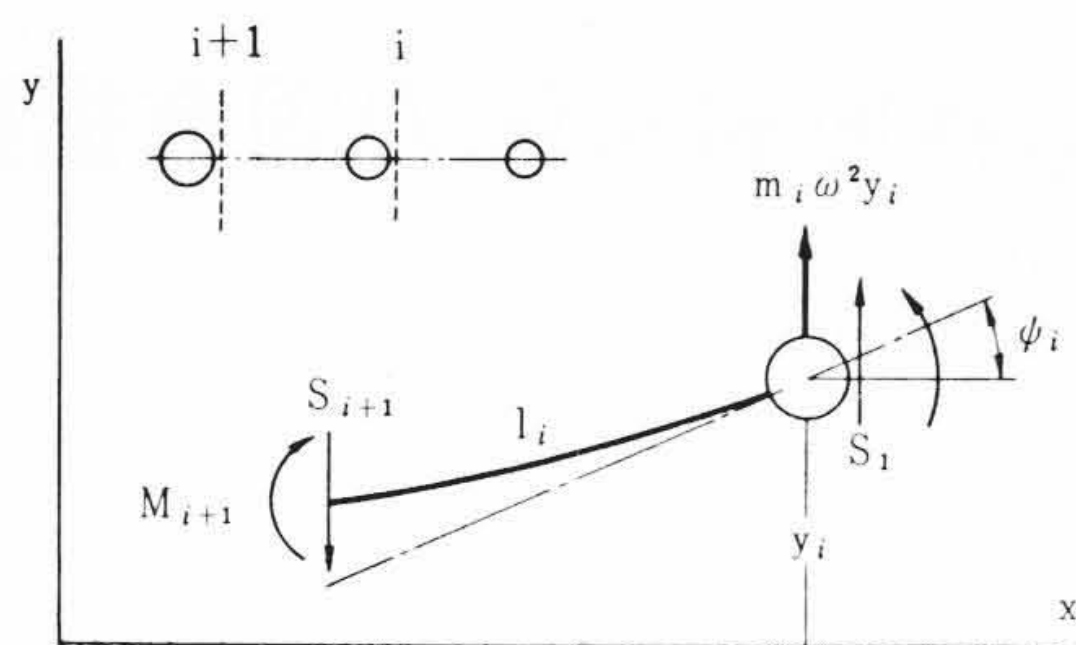
2. 計算法と計算例

2.1 計 算 法

本報の計算法は文献⁽¹⁾に示されているとおりであるが、分割の仕方、こわさの選定に若干工夫をこらした。

第1図(a)に示す全長 l なる変断面片持はりの固有振動数を計算するものとする。はりには集中質量はないので、分割した位置に自重相当の何割かを集中質量と置く。このような特別なはりについて計算した結果の精度がよければ、最初から集中質量の加わっている一般のはりにつき、同様に計算した結果のほうがいっそう精度がよいことは明らかだからである(本計算では質量の回転慣性とか、ジャイロモーメントは考えない。これらは、特別な形をしていない限り、振動数に及ぼす影響はせいぜい2、3%である)。全長をA～Gのエレメントに7等分する。はりの長さに対する断面変化が急変するようであれば等分には必ずしも適当でないが、そうでない限り等分にしたほうが計算がいくらかからくである。AおよびBの質量の和を m_1 、CおよびDの質量の和を m_2 、EおよびFの質量の和を m_3 とする。G部の質量は固定端に属していると思なし考慮に入れない。だからG部だけのはりは軽くなり、長さが1/7だけ短くなったことになる。質量を3個に分けたのは計算上の簡便さと、求むる固有振動数は普通1次振動数であり、特別の場合でも3次振動数までの3個

* 日立製作所日立研究所



図は位置番号 i および $i+1$ の間のはりの断片を示す。 α_S および α_M はそれぞれ i に単位の力および単位のモーメントが働いたためによる、 i 位置の切線を基準として測った $i+1$ 位置におけるはりの傾斜、同様にして d_S および d_M は $i+1$ 位置におけるたわみと定義する。

第 2 図 表計算に対するはりの断片(文献(1)より転載)

だからである。質量 m_1 は A と B の接合部に、 m_2 は C と D の接合部に、 m_3 は E と F の接合部にいずれも集中質量として第 1 図(b)に示すように位置しているものとする。もちろん各質量間のはりはこわさのみあり、質量は有していない。

次に第 1 図(a)ではりの曲げこわさ EI は先端部の値を EI_1' 、 m_1 位置の値を EI_2' 、 m_2 位置の値を EI_4' 、 m_3 位置の値を EI_6' とする。固定端の値を EI_0 とする。第 1 図(b)で各スパン l_1 、 l_2 および l_3 部分の曲げこわさは均一でそれぞれ EI_1 、 EI_2 および EI_3 とする。これらと $EI_1' \sim EI_6'$ との関係については後述する。かくして質量のないはり上の集中質量は第 1 図(b)に示すような質量のない 3 種の均一断面はり上の段付部に位置させることができる。

はりのたわみの式⁽¹⁾によると(第 2 図参照),

$$S_{i+1} = S_i + m_i \omega^2 y_i \quad (1-1)$$

$$M_{i+1} = M_i + S_{i+1} l_i \quad (1-2)$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - S_{i+1} \alpha_{Si} - M_i \alpha_{Mi} \quad (1-3)$$

$$y_{i+1} = y_i - \varphi_i l_i + S_{i+1} d_{Si} + M_i d_{Mi} \quad (1-4)$$

となっている。ここで S_i は i 個の質点系に置換した質量がなく曲げこわさのみあるはり上の、先端から i 番目にある質点 m_i の右側はりに生ずるせん断力、 M_i は m_i の右側はりに生ずる曲げモーメント、 l_i は m_i と m_{i+1} の間のはりの長さ、 φ_i は m_i 位置のはりに引いた切線と基準線(はりの振動時の平衡位置)とのなす角、 y_i は m_i の基準線からの変位(たわみ量)、 α_{Si} 、 α_{Mi} 、 d_{Si} および d_{Mi} などは次式で表わされる係数である。

$$\alpha_{Mi} = \frac{l_i}{EI_i} \quad (2-1)$$

$$\alpha_{Si} = \frac{l_i^2}{2EI_i} = d_{Mi} \quad (2-2)$$

$$d_{Si} = \frac{l_i^3}{6EI_i} \quad (2-3)$$

ω は任意に仮定した振動数(rad/s)で、実際の計算では求めようとする固有振動数になるべく近い値にする(だいたいの見当から定めてよい)。 $i=1$ の場合より $i=4$ にいたるまで逐次(1-1)~(1-4)式を計算していく。計算を進めると最後に φ_4 、 y_4 が

$$\varphi_4 = a + b \varphi_1 \quad (3-1)$$

$$y_4 = a' + b' \varphi_1 \quad (3-2)$$

なる φ_1 の線形関係式が得られる。 a 、 b 、 a' 、 b' は数値である。 φ_4 は固定端の傾斜を表わしているから 0 であり

$$\varphi_1 = -\frac{a}{b} \quad (4-1)$$

となる。この値を(3-2)式に入れ

$$y_4 = a' + b' \times \left(-\frac{a}{b}\right) \quad (4-2)$$

を得る。これより仮定した ω に対して、はりの根元のたわみ y_4 が

定まる。根元では y_4 は 0 でなければならないから、 ω を何回か仮定して計算を試み y_4 がちょうど 0 になるような ω を見いだす。このときの ω が固有振動数である。 ω を横軸に、 y_4 を縦軸にとり y_4 の曲線が ω 軸と変わるところを図上で求める。質点は 3 個とってあるから、 y_4 を 0 にする ω は 3 個求まり、これらは値の低い順に 1 次(基本)、2 次、3 次の固有振動数を与える。以上の説明だけでは抽象的なので、正しい固有振動数のわかった均一断面はりおよび円すい状はりについて計算してみる。

2.2 均一断面片持りの計算例

このはりの固有振動数はわざわざ本計算法によるまでもなく、周知の公式で求められるが、公式による値と本方法による値がどの程度一致するかを確かめるため計算してみる。

全長 $l=12.13$ cm, 幅 $b=1.253$ cm, 厚さ $t=0.1211$ cm, $E=2.05 \times 10^6$ kg/cm², 比重 $\gamma=7.677 \times 10^{-3}$ kg/cm³ の均一断面片持りの固有振動数を求めることにする。

$$m_i = m_1 = m_2 = m_3 = \frac{2}{7} \times \frac{l \times b \times t \times \gamma}{980} \\ = 4.120 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$$

$$l_i = l_1 = l_2 = l_3 = 3.466 \text{ cm}$$

$$EI_i = EI_1 = EI_2 = EI_3 = 3.8028 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$$

$$\alpha_{Mi} = \alpha_{M1} = \alpha_{M2} = \alpha_{M3} = 0.91143 \times 10^{-2}$$

$$\alpha_{Si} = \alpha_{S1} = \alpha_{S2} = \alpha_{S3} = 1.5795 \times 10^{-2}$$

$$d_{Si} = d_{S1} = d_{S2} = d_{S3} = 1.8248 \times 10^{-2}$$

まず、1 次振動数を $\omega_1=427$ rad/s と仮定して計算すると、第 1 表のような結果が得られる。

$\omega_1=427$ rad/s では $y_4=0.030106$ で 0 にならず、符号は正であるから 427 rad/s は求める値より小さ過ぎたことになる。そこで今度は $\omega_1=438.4$ rad/s とし計算してみると第 2 表のような結果が得られる。第 1、2 表の y_4 の値より y_4 を 0 にする値として

$$\omega_{01}=432.9 \text{ rad/s}$$

を得る。

次に 2 次振動数は均一断面はりでは 1 次の 6.267 倍であるから、 $\omega_2=2,713$ rad/s になる。そこで $\omega_2=2,800.0$ rad/s と仮定して計算してみる。第 3 表より $y_4=-0.09875$ となり、負であるから仮定した ω_2 は小さ過ぎたことになる。そこで $\omega_2=2,854.0$ rad/s としてみると第 4 表のようになり、 $y_4=0.004963$ で正となり、 y_4 を 0 にする ω_2 として

$$\omega_{02}=2,851 \text{ rad/s}$$

を得る。

次に 3 次振動数は 1 次の 17.55 倍であるから $\omega_3=432.9 \times 17.55=$

第 1 表 一次振動数計算結果(仮定振動数 $\omega_1=427$ rad/s)

i	S		M		φ	y		
1	0	0	0	0	0	φ_1	1	0
2	0.75119	0	2.6036	0	-0.0118652	1.000	1.01371	-3.4660
3	1.51269	-2.6036	7.8466	-9.0242	-0.059488	1.04112	1.1235	-6.9795
4	2.3567	-7.8466	16.015	-36.220	-0.16823	1.2473	1.4967	-10.8740
$\varphi_4 = -0.16823 + 1.2473 \varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0.13487$								
$y_4 = 1.4967 - 10.8740 \times 0.13487 = 0.030106$								

第 2 表 一次振動数計算結果(仮定振動数 $\omega_1=438.4$ rad/s)

i	S		M		φ	y		
1	0	0	0	0	0	φ_1	1	0
2	0.79184	0	2.7445	0	-0.012507	1.000	1.01445	-3.4660
3	1.59513	-2.7445	8.2732	-9.5125	-0.062717	1.04335	1.13026	-6.9820
4	2.49011	-8.2732	16.904	-38.1785	-0.17745	1.2607	1.52375	-10.8996
$\varphi_4 = -0.17745 + 1.2607 \varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0.140755$								
$y_4 = 1.52375 - 10.8996 \times 0.140755 = -0.10423$								

第3表 二次振動数計算結果 (假定振動数 $\omega_2=2,800$ rad/s)

i	S		M		φ		y	
1	0	0	0	0	0	φ_1	1.000	0
2	32.3008	0	111.955	0	-0.510196	1.000	1.58945	-3.466
3	83.6412	-111.955	401.855	-388.035	-2.85171	2.76834	6.65246	-8.97450
4	298.521	-401.855	1,436.53	-1,780.86	-11.2292	12.6524	28.3315	-32.0325

$\varphi_4 = -11.2292 + 12.6524 \varphi_1$, $\varphi_1 = 0.887544$
 $y_4 = 28.3315 - 32.0325 \times 0.887545 = -0.09875$

第4表 二次振動数計算結果 (假定振動数 $\omega_2=2,854$ rad/s)

i	S		M		φ		y	
1	0	0	0	0	0	φ_1	1.000	0
2	33.5587	0	116.314	0	-0.530065	1.000	1.6124	-3.4660
3	87.6688	-116.314	420.174	-403.146	-2.97493	2.8372	6.8865	-9.05458
4	318.776	-420.174	1,525.05	-1,859.47	-11.8397	13.1483	29.6517	-32.9237

$\varphi_4 = -11.8397 + 13.1483 \varphi_1$, $\varphi_1 = 0.90047$
 $y_4 = 29.6517 - 32.9237 \times 0.90047 = 0.004963$

第5表 三次振動数計算結果 (假定振動数 $\omega_3=7,500.0$ rad/s)

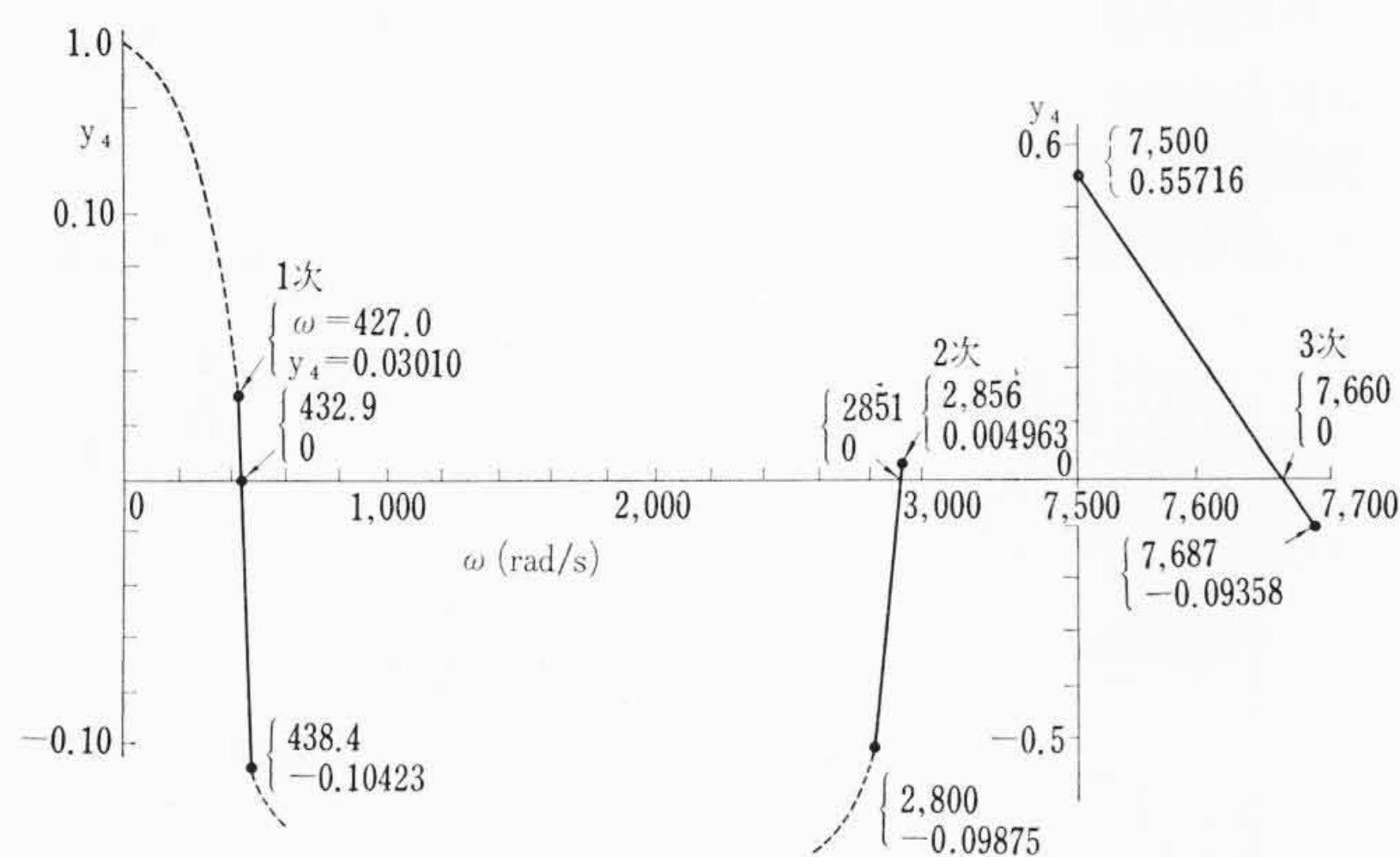
i	S		M		φ		y	
1	0	0	0	0	0	φ_1	1.000	0
2	231.75	0	803.261	0	-3.6605	1.000	5.22913	-3.466
3	1,443.60	-803.246	5,806.76	-2,784.05	-33.7834	13.6874	56.9476	-21.5902
4	14,641.20	-5,806.76	56,553.20	-22,910.3	-317.968	130.781	532.942	-218.971

$\varphi_4 = -317.968 + 130.781 \varphi_1$, $\varphi_1 = 2.43130$
 $y_4 = 532.942 - 218.971 \times 2.4313 = 0.55716$

第6表 三次振動数計算結果 (假定振動数 $\omega_3=7,687.0$ rad/s)

i	S		M		φ		y	
1	0	0	0	0	0	φ_1	1.000	0
2	243.451	0	843.800	0	-3.84534	1.000	5.44265	-3.466
3	1,568.47	-843.800	6,280.11	-2,924.61	-36.3102	14.3279	60.7209	-22.3302
4	16,351.0	-6,280.11	62,952.7	-24,691.5	-351.816	140.179	584.151	-232.789

$\varphi_4 = -351.816 + 140.179 \varphi_1$, $\varphi_1 = 2.50976$
 $y_4 = 584.151 - 232.789 \times 2.50976 = -0.09358$

第3図 振動数計算結果
(均一断面片持第1～6表までの1～3次計算結果を図示したもの)

7,597 rad/sとなる。そこで7,500 rad/sを假定して y_4 を求めると第5表の結果が得られる。第5表より y_4 は正で、 ω_3 は小さ過ぎたから ω_3 として7,687 rad/sを用いて計算すると、第6表のようになり y_4 は負になる。かくして y_4 を0にする ω_3 として

$$\omega_3 = 7,660 \text{ rad/s}$$

を得る。以上の計算結果を図示すると第3図のようになる。

以上の計算で固有振動数 ω_{01} , ω_{02} , ω_{03} が得られたが、これらの値は近似値であるから、若干の誤差はまぬがれない。正しい値は周知の公式

$$\left. \begin{aligned} \omega_{01} &= \frac{(1.875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \\ \omega_{02} &= \frac{(4.694)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \\ \omega_{03} &= \frac{(7.855)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

により求められる。(5)式に

$$EI = 3.8028 \times 10^2 \text{ kg} \times \text{cm}^2$$

$$\gamma A = 7.677 \times 1.253 \times 0.1211 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}$$

$$l = 12.13 \text{ cm}$$

を入れて計算すると

$$\omega_{01} = 427.3, \quad \omega_{02} = 2,677, \quad \omega_{03} = 7,498 \text{ rad/s}$$

を得る。したがって上記の近似計算値は正しい値より

1次は

$$\frac{432.9 - 427.3}{427.3} = 1.31(\%)$$

2次は

$$\frac{2,851 - 2,677}{2,677} = 6.50(\%)$$

3次は

$$\frac{7,660 - 7,498}{7,498} = 2.16(\%)$$

いずれも大きかったことになる。

2.3 円すい形断面片持はりの計算例

円すい形断面の場合も、周知の公式で正しい値が求められるが、本報の計算法による近似計算値とどの程度の差があるかを調べてみる。以下円すい形断面片持はりを円すい棒、固有振動数を単に振動数と略称する。

計算を進めるに当たり、変断面はりを第1図(b)に示すような段付はりに等価的に置換しなくてはならない。

質量 m_1 , m_2 , m_3 は前の場合と同様、全長を7等分して、

$$m_1 = m_a + m_b, \quad m_2 = m_c + m_d, \quad m_3 = m_e + m_f, \quad \text{各質量間の}$$

スパンは $2l/7$ として定まる。質量と位置は容易に定まるが、質量間の曲げこわさは定まらない。質量間の中央位置のこわさをとれば過小に、質量の左側および固定端の左側位置のこわさをとれば過大な値を与えることは明らかである。1次振動に対しては適正な曲げこわさとして、頭のきれた円すい棒の自由端に集中荷重が加わった場合のたわみと、この棒と長さが等しい均一断面はりの自由端に同じ集中荷重が加わった場合の自由端のたわみが等しくなるように定めたときの均一断面はりの曲げこわさを以て等価な均一断面はりの曲げこわさとする。すなわち、たとえば根元直径 d_0 、自由端直径 d_1 の頭のきれた円すい形断面はりでは直径 d_e なる長さの等しい均一断面はりと曲げこわさが等価であるとし、等価直径 d_e は d_0 に係数 α_d を乗じ

$$d_e = \alpha_d \times d_0 \dots\dots\dots (6-1)$$

により求められるとし、曲げこわさは $El_e = \frac{E \times \pi d_e^4}{64}$ で与えられるとする。 α_d は無次元係数で d_1/d_0 によって異なり、 $d_1 = d_0$ の場合は当然1であり、 $d_1 < d_0$ の場合は1より小になる。いろいろな d_1/d_0 の値について α_d を定めた結果を第4図に示す。また第4図に断面が頭のきれた幅一定のくさび状はりの場合の係数 α_h 、厚さが一定で幅が直線状に先細になった台形はりの係数 α_b も示す。くさび状はりの等価厚さ h_e は根元厚さを h_0 とすれば

$$h_e = \alpha_h \times h_0 \dots\dots\dots (6-2)$$

台形はりの等価幅 b_e は根元の厚さを b_0 とすれば

$$b_e = \alpha_b \times b_0 \dots\dots\dots (6-3)$$

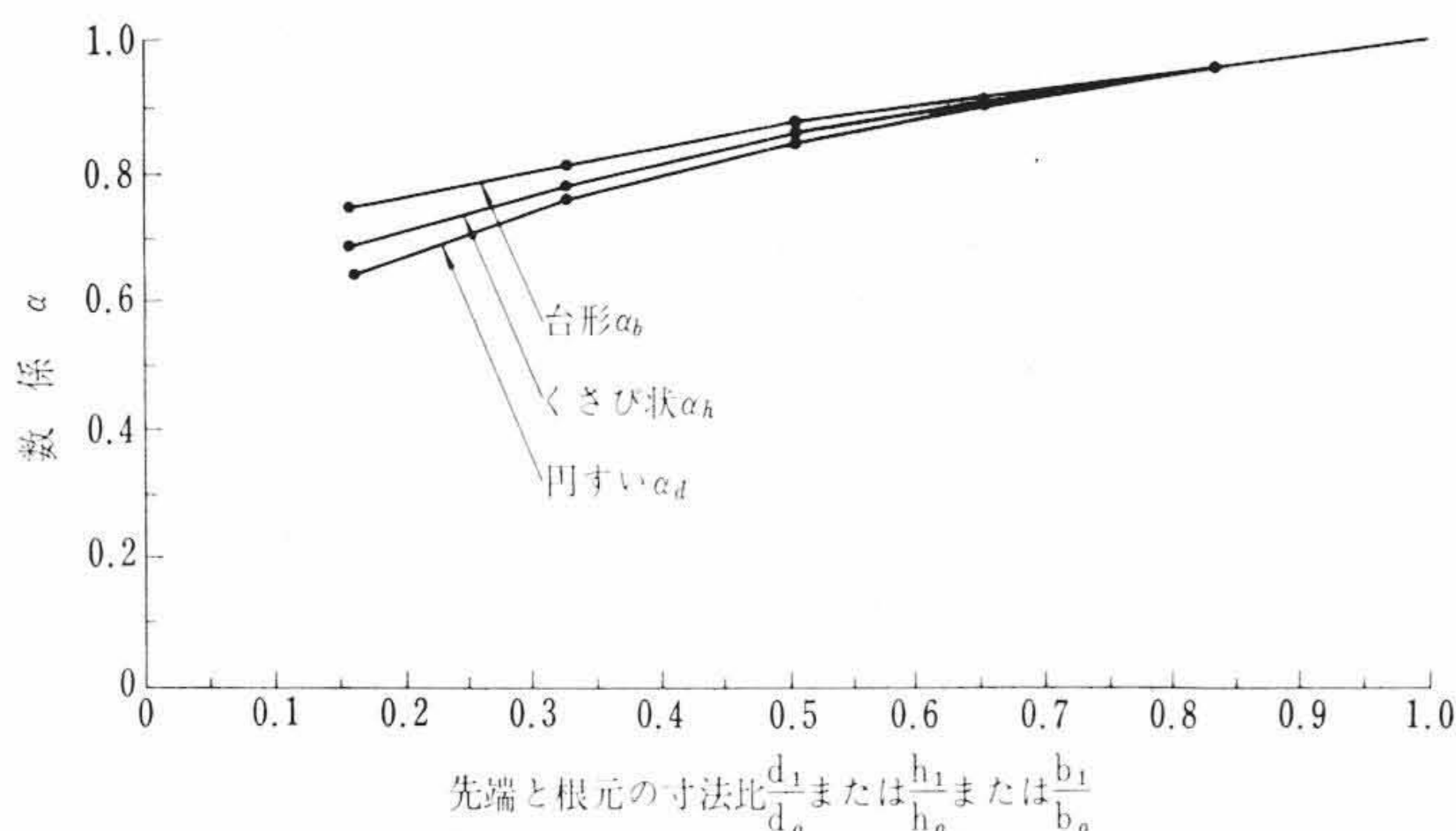
により求められるから、等価曲げこわさ I_e は容易に定めることが

第 7 表 円すい棒のエレメントの質量，曲げこわさの計算（3 質点，一次振動，記号は第 5 図参照）

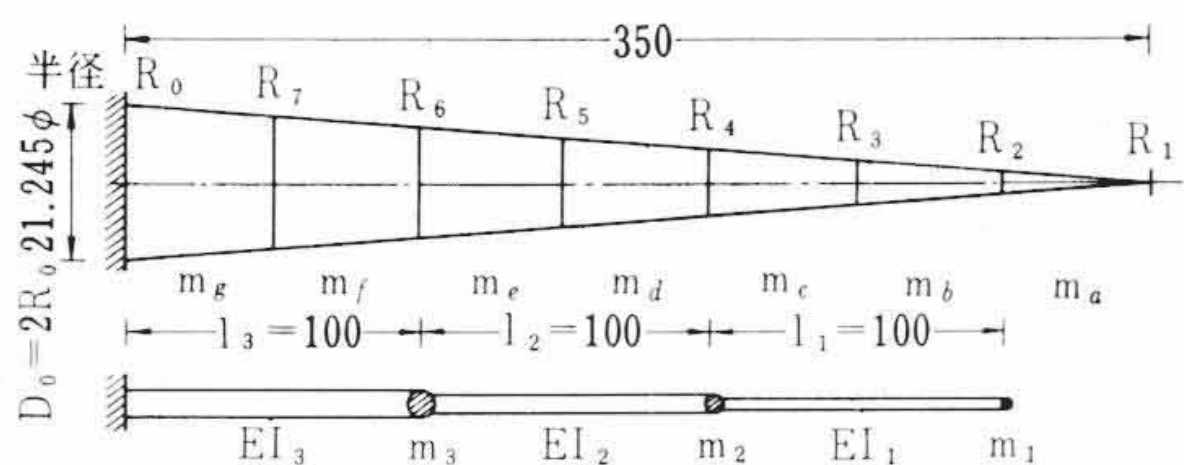
エレメント	質 量 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^2$)	スパン (cm)	直 径 比	等 価 直 径 (cm)	等価均一曲げこわさ ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$)
1	$m_1 = \frac{1}{3} \pi R_3^2 \times \frac{2l_1}{7g} = 7.72663 \times 10^{-6}$	$l_1 = 10$	$\frac{D_2}{D_4} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{1}{3}$	$D_{e1} = D_1 \alpha_1 = 0.910486 \times 0.7599 = 0.691878$	$EI_1 = \frac{E \pi D_{e1}^4}{64} = 0.02305 \times 10^6$
2	$m_2 = \frac{1}{3} \pi (R_5^2 + R_5 R_3 + R_3^2) \times \frac{2l_2}{7g} = 54.0865 \times 10^{-6}$	$l_2 = 10$	$\frac{D_4}{D_6} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$	$D_{e2} = D_6 \alpha_2 = 1.51747 \times 0.8800 = 1.33537$	$EI_2 = \frac{E \pi D_{e2}^4}{64} = 0.309362 \times 10^6$
3	$m_3 = \frac{1}{3} \pi (R_7^2 + R_5 R_7 + R_5^2) \times \frac{2l_3}{7g} = 146.806 \times 10^{-6}$	$l_3 = 10$	$\frac{D_6}{D_0} = \frac{R_6}{R_0} = \frac{5}{7}$	$D_{e3} = D_0 \alpha_3 = 2.1245 \times 0.9190 = 1.95241$	$EI_3 = \frac{E \pi D_{e3}^4}{64} = 1.40218 \times 10^6$

備考： $R_3 = R_0 \times \frac{2}{7}$, $R_5 = R_0 \times \frac{4}{7}$, $R_7 = R_0 \times \frac{6}{7}$, $R_0 = \frac{1}{2} \times 2.1245 \text{ cm}$, $l = 35 \text{ cm}$, $\gamma = 7.85 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{cm}^{-3}$, $g = 980 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$, $E = 2.05 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ 正しい 1 次振動数は $\omega_{c1} = 1,912 \text{ rad/s}$ である。すなわち

$$\omega_{c1} = \frac{4.359 R_0}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = \frac{4.359 \times 1.06225}{(35)^2} \sqrt{\frac{2.05 \times 0.98}{7.85}} \times 10^6 = 1,912 \text{ rad/r}$$



第 4 図 変断面片持はりに等価な均一はりの直径，厚さ，幅を求めるための係数



第 5 図 円すい棒と等価段付はり

できる。これより円すい，くさび，台形などの断面のはりの 1 次振動数に関しては，前述均一断面の場合と全く同様にして求めることができる。

根元直径 2.1245 cm，全長 35.0 cm，比重量 $7.85 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ， $E = 2.05 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ の円すい棒について 1 次振動数を計算してみよう。

円すい棒を 7 等分し，3 質点系段付はりに等価置換した状況を第 5 図に示す。第 5 図を参照して表計算を行なうに必要な質量 m_1 ， m_2 ， m_3 およびこわさ EI_1 ， EI_2 ， EI_3 を求める経過を第 7 表に示す。

第 7 表の m_1 ， m_2 ， m_3 および EI_1 ， EI_2 ， EI_3 を用い，仮定振動数として 1,900.0 および 1,850.0 rad/s をとった場合，1 次振動数として $\omega_{c1} = 1,828 \text{ rad/s}$ を得る。正しい値は 1,912 rad/s であるから 4.8% 小さかったことになる。この理由は質量の中心を各分割部の重心とせず，重心より先端寄りにしたからである。スパン l_1 ， l_2 ， l_3 を各分割エレメントの重心間の距離とすると，精度がよくなると思われるが，そうすると，重心位置間の距離計算が煩雑になる欠点がある。

2.4 2 次，3 次振動数の計算例

第 7 表で定めた等価曲げこわさは 2 次，3 次振動の計算には用いられない。その理由は 1 次と 2 次，3 次とでは曲げモーメントの作用する状況が全然異なるからである。しからば 2 次，3 次に対して

はどのような等価均一曲げこわさを設定したらよいか，著者の経験では次のようにすると，正しい値と比較的よく一致することがわかった。 l_3 に対しては根元より全長の 1/14 の位置における曲げこわさをもって等価均一曲げこわさ EI_{3e} とする（これは区分間のモーメント面積の重心のたいたいの位置になる）。 l_2 に対しては根元より全長の 6/14 の位置の曲げこわさをもって EI_{2e} とする。 l_1 に対しては根元より全長の 11/14 の位置の曲げこわさをもって EI_{1e} とする。

このように曲げこわさを選定すれば，2 次および 3 次振動数としてそれぞれ

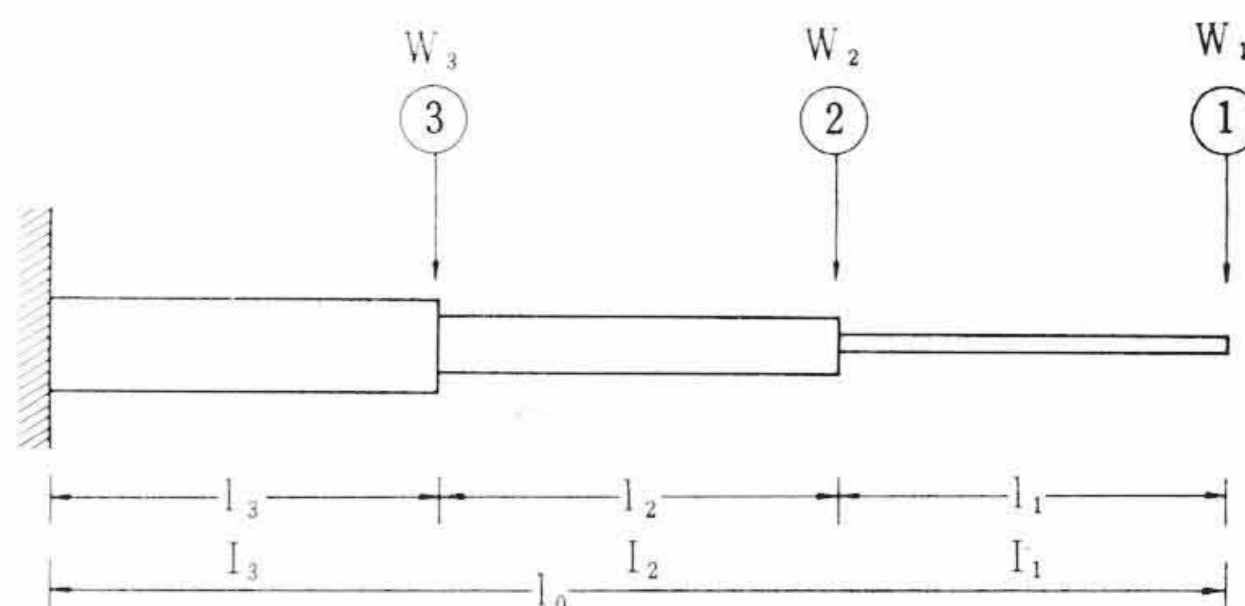
$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= 4,699 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 8,700 \text{ rad/s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

という値が定まる。正しい値は $\omega_{c2} = 4,637.6 \text{ rad/s}$ および $\omega_{c3} = 8,433.0 \text{ rad/s}$ であるから前記近似計算値はそれぞれ 1.7% および 3.1% 大であり，ほぼ一致していることになる。

2.5 荷重点の静たわみの影響係数が与えられた場合の段付はりの振動数計算

第 6 図のような質量のない，こわさのみある段付片持はりが与えられていると考え， m_1 ， m_2 および m_3 位置に垂直荷重 $W_1 = m_1 g$ ， $W_2 = m_2 g$ および $W_3 = m_3 g$ が加わっているとする。この場合は荷重点の影響係数がわかっていれば，三つの固有振動数の近似値を 3 次方程式の根として求めることができる。荷重点①，②および③の影響係数をそれぞれ a_{11} ， a_{12} ， a_{13} ； a_{21} ， a_{22} ， a_{23} および a_{31} ， a_{32} ， a_{33} とすればこれらは面積モーメント法による計算より，次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E} \left[\frac{l_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{1}{3} (l_1 + l_2)^3 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) + \frac{l_0^3}{3 I_3} \right] \\ a_{12} &= a_{21} = \frac{1}{E} \left[\frac{l_2^2 (2l_2 + 3l_1)}{6} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) + \frac{(l_2 + l_3)^2 (2l_0 + l_1)}{6 I_3} \right] \\ a_{13} &= a_{31} = \frac{1}{E} \left[\frac{l_3^2 (3l_0 - l_3)}{6 I_3} \right] \\ a_{22} &= \frac{1}{E} \left[\frac{l_2^3}{3} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) + \frac{(l_2 + l_3)^3}{3 I_3} \right] \end{aligned} \right\}$$



第 6 図 三つの荷重を有する段付はり

$$\left. \begin{aligned} a_{23} &= a_{32} = \frac{1}{E} \left[\frac{l_3^2 (3l_2 + 2l_3)}{6I_3} \right] \\ a_{33} &= \frac{l_3^3}{3EI_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$l_0 = l_1 + l_2 + l_3$$

2.5.1 均一断面はりの計算例

(8)式で断面が均一で荷重位置が等間隔の場合は $l_1 = l_2 = l_3 = l_0/3$, $I_1 = I_2 = I_3 = I_0$ として

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{l_0^3}{3EI_0} \\ a_{12} &= a_{21} = \frac{14l_0^3}{81EI_0} = \frac{14}{27}a_{11} \\ a_{13} &= a_{31} = \frac{4l_0^3}{81EI_0} = \frac{4}{27}a_{11} \\ a_{22} &= \frac{8l_0^3}{81EI_0} = \frac{8}{27}a_{11} \\ a_{23} &= a_{32} = \frac{5l_0^2}{162EI_0} = \frac{5}{54}a_{11} \\ a_{33} &= \frac{l_0^3}{81EI_0} = \frac{1}{27}a_{11} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。荷重点の影響係数と質量が与えられれば、振動数は次の行列式を解いて求めることができる⁽²⁾。

$$\begin{vmatrix} \left(a_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{12}m_2) & (a_{13}m_3) \\ (a_{21}m_1) & \left(a_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{23}m_3) \\ (a_{31}m_1) & (a_{32}m_2) & \left(a_{33}m_3 - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

(10)式により、2.2で計算したと同じ均一断面はりについて固有振動数を求めてみる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{27l_1^3}{3EI_0} = \frac{27 \times (3.466)^2}{3} \times 0.0091143 = 0.985427 \\ \left(\frac{l}{EI_0} = \alpha_{M1} = 0.0091143\right) \\ m_1 &= m_2 = m_3 = 4.120 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} a_{11}m_1 &= 4.05996 \times 10^{-6}, & a_{12}m_2 &= 2.10516 \times 10^{-6} \\ a_{13}m_3 &= 0.601475 \times 10^{-6}, & a_{21}m_1 &= 2.10516 \times 10^{-6} \\ a_{22}m_2 &= 1.20295 \times 10^{-6}, & a_{23}m_3 &= 0.375922 \times 10^{-6} \\ a_{31}m_1 &= 0.601475 \times 10^{-6}, & a_{32}m_2 &= 0.375922 \times 10^{-6} \\ a_{33}m_3 &= 0.150369 \times 10^{-6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$a_{11}m_1 = a, \quad a_{22}m_2 = b, \quad a_{33}m_3 = c$$

$$a_{12}m_2 = \alpha, \quad a_{13}m_3 = \beta, \quad a_{23}m_3 = \gamma, \quad \frac{1}{\omega} = x$$

とおくと、(10)式の行列式は

$$\begin{aligned} x^6 - (a+b+c)x^4 + (ab+ac+bc - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)x^2 \\ + b\beta^2 + a\gamma^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma = 0 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

なる x^2 についての3次方程式になる。(11)式の値を(12)式に入れると、振動数方程式は

$$\omega^6 - 67.0341 \times 10^6 \omega^4 + 490.23 \times 10^{12} \omega^2 - 90.5223 \times 10^{18} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

これを解くと三つの正の実根として

$$\omega_1 = 435.55 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 2,851.3 \text{ rad/r}$$

$$\omega_3 = 7,662.5 \text{ rad/s}$$

が定まる。これらの値は表計算による値(第3図参照)。

$$\omega_{01} = 432.9, \quad \omega_{02} = 2,851.0, \quad \omega_{03} = 7,660.0$$

とほとんど一致していることがわかる。このような結果が得られたのは均一断面はりでは振動時のたわみの形と静止時のたわみの形がほとんど同じため、不均一断面では一般にこのような一致は得られない。次に円すい棒1次振動数について同様の計算を試みる。

2.5.2 円すい棒1次振動数の計算例

影響係数は第7表と(8)式より、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= 20.8638 \times 10^{-3} \\ a_{12} &= a_{21} = 5.33081 \times 10^{-3} \\ a_{13} &= a_{31} = 0.911877 \times 10^{-3} \\ a_{22} &= 2.67328 \times 10^{-3} \\ a_{23} &= 0.626918 \times 10^{-3} \\ a_{33} &= 0.227970 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

これらの値と第7表の質量より、行列式は

$$\begin{vmatrix} \left(161.207 \times 10^{-9} - \frac{1}{\omega^2}\right) & (288.325 \times 10^{-9}) & (133.869 \times 10^{-9}) \\ (41.1892 \times 10^{-9}) & \left(144.588 \times 10^{-9} - \frac{1}{\omega^2}\right) & (92.0353 \times 10^{-9}) \\ (7.04574 \times 10^{-9}) & (3.39078 \times 10^{-9}) & \left(33.4674 \times 10^{-9} - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} 0.0004016025 \times 10^{-18} \omega^6 - 0.02041165 \times 10^{-12} \omega^4 \\ + 0.3392625 \times 10^{-6} \omega^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

この3次方程式の最小根に対する ω として $\omega = 1,928.5$ を得る。この値は正しい値 1,912 より 0.86% 大きいだけである。

3. 検 討

3.1 計算結果の検討

2.1で変断面片持はりという分布質量系の振動数を計算するにあたり、簡単のため(1-1)～(1-4)式に表わされるような質点——こわさ系(等価振動系)のせん断、モーメント、傾斜およびたわみの関係式に基づいた表計算方式を用い、3質点系として計算した。分布質量系をいくつかの等価質点系に等価に置換するのであるから、質点の数が十分多ければ(たとえば3個でなく、9個とか10個)、この等価質点系の振動数をもって分布質量系の振動数としてよいのであるが、分割の数が少なければ、無理な等価振動系を仮定したことになり、特別な分割の場合以外は一般に両振動数は一致しない。はたして本計算で均一断面片持はりの振動数計算で系を3質点系に置換したところ、近似値は正しい値に比べ、

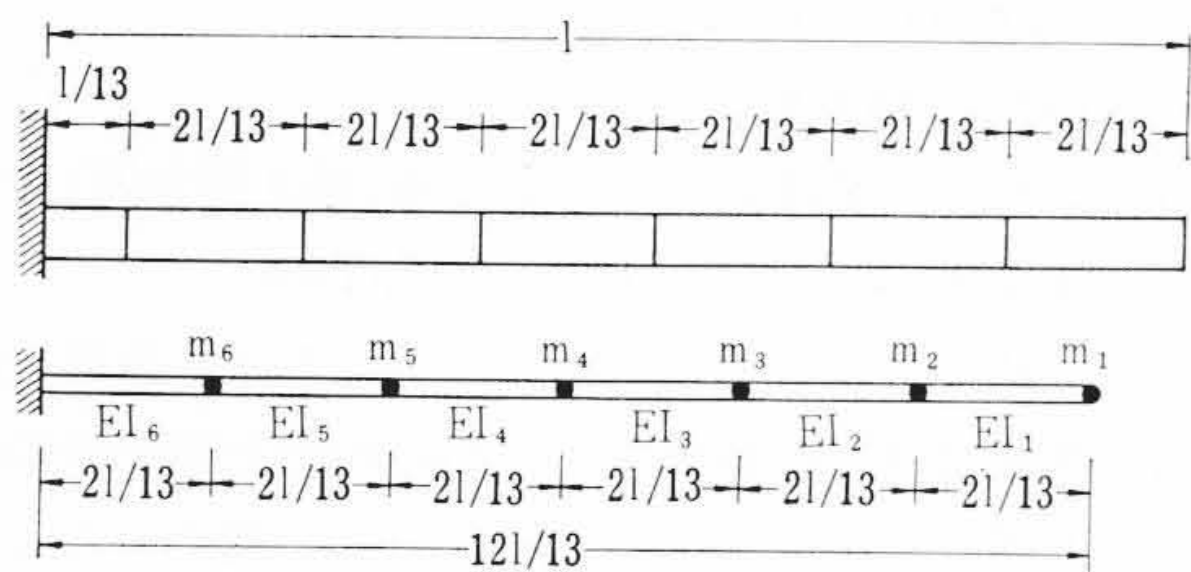
1次は1.3%、2次は6.5%、3次は2.1%

いずれも大なる値になってしまった。分割数を多くすればこの誤差は小さくなるはずであるが、計算は分割数の増加に応じて煩雑になる(もちろん電子計算機によればこの煩雑さは解消する)。

それでは実用上分割数をどれだけにしたらいかがはわからない。実用ということを誤差5%以下ということにして、試みに分割数を倍にして、第7図のような6質点系に分割して、この系の振動数をこれまでと同様の表計算方式で計算し正しい値と比較してみよう。

1次振動について計算した結果を第8表の1および2に示す。

第9表の1および2の y_7 の値より求める振動数として 429.6 rad/s を得る。この値は(5)式による正しい値 427.3 rad/s より 0.53% 高いがよく一致しているといえる。次に2次および3次振動数につ



第 7 図 6 質点系に置換した均一断面片持はり

第 8 表 1 次振動計算結果 (6 質点, 均一断面, 假定振動数, $\omega_1=400$ rad/s)

i	S		M		φ		y	
1	0	0	0	0	0	φ_1	1	0
2	0.354912	0	0.662301	0	-0.001625	1.0000	1.00101	-1.8661
3	0.710182	-0.662301	1.987571	-1.23592	-0.0081266	1.00303	1.00907	-3.73409
4	1.068322	-1.987571	3.98116	-4.94492	-0.0227713	1.01819	1.03638	-5.61716
5	1.43614	-3.98117	6.66115	-12.3742	-0.0488830	1.06069	1.10119	-7.55120
6	1.82697	-6.66118	10.07046	-24.8046	-0.0899349	1.15191	1.22811	-9.60618
7	2.262842	-10.07053			-0.149713	1.31974	1.448496	-11.89802

$$\varphi_7 = -0.149713 + 1.31974 \varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0.113404$$

$$y_7 = 1.448496 - 11.89802 \times 0.113404 = 0.09878$$

第 9 表 1 次振動数計算結果 (6 質点, 均一断面, 假定振動数 $\omega_1=427$ rad/s)

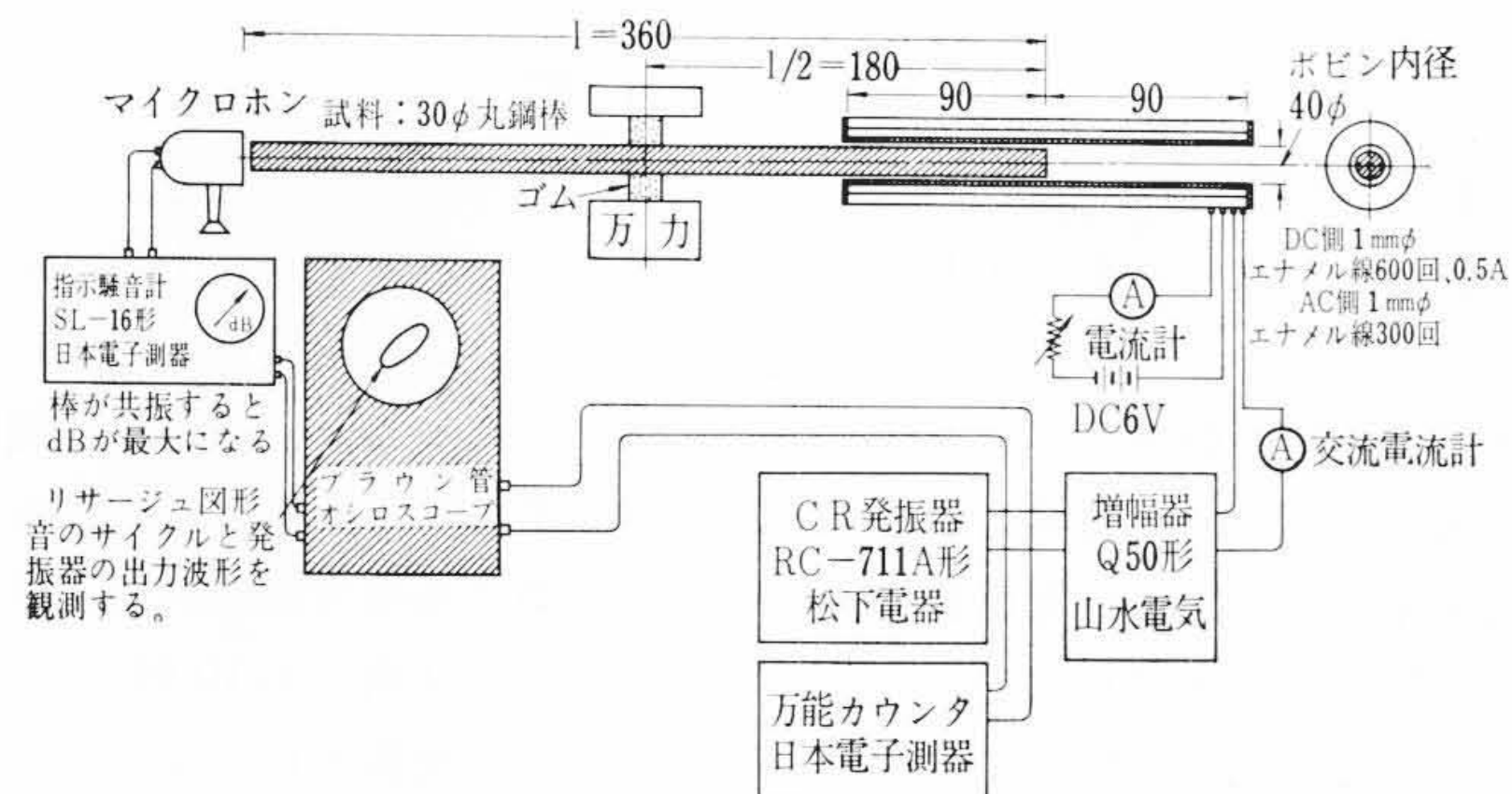
i	S		M		φ		y	
1	0	0	0	0	0	φ_1	1	0
2	0.404442	0	0.754730	0	-0.00185179	1.0000	1.00115	-1.86610
3	0.809350	-0.754730	2.26506	-1.40840	-0.00926111	1.00346	1.01037	-3.73435
4	1.21799	-2.26506	4.53794	-5.63523	-0.0259529	1.02074	1.04149	-5.61980
5	1.63921	-4.53794	7.59687	-14.1035	-0.0557267	1.06917	1.11537	-7.56332
6	2.09031	-7.59687	11.4976	-28.2800	-0.102577	1.17316	1.26009	-9.64471
7	2.59994	-11.4976	16.3493	-49.7356	-0.170901	1.36458	1.51156	-11.9962

$$\tau_7 = -0.170901 + 1.36458 \varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0.125240$$

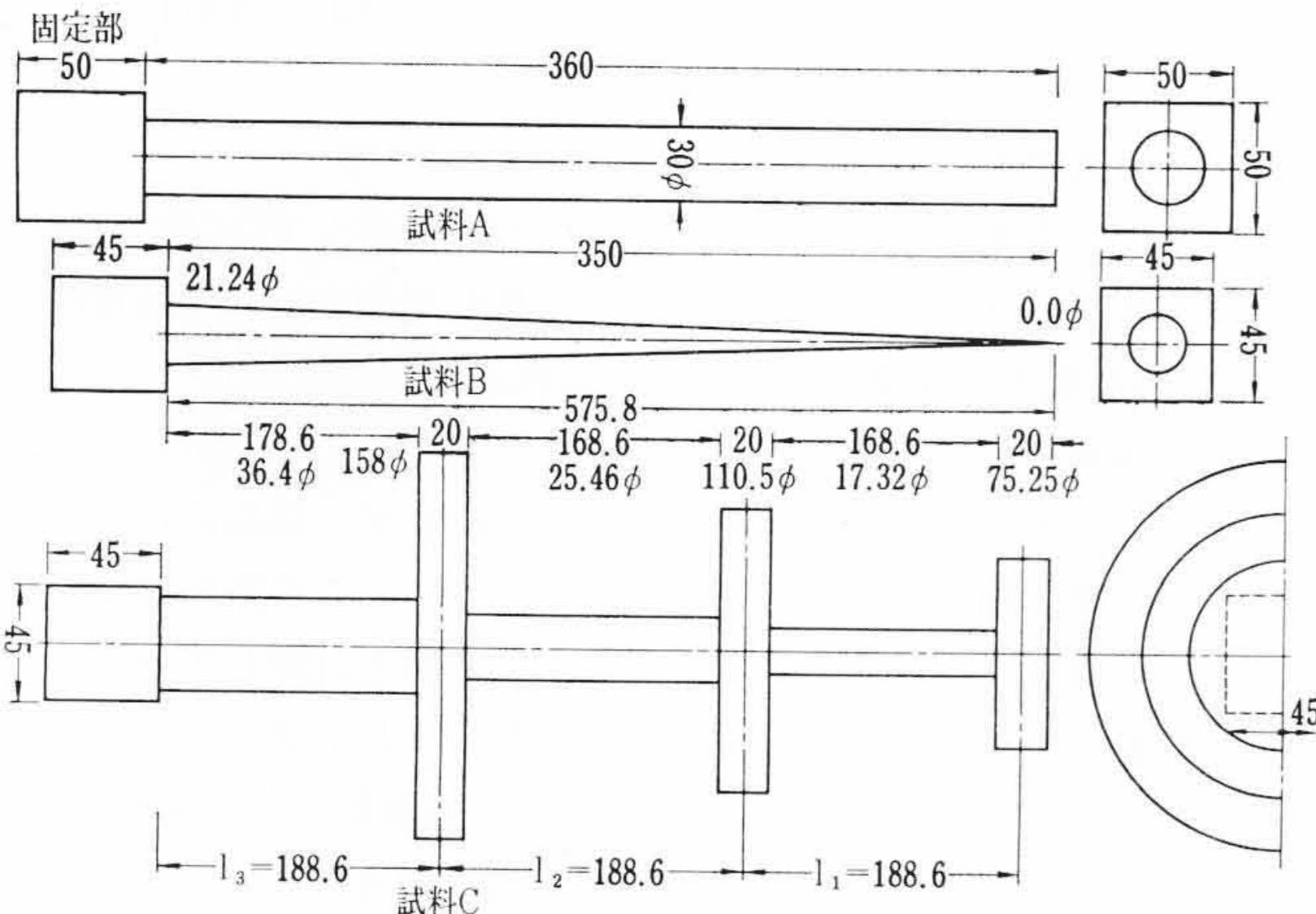
$$y_7 = 1.51156 - 11.9962 \times 0.12524 = 0.0092476$$

$$\text{備考: } m_1 = m_2 = \dots = m_6 = 2.2182 \times 10^{-6}, l_1 = l_2 = \dots = l_6 = 1.8661$$

$$EI_1 = EI_2 = \dots = EI_6 = 3.8028 \times 10^2$$



第 8 図 均一断面丸鋼棒の縦振動によるヤング率測定装置



第 9 図 試料 A, B, C

いて同様に計算した結果は正しい値 2,677 および 7,498 rad/s よりそれぞれ 1.9% および 2.9% 大である。

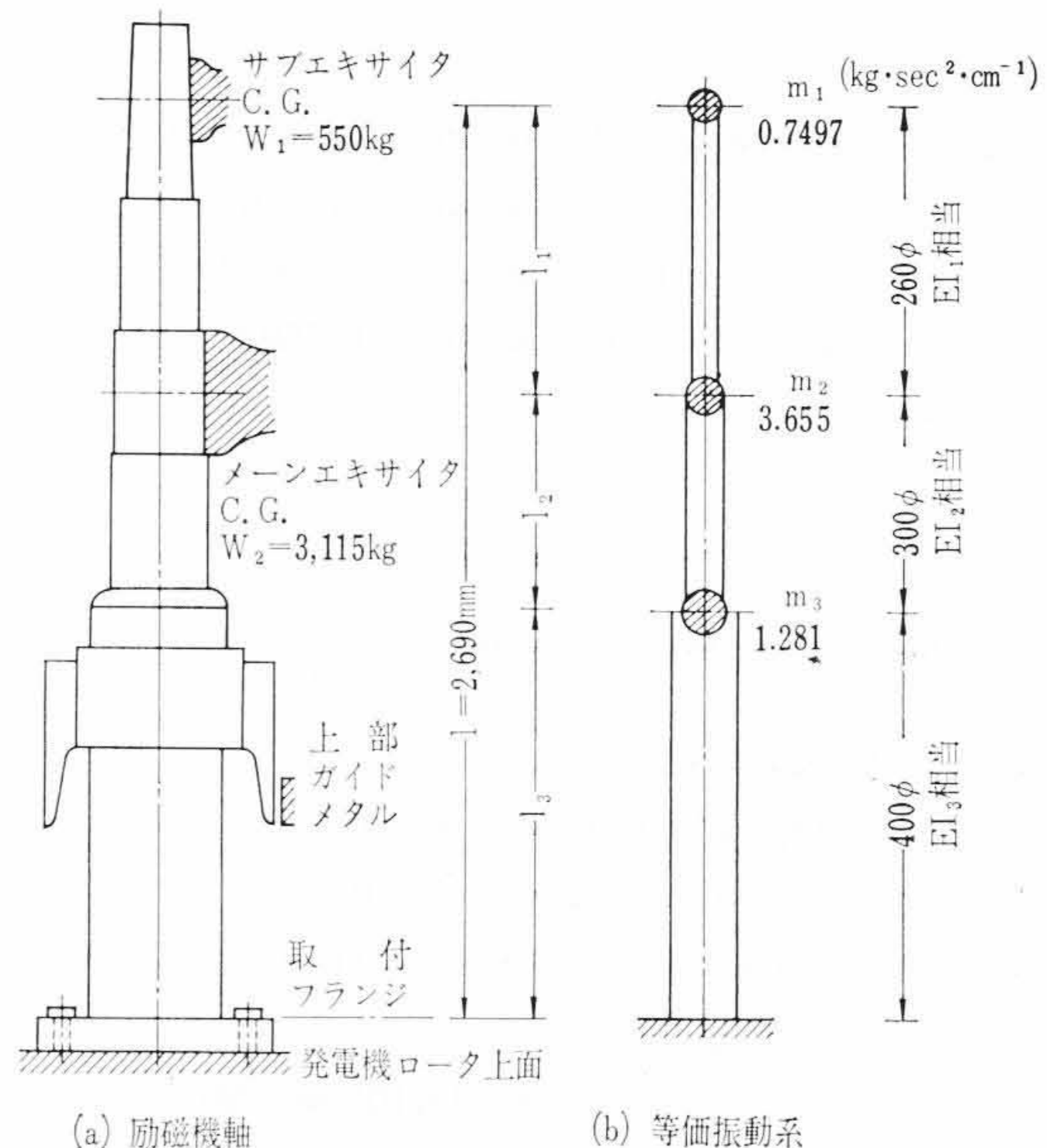
以上は均一断面はりの場合であるが、円すい棒の場合はどうか、前と同様 6 質点系に分割して計算すると 1 次振動数は正しい値より約 0.78% 小さい。この場合各質点間の曲げこわさとして等価均一曲げこわさを採用したから精度がよいが、もし質点間の中央の曲げこわさを採用すると振動数は 1,831 rad/s となり正しい値より 6.3% も低くなってしまふ。次に 2 次および 3 次振動数はそれぞれ 3,726 rad/s および 6,394 rad/s となり正しい値よりいずれも 21.4,

25.9% 低い。ただし等価曲げこわさは 2 次, 3 次振動の計算では各質点間の中央の値を採用してある。どうしてこのように大きな差が出るのかわからない。

3.2 実験と計算の比較

3.2.1 ヤング率と固定部分について

変断面片持りの振動数について、表計算による値と実験値がどの程度の差になるかを調べるため、第 8 図に示す直径 30 ϕ , 長さ 360 mm の均一断面丸鋼棒、第 9 図の A, B, C ならびに第 10 図のような軸間に集中荷重を有する試料 (発電機励磁機軸) について固有振動数を測定してみた。第 8 図の試料は材料のヤング率を決定するためのものである。まずこれについて、中央をゴムを介し万力で固定し、1 端を交流電磁石で加振し、共振して生ずる音のサイクル f を他端に設置したマイクロホンならびにブラウン管オシロスコープで検出し、周知の棒の縦振動の式 $f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ (c/s), (l は棒の長さ cm, E はヤング率 kg/cm^2 , γ は比重 kg/cm^3 , $g=980 \text{ cm/s}^2$) により f, l, γ, g を既知として E を定めようとするものである。試料 A は上記試料と同一素材の均一断面片持り (これを 20, 15, 12.5, 10 ϕ と逐次細くしたものをそれぞれ A_2, A_3, A_4, A_5 などとする), 試料 B は A と同一素材のさきのとがった円すい棒, C は A と同一素材で段付部に集中質量を削り出した 3 質点系相当の段付片持りである。試料 D は立軸水車発電機の励磁機軸部で、発電機ロータ上面に根元をボルト締固定される片持りである。ロータの質量は励磁機のそれに比べ十分大きいから、ロータの微小振動に対し、励磁機軸は相対的には片持りになっていると見



(a) 励磁機軸

(b) 等価振動系

系には上部ガイドメタルおよびサブエキサイタ上部より作用する拘束力は微小として無視してある。

第 10 図 試° D (準かさ形水車発電機励磁機軸)

なすことができる。

各試料の振動数測定は、根元の固定部を 60 kg 重の万力で固く締めつけ、はりの先端を長さで直角に電磁石で加振し、共振したときの振動数を電磁石形式のピックアップで検出し、サイクルカウンタで読む方法を採用した。試料 D については電磁石加振はできなかったので軸を木ハンマで打って生ずる減衰自由振動をテレバイプロメータを通じ、オシログラムに記録する方法を採用した。

3.2.2 実験結果

第 8 図の丸鋼棒の重量

$W=2.00\text{ kg}$ (天びんによる)

同上体積

$V=\frac{\pi D^2}{4}l=0.25\times\pi\times9\times35.9=253.8\text{ cm}^3$

同上比重量

$\gamma=\frac{W}{V}=7.881\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{cm}^{-3}$

この試料の縦振動数は 1 次 $f_1=7,214\text{ c/s}$, 2 次 $f_2=14,414\text{ c/s}$ であった。したがってヤング率は

$$E_1=(f_1 2l)^2\frac{\gamma}{g}=(7.214\times71.80)^2\times8.042\times10^{-6}\text{ kg/cm}^2$$
$$=2.158\times10^6\text{ kg/cm}^2$$

$$E_2=(f_2 2l)^2\frac{\gamma}{g}=(14.414\times35.9)^2\times8.042\times10^{-6}$$
$$=2.153\times10^6\text{ kg/cm}^2$$

これより試料のヤング率として 2.155×10^6 を得た。

次に各試料の振動数測定結果は 第 10 表 のようになった。表より次のことがわかる。

(a) 均一断面はりの直径が固定部分 (この場合正方形断面の 1 辺の長さははりの長さの 12.5% になっている) の 2/3 倍程度では 1 次振動数の測定値は計算値より 7% も低くなる。すなわち片持はりでは固定部分の寸法 (断面の各辺と長さ) がはりの直径に比較して十分大きくないと、固有振動数は計算値よりかなり下がってしまう。これに反してはりの直径が固定部分の厚さの 45% 以下ならば各次振動数を通じ、測定値は計算値よりせいぜい 3% 低い程度で比較的一致することを実験結果は示している。この現象はちょうど音響学における開管内気柱共鳴の開口端補正に匹敵するもので、固定端補正と名づけてよいと考え

られる。固定端寸法が軸直径より十分大で、軸の長さが直径に比し比較的長ければ (比較的細長い軸であるならば) 固定端補正は無視できる程度であるがそうでない場合は無視できない。これについては別に詳細な実験研究を必要とするが、本報の実験結果では次のようである。

いま補正係数を α とすると、第 10 表試料 A のデータより

$$\left(\frac{360}{360+\alpha d}\right)^2=\left(\frac{360}{360+30\alpha}\right)=\frac{156}{167.65}$$

となるから $\alpha=0.34$ を得る。すなわち軸の長さは実際より直径の 34% だけ長くしてやらなければ計算の振動数と一致しないことになる。試料 A_2, A_3, A_4 および A_5 について同様の計算をすると、それぞれ α の値は 0.23, 0.37, 0.28 および 0.33 となり、かなりばらつきがあるが各試料を平均すると 0.31 となる。これより均一断面はりでは固定端補正として軸直径の 31% を実際の軸長に加えて 1 次振動数を計算すると、計算と実測とよく一致することになる。

(b) 円すい形断面はりでは 1 次, 2 次, 3 次とも測定値は計算よりそれぞれ 4, 17, 21% も低くなる。どうしてこのように低くなるのかわからない。1 次の 4% は固定部寸法がはりの寸法より比較的小さかったためとしても、2 次, 3 次が異常に低過ぎる。

(c) 段付 3 質点はりの測定値は計算値より、せいぜい 3% 低い程度で比較的一致する。

以上の結果より、タービン翼のような根元固定部分の寸法がはりの直径に比較し、あまり大きくないはりでは実測値は計算値より低くなる傾向を生ずる。特にはりが円すいのように先細状になっているときは 2 次, 3 次の実測値は計算値より低くなる傾向を生ずることがわかる。

3.3 水車発電機励磁機軸の固有振動数

第 10 表に準かさ形水車発電機励磁機軸の寸法ならびに等価振動系を示す。この系は段付はりに 3 個の質点のついた片持はりとみなすことができる。このはりの 1 次振動数の計質値は 21.3 c/s で、測定値は 23.0 c/s でほぼ一致しており、本報の計算方式が実用になることを示している。

水車発電機では励磁機軸にしても、水車発電機軸にしても 1 次の固有振動数は一般に回転速度の数倍以上であるから回転による共振振動の危険はないが、ランナ周囲の水流と負荷の状況によっては、車軸の固有振動が誘起されることはしばしば経験するところである。

第 10 表 各種片持はりのたわみ固有振動数測定結果 (c/s)

試料	測定値			計算値			計算値と測定値の差の比較 (%)			備考
	1 次 f_1	2 次 f_2	3 次 f_3	1 次 f_1'	2 次 f_2'	3 次 f_3'	$\frac{f_1'-f_1}{f_1'}$	$\frac{f_2'-f_2}{f_2'}$	$\frac{f_3'-f_3}{f_3'}$	
A	156.0	—	—	167.65	1,050.9	2,942	7.0	—	—	30 ϕ , 360 長, 均一断面, 丸鋼, 2 次, 3 次は測定不能
A ₂	109.1	678.3	—	111.77	700.6	1,961.3	2.3	3.2	—	20 ϕ , 360 長, 均一断面, 丸鋼, 3 次は測定不能
A ₃	81.3	518.4	1,429.5	83.83	525.5	1,471.0	3.0	1.4	2.9	15 ϕ , 360 長, 均一断面, 丸鋼
A ₄	68.3	436.3	1,208.3	69.85	437.9	1,225.8	2.4	0.4	1.4	12.5 ϕ , 360 長, 均一断面, 丸鋼
A ₅	55.0	344.5	966.4	55.88	350.3	980.6	1.4	1.7	1.5	10 ϕ , 360 長, 均一断面, 丸鋼
B	298.0	629.5	1,079	311.37	755.2	1,373.3	4.3	16.7	21.4	根元 21.24 ϕ , 350 長, 円錐形断面, 鋼棒
C	52.5	162.0	1,115	53.8	163.0	—	2.4	0.6	—	段付 3 質点片持はり, 鋼, 3 次は計算していない

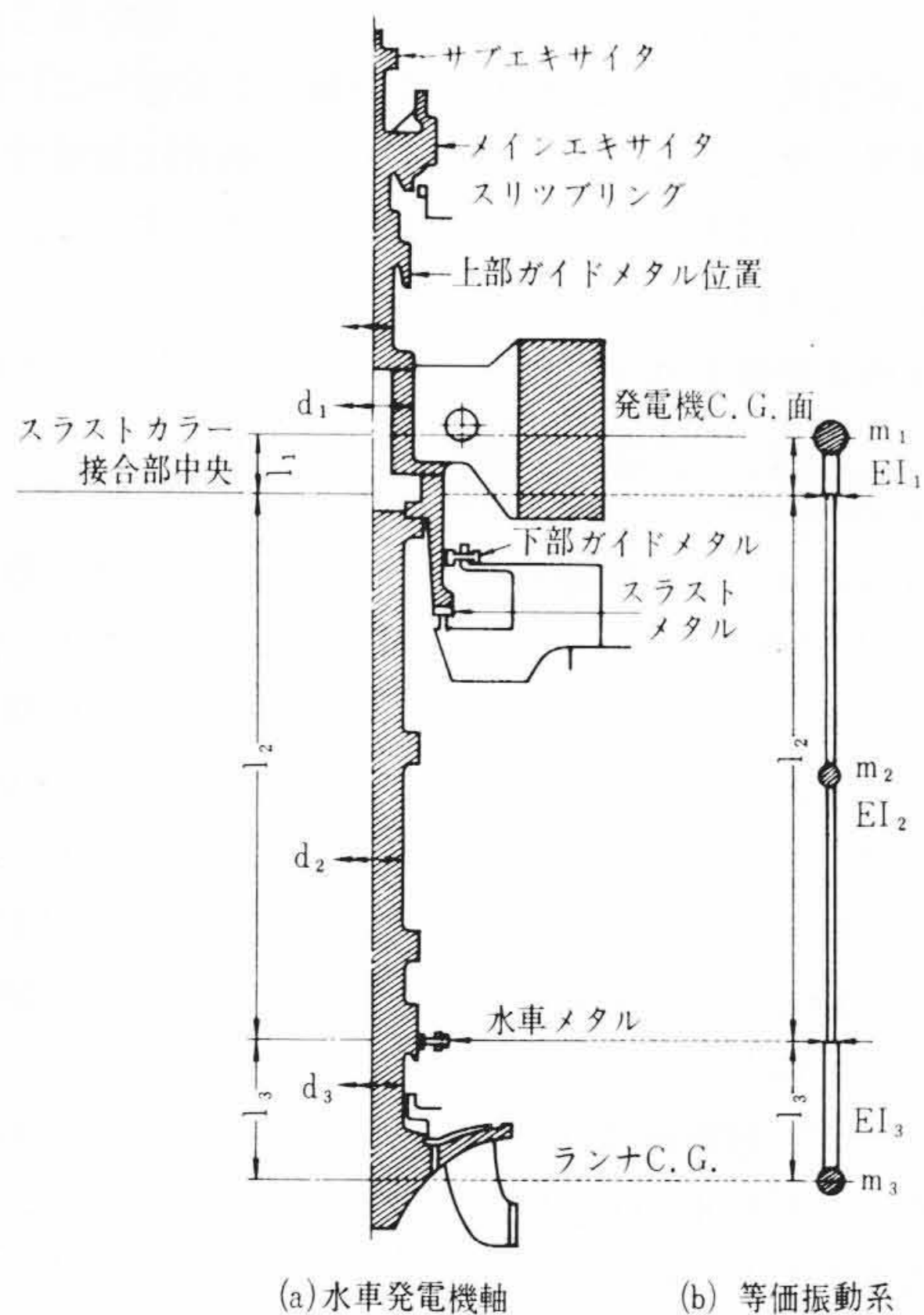
備考: 試料 A₂~A₅ は試料 A のはりを逐次削って、細くしたもの。計算は下記周知公式による。

$$f_1'=\frac{3.516}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EIg}{rA}}=\frac{1.758}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eg}{r}}, f_2'=\frac{22.03}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EIg}{rA}}=\frac{11.02}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eg}{r}}$$
$$f_3'=\frac{61.70}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EIg}{rA}}=\frac{30.85}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eg}{r}}$$

試料 B は公式

$$f_1'=\frac{4.359}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eg}{r}}, f_2'=\frac{10.573}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eg}{r}}, f_3'=\frac{19.225}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eg}{r}}$$

により求めてある。上式で $E=2.155\times10^6\text{ kg/cm}^2$, $\gamma=7.881\times10^{-3}\text{ kg/cm}^2$, r =根元半径である。



(a) 水車発電機軸 (b) 等価振動系
上部ガイドメタルは振動系から省略してある
第 11 図 準かさ形水車発電機軸

そのとき車軸の各部で最もよく振れるのは準かさ形の場合では励磁機軸であり、特に水車発電機軸系の振動数と励磁機軸の振動数とが接近している場合は、励磁機軸が発電機ロータの振動に共振した形式になり、大きな振動になる。したがって設計段階において両車軸の振動数（特に 1 次振動数）を計算しておき、励磁機軸の振動数を水車発電機のそれの少なくとも数%高くしておく必要がある。このような意味で両車軸の固有振動数計算が必要である。

第 11 図 (a) は水車発電機軸でまず発電機の固有振動数を計算するため、系を (b) のような 2 点支持突出軸と仮定する。この場合の質点は m_1 (発電機), m_2 (中間軸等価質量), m_3 (ランナ) となり、振動数方程式 ((10) 式相当) の影響係数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{l_1^3}{3EI_1} + \frac{l_1^2 l_2}{3EI_2}, & a_{22} &= \frac{l_2^3}{48EI_2} \\ a_{12} &= -\frac{l_1 l_2^2}{16EI_2}, & a_{23} &= -\frac{l_2^2 l_3}{16EI_2} \\ a_{13} &= \frac{l_1 l_2 l_3}{6EI_2}, & a_{33} &= \frac{l_3^3}{3EI_3} + \frac{l_2 l_3^2}{3EI_2} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$E = 2.100 \times 10^6$$

$$EI_1 = 2.204 \times 10^{12}$$

$$EI_2 = 1.166 \times 10^{12} \text{ (kg} \cdot \text{cm}^2 \text{)}$$

$$EI_3 = 1.6239 \times 10^{12}$$

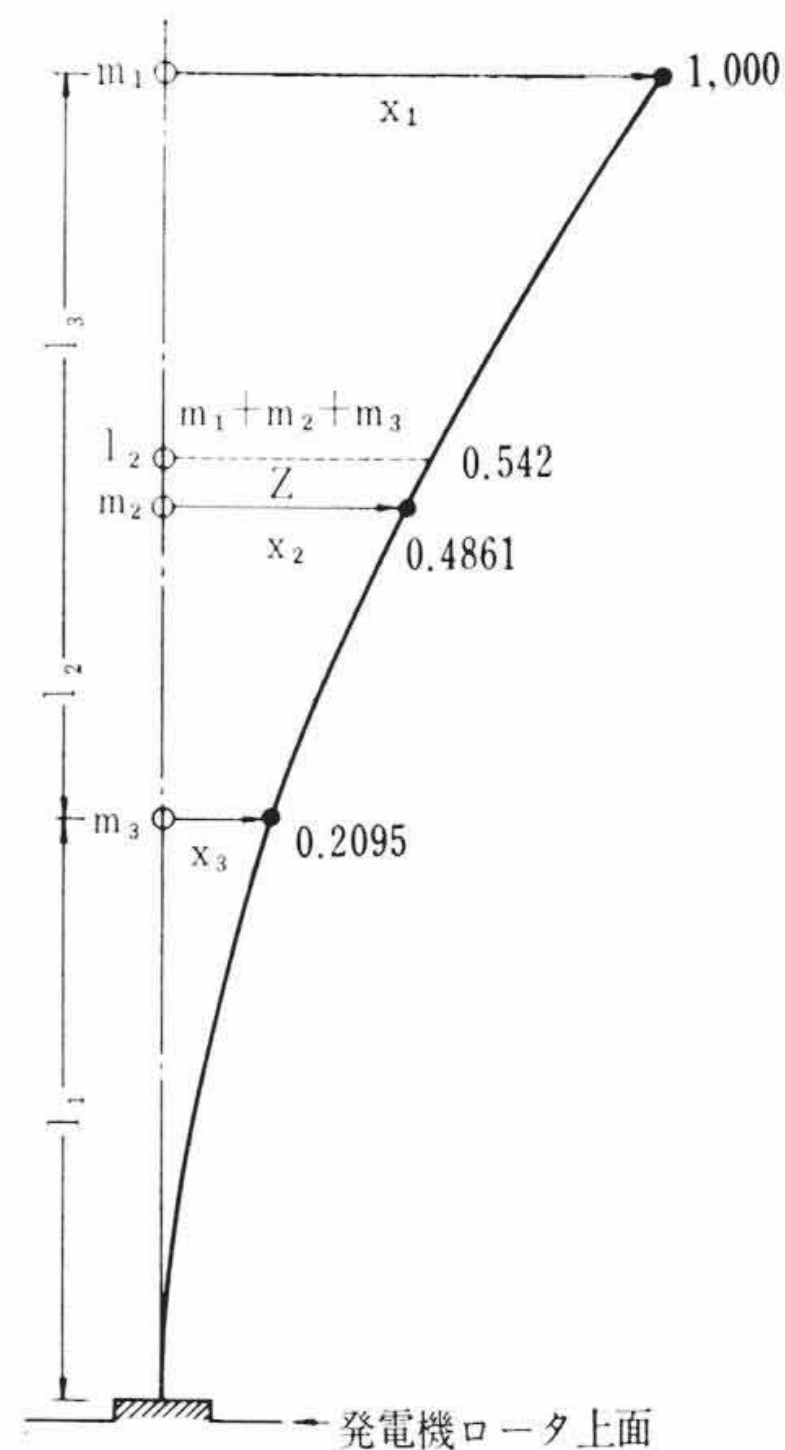
$$l_1 = 62.5, l_2 = 483.5, l_3 = 120 \text{ (cm)}$$

$$m_1 = 138.7, m_2 = 5.110, m_3 = 6.122 \text{ (kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-1} \text{)}$$

これらの値を (17) 式に入れ、(10) 式によって振動数を求めると、

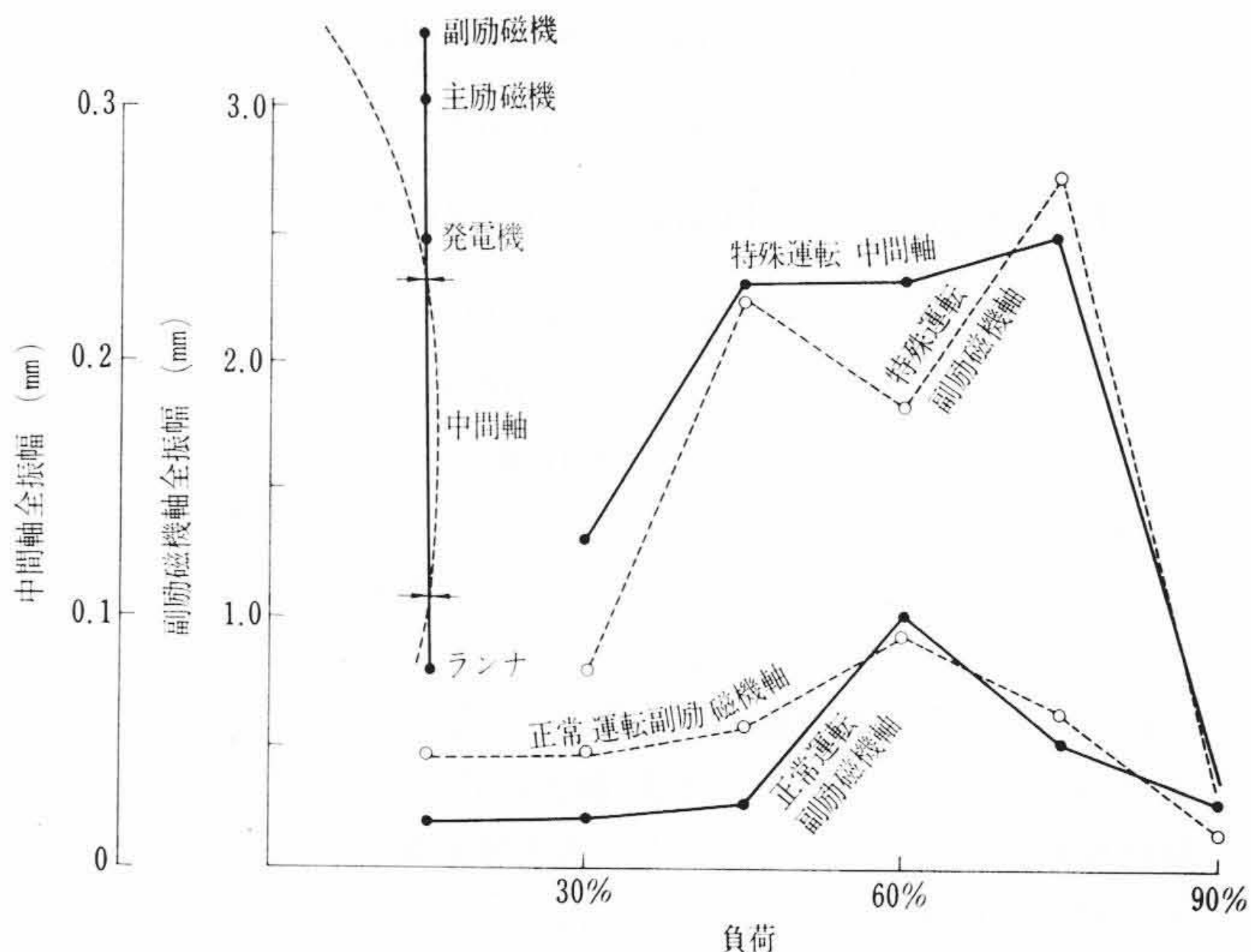
$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{10^4}{0.898015}, & \omega_1 &= 105.5, & f_1 &= 16.79 \text{ (c/s)} \\ \omega_2^2 &= \frac{10^4}{0.123979}, & \omega_2 &= 284.0, & f_2 &= 45.20 \text{ (c/s)} \\ \omega_3^2 &= \frac{10^4}{0.027328}, & \omega_3 &= 604.9, & f_3 &= 96.27 \text{ (c/s)} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

実測値は 1 次しか求めていない。値は 17.5 c/s で計算値より $\frac{17.5 - 16.79}{16.79} = 0.042$, 約 4% 高くなっているが、ほぼ一致しているといえよう。励磁機軸の 1 次振動数を求めると 21.32 c/s となる。



(l_1, l_2, l_3 の値は省略してある)

第 12 図 励磁機軸の一次振動のモード



定格負荷 33 MW, 回転数 257 rpm, $H=70$ m の水車, 振動のサイクルは約 17.5 c/s, この振動は特殊の運転条件でのみ大きくなる。このときのモードを図左上に示す。主励磁下部の振幅は副励磁機軸の振幅の 1/3 で、実際上励磁機軸は第 12 図のように振動をしている。

第 13 図 某水力発電所で経験された水車発電機軸の振動

$$\left. \begin{aligned} \omega_E^2 &= \frac{2.1 \times 10^6}{116.99} = 1.7950 \times 10^4 \\ \omega_E &= 133.98 \\ f_1 &= 21.32 \text{ (c/s)} \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

実測値は 23.0 c/s であったから計算値より $\frac{23.0 - 21.3}{21.3} = 7.9\%$ 高かったことになる。実測値がやや高く出たのは上部ガイドメタルおよびサブエキサイタ上部の拘束を無視したためであろう。

以上の計算で発電機ロータの 1 次振動数 (ω_G とする) と励磁機軸の 1 次振動数 (ω_E とする) が定まったから、設計段階において水車発電機軸が固有振動数で振動を起こした場合、励磁機軸はどの程度発電機ロータより振動振幅を拡大するかを求めることができる。励磁機軸の振動の中心を固定端から測って l_z , その位置の振幅を Z とすると (先端 m_1 の振幅を 1.000 とする)

$$Z^2 = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.670}{5.685} = 0.294$$

$$Z = 0.542$$

すなわち励磁機軸の振動の中心 l_z は第 12 図よりだいたい m_2 すな

わち主励磁機軸重心より 10 cm 上方にある。あまり細かいことをい
わなければ主励磁機の中央である。この位置の振幅と発電機重心の
振幅 X との比 (拡大率) は近似的に (励磁機軸の減衰は無視できる
程度である),

$$\frac{Z}{X} = \frac{\left(\frac{\omega_G}{\omega_E}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_G}{\omega_E}\right)^2} \dots\dots\dots (21)$$

で表わされる。(20) 式より $\omega_E^2 = 1.7950 \times 10^4$, (18) 式より $\omega_1^2 =$
 $\omega_G^2 = 1.114 \times 10^4$ として (21) 式は

$$\frac{Z}{X} = \frac{0.621}{1 - 0.621} = 1.638$$

すなわち主励磁機の振幅は約 1.6 倍に拡大されることになる。実側
では

$$\omega_E^2 = (23 \times 6.28)^2 = 2.086 \times 10^4$$

$$\omega_G^2 = (17.5 \times 6.28)^2 = 1.208 \times 10^4$$

であるから拡大率は

$$\frac{Z}{X} = \frac{0.580}{1 - 0.580} = 1.38$$

となる。励磁機軸は発電機ロータに片持状に取り付けられるから、
その振動は発電機ロータの振動よりどうしても大きくなる。設計上
はこの拡大率を約 2 倍以下にすることが望ましい。

(21) 式で拡大率を 2 とし (ω_G/ω_E) を求めると、0.816 という値が
得られる。すなわち ω_E は ω_G より約 23% 大きく設計することが必
要である。

4. 結 言

変断面片持はりの固有振動数計算を簡単化するため、はりを 3 分
割あるいは 6 分割し、階段状に断面が変化する質量のないはりに集
中質量が等間隔に分布する 3 質点系または 6 質点系片持はりに近似
的に等価せしめて計算する方法を試み、誤差を検討した。この応用
例として準かさ形水車発電機励磁機軸の 1 次固有振動数を計算し実
測値と比較した。

(1) 均一断面はりに対しては、全長を 7 等分し、はりの全質量

の 2/7 が根元より全長の 2/7, 4/7, 6/7 の位置に集中しているよ
うな 3 質点に置きかえたはりとして計算した場合、誤差は 1 次、
2 次および 3 次でそれぞれ 1.3, 6.5% および 2.1% (いずれも正し
い値より大) であった。同様にはりを 13 等分し 6 質点系はりとし
て計算した場合はそれぞれ 0.5, 1.9% および 2.9% (いずれも正
しい値より大) であった。

(2) 変断面はりとして、円すい形断面棒を選び、1 次振動に対
しては等価曲げこわさを、段付はりとなわみが等しくなるように
選び、2 次および 3 次振動に対しては等価曲げこわさを根元より
全長の 1/14, 6/14 および 11/14 の位置の曲げこわさにとり、3 質
点系として計算した場合の誤差は 1 次、2 次、3 次に対しそれぞ
れ 4.8, 1.7 および 3.1% (いずれも正しい値より大) であった。

(3) 軸間に集中荷重のある 3 質点系段付はりについて、1 次と
2 次固有振動数を計算した結果、計算値は各次とも実験値と誤差
2.4% 以下で一致した。

(4) 長さ 360 mm, 直径 10~30 mm の円形断面片持はり (根元
固定部の寸法は正方形断面で一辺および軸方向の長さが直径 3/5
の倍以上) の振動数計算値は各次とも実測値より数%低くなり、
この誤差ははりが直径に比して細長いほど小さい。計算上 1 次振
動数ははりの長さを実際の長さに直径の 31% を加えた長さとし
れば実測値とよく一致する。

(5) 準かさ形水車発電機励磁機軸の固有振動数 (1 次) は軸系を
3 質点系の段付はりに等価として容易に計算することができる。
この計算値と実測値の差は本報の励磁機軸の例では約 4% で実測
値が大きかった。

本研究に当たり、日立製作所日立工場電力設計部および水力設計
部関係者より社外発表の機会を与えられ、日立研究所北川部長より
絶えずご激励をいただいた。厚くお礼申しあげる。

参 考 文 献

- (1) W. T. Thomson: Mechanical Vibrations, p. 186 (1960-8, Prentice-Hall)
- (2) W. T. Thomson: Mechanical Vibrations, p. 169 (1960-8, Prentice-Hall)
- (3) W. T. Thomson: Mechanical Vibrations, p. 170 (1960-8, Prentice-Hall)

Vol. 25

日立造船技報

No. 1

- ・三角形ブラケットの圧壊強さ
- ・耐食アルミニウム合金加工硬化材の MIG 溶接における軟化域
- ・波形炉筒および鏡板接合部の強さ (第 2 報)
——接合部の応力解析——
- ・原油燃焼の前処理法 (第 1 報)
——ガラス器具による前処理試験——

- ・主機ディーゼル機関の振動および騒音 (第 1 報)
——排気騒音を中心にした実船騒音計測結果——
- ・高バナジウム鋼の研削条件
- ・国産ジンクリッチエポキシプライマの性能試験
- ・8kW の ZcC 放電加工回路の試作

……本誌に関する照会は下記に願います……

日立造船株式会社技術研究所

大阪市此花区桜島北之町 60