

単純支持変断面はりの固有振動数と モデルロータの曲げこわさ

The Natural Frequencies of Simply Supported Variable-Section-Beam
and the Bending-Stiffness of Model Rotor

小堀 与一* 大森 基次* 国井 毅*
Yoichi Kobori Motoji Omori Takeshi Kunii

内 容 梗 概

変断面単純支持の車軸を3種の断面の軸と三つの集中質量よりなる軸系に等価できたとして、この3自由度振動系の六つの影響係数を定め固有振動数(ジャイロ効果を考えない危険速度)、振動モード、たわみ量などを求める計算式を作った。この式の適用例として、実物大ターボロータモデルの固有振動数を計算し、実測値(1次、2次)と比較してみた。軸と車盤部の有効曲げ剛性を適当に考慮することにより、計算値と実測値は数%以下の差で一致することがわかった。本計算式は単に特定のロータの振動計算に適用されるのみならず、ほとんどあらゆる単純支持形車軸あるいははりの振動計算に関し、いかなる設計者に対しても比較的容易に精度よく適用されるものである。

1 緒 言

普通の回転機はこれにほかの機械を連結しない状態では、ほぼ単純支持(両端支持)軸になっている。このような軸に関しては、断面がいかに複雑であっても、こわさのみあって質量のない多くの段付はりと、質点とより成る軸に等価に置換し、固有振動数を表計算あるいは電子計算機により求めることができる。しかし実際計算では軸系に削り出し車盤部があるような場合は、その部分の軸の有効曲げ剛性をいかに定めるかの不確定要素がはげしく、現在でも設計上の盲点となっている。また設計上の実際問題として、変断面軸の固有振動数計算が特定の設計者や電子計算機によらなくては満足に行なえないというのも不便である。筆者はこの観点より、変断面単純支持はりの固有振動数を、比較的簡単な影響係数による計算を試みることによって、実測との誤差数%以下で求められることを確かめ、一般回転機設計者その他の技術者に実用上役だつようにした。

2 計 算 法

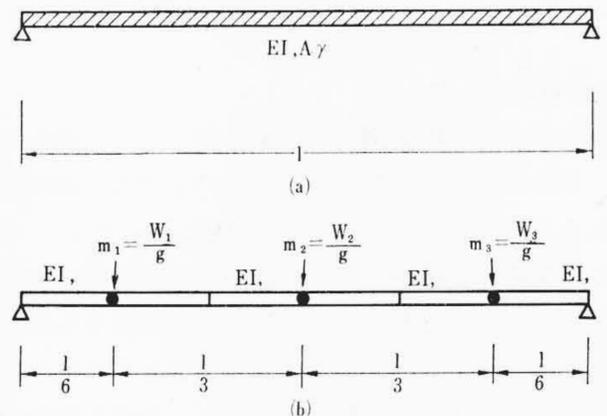
2.1 均一断面はりと等価な3自由度振動系

変断面はりについて計算する前に、均一断面はりをこれと等価な3自由度振動系に置きかえた場合、固有振動数の計算誤差はどの程度になるかを考えてみる。第1図(a)は、長さ l 、曲げこわさ EI 、単位長さの重量 $A\gamma$ の単純支持はりで、これの固有振動数は周知のように、

$$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI\gamma}{\gamma A}} \quad (\text{rad/s})$$

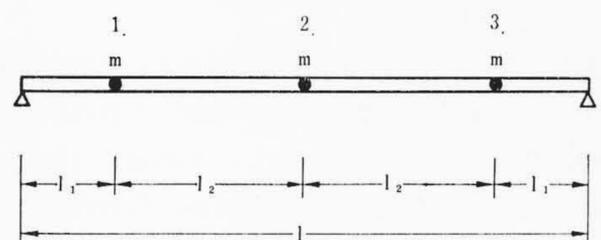
として与えられている。 λ は振動数係数である。いま図(a)の軸長を3等分し、各断片の重心に集中荷重 $w_1=w_2=w_3=\gamma Al/3$ があり、軸は曲げ剛性のみあって、質量はないものとする、同図(b)に示すような3自由度振動系が得られる。ここで(a)の系と(b)の系が振動的に等価であると考え、この場合(b)の系の固有振動数の係数 λ を材料力学のたわみの式(第2図参照)から影響係数を定めてのち定めると、この値は(a)の厳密な値とは完全に一致しないが、1次と2次は比較的良好一致し、3次は30%程度低くなる(第1表参照)。そこで変断面はりにおいても、軸長を3等分し、そのおのおのの重心に分割した軸の重量が集中荷重として加わり、かつ軸はこわさのみあって質量がないという3自由度の軸系に等価であると

* 日立製作所日立研究所



(a)図のはりの全重量を $w=A\gamma l$ とし、これを(b)図の荷重の和に等しいとする。 $w=w_1+w_2+w_3$ である。

第1図 均一断面はりを等価な3質点系はりに置換



図の質点各位置の影響係数は

$$a_{11}=a_{33}=\frac{l_1^2(l-l_1)^2}{3EI}, \quad a_{22}=\frac{l^3}{48EI}$$

$$a_{12}=a_{21}=a_{23}=a_{32}=\frac{3l_1l^2-4l_1^3}{48EI}, \quad a_{13}=a_{31}=\frac{l_1^2(l^2-2l_1^2)}{6EI}$$

で与えられる。

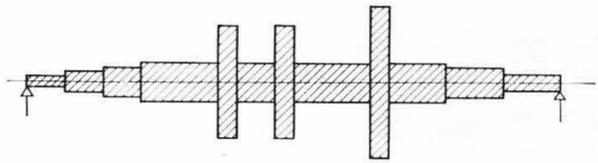
第2図 均一断面3質点系はり

第1表 均一断面単純支持はりの振動係数の比較

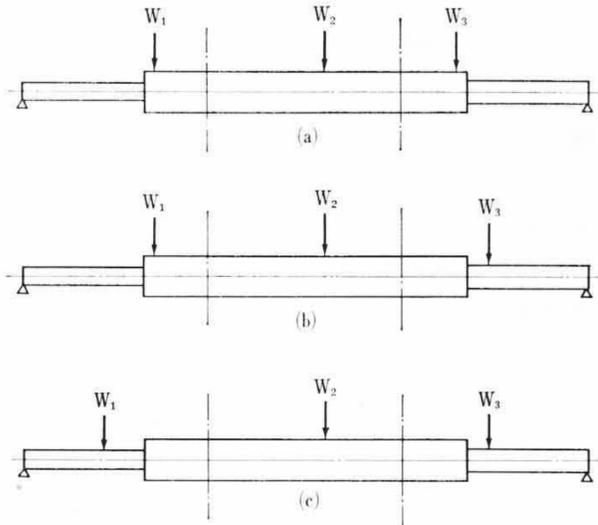
	λ^2				$\frac{A-B}{A}$
	厳密値 A	比	等価3質点系による値 B	比	
1次	9.8696	1	9.8590	1	0.001074
2次	39.4784	4	38.1838	3.872	0.03279
3次	88.8264	9	62.3538	6.324	0.2980

備考: $B'=62.3538 \times \sqrt{2}=88.1814$, $\frac{A-B'}{A}=\frac{88.8264-88.1814}{88.8264}=0.007261$

考え、この系について固有振動数を計算すれば1次と2次の振動数はもとの系の固有振動数に近似的に(誤差3%程度で)一致すると考えてよいであろう。このような考えのもとに以下に変断面はりについて固有振動数を計算してみる。



第3図 変断面単純支持軸



第4図 第3図と振動数の等価な軸系

2.2 振動数方程式

変断面単純支持軸の代表例として第3図のような軸を考え、これの1, 2, 3次の固有振動数を求めるものとする。図の軸形は非常に複雑であるが、適当な方法によって(後に例示する)、系は第4図(a)のような3種の質量のないこわさのみある段付はりと、中央のはりの上任意位置に位置した三つの集中荷重を有する軸系に、振動数が等価に置換されたものとする。置換するときの集中荷重の定め方は第1図の場合と同様、軸長を3等分し、その各断片の重心に断片の重量が集中荷重として加わるものとする。置換した系が第4図(a)のようにならないので、同図(b)または(c)のようになることもあるかもしれないが、そのときは影響係数の計算式が異なるだけで、計算のやり方は同様である。

車軸の振動数計算で、比較的簡単で精度のよい方法は影響係数を用いる方法である。本報では荷重の数したがって質点の自由度を3としたが一般に3より多いかもしれない。その場合は振動数方程式を解くことは4次以上の高次方程式を解くか、行列の計算になるので若干やっかいである。しかし影響係数の計算式が与えられれば実行可能である。

影響係数を用いる振動数計算は、どの本にも書いてあるが概説する。第4図(a)のはりが固有振動数 ω で振動しているとき、三つの質量 $m_1=w_1/g, m_2=w_2/g, m_3=w_3/g$ の振幅をそれぞれ x_1, x_2, x_3 とすれば次の式が成り立つ⁽¹⁾。

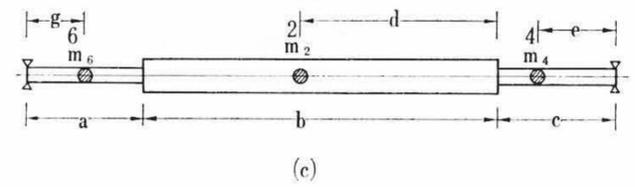
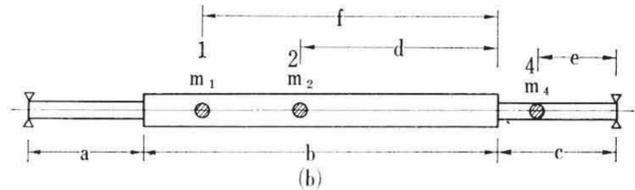
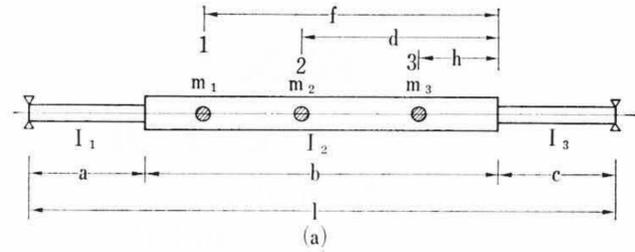
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}(m_1\omega^2x_1) + a_{12}(m_2\omega^2x_2) + a_{13}(m_3\omega^2x_3) \\ x_2 &= a_{21}(m_1\omega^2x_1) + a_{22}(m_2\omega^2x_2) + a_{23}(m_3\omega^2x_3) \\ x_3 &= a_{31}(m_1\omega^2x_1) + a_{32}(m_2\omega^2x_2) + a_{33}(m_3\omega^2x_3) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、 a_{11}, \dots, a_{33} : 影響係数でたとえば a_{11} は(a)で w_1 位置における単位荷重によって、その位置に生ずるたわみ

a_{21} : w_1 位置における単位荷重によって、 w_2 位置に生ずるたわみ

ω : 単位の固有振動数 (rad/s)

振動数方程式は $1/\omega^2$ を未知数として次式で与えられる⁽¹⁾。



第5図 3質点変断面軸の振動系

$$\begin{vmatrix} \left(a_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{12}m_2) & (a_{13}m_3) \\ (a_{21}m_1) & \left(a_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) & (a_{23}m_3) \\ (a_{31}m_1) & (a_{32}m_2) & \left(a_{33}m_3 - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots (2)$$

材料力学の定理より $a_{12}=a_{21}, a_{13}=a_{31}, a_{23}=a_{32}$ であるから、(2)式を解くには質量 m_1, m_2, m_3 の他に6個の影響係数 $a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{11}, a_{22}, a_{33}$ がわかっていなくてはならない。第4図の系の質量、断面2次モーメントなどを第5図のように符号を決めると、影響係数の計算式は以下のように面積モーメント図から計算される。

2.3 第5図(a)の系の影響係数

この系の6個の影響係数を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} &= \frac{a^2(c+d)}{6EI_1l^2} \{ (a+b-f)(3b+3c+a) - l(a+3b-3f) \} \\ &+ \frac{1}{6EI_2l^2} \{ (a+b-f)(c+d)(b-d) \\ &\times [(b-d)(3a+b-d) + 3(c+d)(2a+b-d)] \\ &+ (a+b-f)d(a+b-d)[d(3c+2d) + 3c(2c+d)] \\ &- l(c+d)(b-f)^2(3a+b-f) \} + \frac{(a+b-d)(a+b-f)c^3}{3EI_3l^2} \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{a^2(c+d)}{6EI_1l^2} [(a+b-d)(3b+3c+a) - l(3b-3d+a)] \\ &+ \frac{1}{6EI_2l^2} \{ (a+b-d)(b-d)(c+d) \\ &\times [(b-d)(3a+b-d) + 3(c+d)(2a+b-d)] \\ &+ 2d(3c^2+3cd+d^2)(a+b-d)^2 \\ &- l(c+d)(b-d)^2(3a+b-d) \} + \frac{(a+b-d)^2c^3}{3EI_2l^2} \dots (4) \end{aligned}$$

a_{11} は(3)式で d の代わりに f とおけばよく、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{a^2(c+f)}{6EI_1l^2} [(a+b-f)(3b+3c+a) - l(3b-3f+a)] \\ &+ \frac{1}{6EI_2l^2} \{ (a+b-f)(b-f)(c+f) \\ &\times [(b-f)(3a+b-f) + 3(c+f)(2a+b-f)] \\ &+ 2f(3c^2+3cf+f^2)(a+b-f)^2 \\ &- l(c+f)(b+f)^2(3a+b-f) \} + \frac{(a+b-f)^2c^3}{3EI_3l^2} \dots (5) \end{aligned}$$

a_{33} は(5)式で f の代わりに h とおけばよく,

$$a_{33} = \frac{a^2(c+h)}{6EI_1l^2} [(a+b-h)(3b+3c+a) - l(3b-3h+a)] + \frac{1}{6EI_2l^2} \{(a+b-h)(b-h)(c+h) \times [(b-h)(3a+b-h) + 3(c+h)(3a+b-h)] + 2h(3c^2+3ch+h^2)(a+b-h)^2 - l(c+h)(b-h)^2(3a+b-h)\} + \frac{(a+b-h)^2c^3}{3EI_3l^2} \dots\dots\dots (6)$$

a_{31} は(3)式で d の代わりに h とおけばよく,

$$a_{31} = a_{13} = \frac{a^2(c+h)}{6EI_1l^2} \{(a+b-f)(3b+3c+a) - l(a+3b-3f)\} + \frac{1}{6EI_2l^2} \{(a+b-f)(c+h)(b-h) \times [(b-h)(3a+b-h) + 3(c+h)(2a+b-h)] + (a+b-f)h(a+b-h)[h(3c+2h) + 3c(2c+h)] - l(c+h)(b-f)^2(3a+b-f)\} + \frac{(a+b-h)(a+b-f)c^3}{3EI_3l^2} \dots\dots\dots (7)$$

a_{32} は(3)式で f の代わりに d , d の代わりに h とおけばよい。

$$a_{32} = a_{23} = \frac{a^2(c+h)}{6EI_1l^2} \{(a+b-d)(3b+3c+a) - l(a+3b-3d)\} + \frac{1}{6EI_2l^2} \{(a+b-d)(c+h)(b-h) \times [(b-h)(3a+b-h) + 3(c+h)(2a+b-h)] + (a+b-d)h(a+b-h)[h(3c+2h) + 3c(2c+h)] - l(c+h)(b-d)^2(3a+b-d)\} + \frac{(a+b-h)(a+b-d)c^3}{3EI_3l^2} \dots\dots\dots (8)$$

2.4 第5図(b)の系の影響係数

この系の係数は $a_{14}=a_{41}$, $a_{24}=a_{42}$, a_{44} の3個を求めればよい。他の3個 $a_{12}=a_{21}$, a_{22} , a_{11} はそれぞれ(3), (4)および(5)式で与えられているからである。

$$a_{41} = a_{14} = \frac{e(a+b-f)}{6EI_3l^2} [c^2(3a+3b+c) - e^2l] + \frac{e}{6EI_2l^2} \times \{(a+b-f)f[f(f+3c) + 3(f+2c)(a+b-f)] + (c+f)(b-f)[(b-f)(3a+2b-2f) + 3a(2a+b-f)]\} + \frac{a^3e(c+f)}{3EI_1l^2} \dots\dots\dots (9)$$

a_{42} は(9)式で f の代わりに d とおけばよく,

$$a_{42} = a_{24} = \frac{e(a+b-d)}{6EI_3l^2} [c^2(3a+3b+c) - e^2l] + \frac{e}{6EI_2l^2} \times \{(a+b-d)d[d(d+3c) + 3(d+2c)(a+b-d)] + (c+d)(b-d)[(b-d)(3a+2b-2d) + 3a(2a+b-d)]\} + \frac{a^3e(c+d)}{3EI_1l^2} \dots\dots\dots (10)$$

$$a_{44} = \frac{e^2}{6EI_3l^2} \{2e(l-e)^2 + (c-e) \times [(3a+3b)(2l-e-c) + (c-e)(3l-2e-c)]\} + \frac{e^2b}{3EI_2l^2} [3a^2+3ab+b^2] + \frac{e^2a^3}{3EI_1l^2} \dots\dots\dots (11)$$

2.5 第5図(c)の系の影響係数

この系の係数は a_{22} , $a_{24}=a_{42}$, a_{44} がすでに(4), (10)および(11)式で与えられているから $a_{26}=a_{62}$, $a_{64}=a_{46}$, a_{66} の3個を求めればよい。

$$a_{26} = a_{62} = (c+d)g[a^2(a+3b+3c) - g^2l] + \frac{g}{6EI_2l^2} \{(c+d)(b-d) \times [(b-d)(3a+b-d) + 3(d+c)(2a+b-d)] + (a+b-d)d[d(2c+2d+c) + 3(2c+d)c]\} + \frac{c^3g(a+b-d)}{3EI_3l^2} \dots\dots\dots (12)$$

$$a_{46} = a_{64} = \frac{eg}{6EI_3l^2} \{c^2(3l-2c) - le^2\} + \frac{ebg}{6EI_2l^2} [b(b+3c) + 3a(2c+b)] + \frac{eg}{6EI_1l^2} [(a-g)^2(3l-2a-g) + 3g(a-g)(2l-g-a) + 2g^2(l-g)]$$

$$a_{66} = \frac{g^2}{6EI_1l^2} \{g(l-g)(3l-2g) + (a-g) \times [(a-g)(3l-a-2g) + 3(b+c)(2l-g-a)] - gl(l-g)\} + \frac{g^2b}{6EI_2l} [b(2l-2a+c) + 3c(l-a+c)] + \frac{g^2c^3}{6EI_3l^2}$$

2.6 振動数計算式

第5図の(a)~(c)はいずれも同じ3質点系で、振動数計算式は同様な式になるので、質点および係数の符号を同一に統一するため、(a)図を基準と考え、(b)図では m_4 を m_3 と考え、4位置の番号4を3とする。(c)図では m_6 を m_3 と考え、6位置の番号6を3とする。こうすると(a)~(c)図の系の振動数の式は、(2)式で $1/\omega^2 = x$ とおけば3次方程式

$$x^3 - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + a_{33}m_3)x^2 + [(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)m_1m_3 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)m_1m_2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)m_2m_3]x - [a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - (a_{13}^2a_{22} + a_{12}^2a_{33} + a_{23}^2a_{11})] \times m_1m_2m_3 = 0 \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。この式を解として x に関する3個の正の実根が得られ、大きい順に x_1, x_2, x_3 とすると固有振動数(rad/s)は

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \sqrt{\frac{1}{x_1}}, \quad \omega_2 = 2\pi f_2 = \sqrt{\frac{1}{x_2}}, \quad \omega_3 = 2\pi f_3 = \sqrt{\frac{1}{x_3}} \dots\dots\dots (14)$$

となる。 f_1, f_2, f_3 はそれぞれ c/s 単位の1次(基本), 2次および3次の固有振動数である。

固有振動数を知ると同時に振動モードを知る必要のある場合がある。このときは次式によればよい。 x_1, x_2, x_3 はそれぞれ質量 m_1, m_2, m_3 の片振幅でモードは x_1 を基準として

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1 - a_{33}m_3\omega^2)a_{21}m_1\omega^2 + a_{23}a_{31}m_1m_3\omega^4}{(1 - a_{33}m_3\omega^2)(1 - a_{22}m_2\omega^2) - a_{23}m_3a_{33}m_2\omega^4} \dots (15)$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{(1 - a_{22}m_2\omega^2)a_{31}m_1\omega^2 + a_{32}a_{21}m_1m_2\omega^4}{(1 - a_{22}m_2\omega^2)(1 - a_{33}m_3\omega^2) - a_{32}a_{23}m_2m_3\omega^4} \dots (16)$$

この式で ω^2 に対し、 $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ を入れればそれぞれ1, 2次および3次の振動モードが定まる。

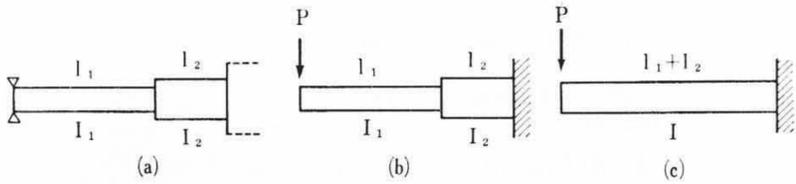
影響係数がわかるとはりの荷重点の自重によるたわみ量が容易に求められる。たとえば中央の荷重 w_2 位置のたわみ量は

$$\delta_2 = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 \dots\dots\dots (17)$$

として計算すればよい。

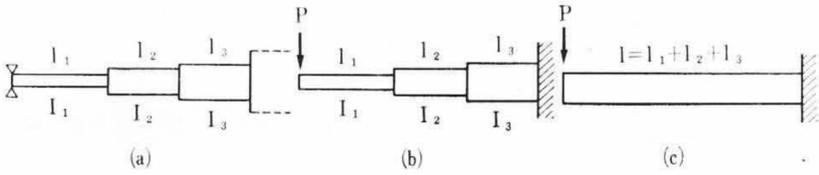
2.7 変断面軸を均一断面軸に換算する方法

一般の変断面軸では均一断面部分が第3図のように3個より多いから、平均化して3種の断面の軸に等価的に換算する必要がある。その場合軸に生ずる曲げモーメントの分布を考えて、次のようにする。第6図(1)のように支持端付近の変断面軸に対しては、支持端付近で、 $I_1, l_1; I_2, l_2$ と2段に変化しているときは等価な慣性モーメントを



(a)図の I_1, I_2 に等価な均一な I を求めるには、(b)図の片持りを考え、(b)図の荷重点に生ずるたわみを、(c)図の荷重点に生ずるたわみに等しいとおいて、 I を I_1, l_1, I_2, l_2 の関数で表わす。

第6図(1) 二つの変断面軸端部を均一断面に等価にする説明図



(a)図の I_1, I_2, I_3 に等価な均一な I を求めるには、(b)図の片持りを考え、(b)図の荷重点に生ずるたわみを(c)図の荷重点に生ずるたわみに等しいとおいて、 I を $I_1, l_1, I_2, l_2, I_3, l_3$ の関数で表わす。

第6図(2) 三つの変断面軸端部を均一断面に等価にする説明図

$$I = \frac{(l_1+l_2)^3}{\frac{l_2(3l_1^2+3l_1l_2+l_2^2)}{I_2} + \frac{l_1^3}{I_1}} \dots\dots\dots (18)$$

とし、 $I_1, l_1; I_2, l_2; I_3, l_3$ と3段に変化しているときは第6図(2)より

$$I = \frac{l^3}{\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2(3l_1^2+3l_1l_2+l_2^2)}{I_2} + \frac{l_3(3l_2^2-3l_2l_3+l_3^2)}{I_3}} \dots\dots\dots (19)$$

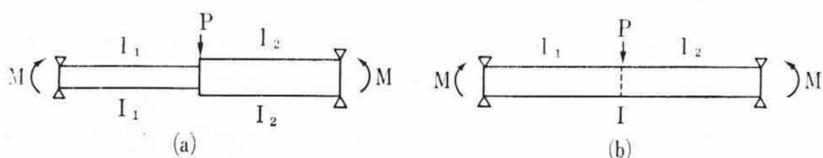
として等価均一断面軸を求める。これらは変断面と均一断面の二つの片持りの先端に集中荷重がある場合の荷重点のたわみを等しくしたという関係式から得られる。次に中央付近の変断面に対しては等価均一断面の慣性モーメントは、第7図を参照して

$$I = \frac{l_1+l_2}{\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}} \dots\dots\dots (20)$$

という関係式を用いればよい。これは両端支持はりの両端から等しいモーメントが加わった場合の、断面変化部のたわみが、均一断面はりの同じ位置で等しいとした関係式から得られる。

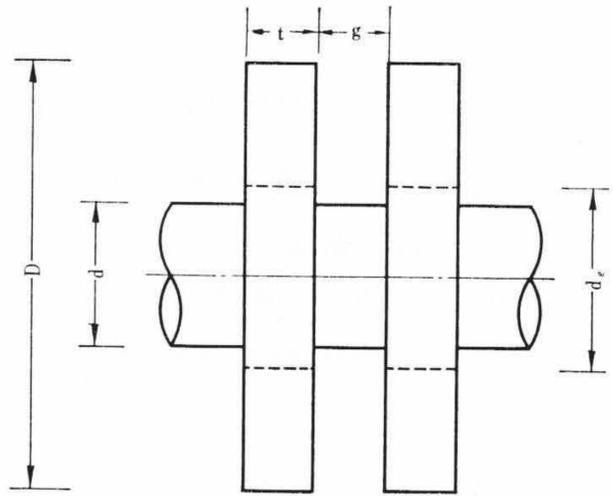
上記の換算はいずれも、 I_1, I_2, I_3 の大きさに極端な差がなく、かつ均一部分の軸の直径に比べ、その部分の長さが十分長い場合であるが、そうでない場合、たとえば太い部分の直径が削り出した車盤のようになっている場合は上記の換算は適用されない。すなわち太い軸部の剛性は軸のたわみに太い寸法そのままに影響するのでなく、かなり引きさされた寸法として影響するからである。この寸法による剛性あるいは直径を、それぞれ軸の有効剛性あるいは有効直径と称する。第8図で削り出し車盤部を有する軸の曲げ剛性は、 $t+g$ の長さのスパンに対し、(20)式を用いて

$$EI = \frac{E\pi}{64} \frac{(t+g)}{\frac{t}{D^4} + \frac{g}{d^4}}$$



荷重点Pのたわみを(a),(b)図とも等しいとし、 I を I_1, l_2, I_1, l_2 の関数で表わす。

第7図 両端より等しいモーメントが加わる単純支持はり



第8図 削り出し車盤部を有する軸

として計算すると大に過ぎ、 $EI = E\pi d^4/64$ とすると小に過ぎる。これは車盤部の剛性が $EI_D = E\pi D^4/64$ として作用するのでなく、これよりずっと小さい値の $EI_e = E\pi d_e^4/64$ として作用するからである。 I_e は車盤部の有効断面2次モーメント、 d_e は車盤部の有効直径である。 d_e をどう見積もるかについては二、三の実験式があるが、著者が長さ1m、直径 $d = 30\text{mm}\phi$ について実験した結果では

$$d_e = d \left[1 + 0.4080 \left(\frac{t}{d} \right) + 0.0451 \left(\frac{t}{d} \right)^2 - 0.100 \left(\frac{t}{d} \right)^3 \right] \dots\dots\dots (21)$$

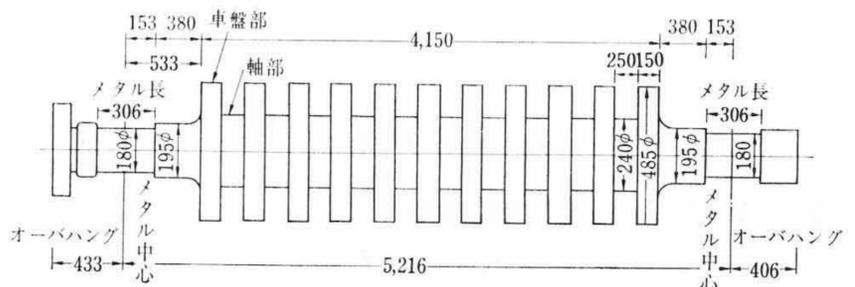
とすればよいことがわかった(実験上削り出し車盤部の有効直径は車盤部に軸部から45度の傾斜をもって描いた正弦半数に等価である)。ただし、この式は $D-d/2 > t/\pi$ という条件で成り立つ。つまり軸と車盤の半径の差が車盤の厚さの約1/3より大きいという場合である(これに関しては次の機会に述べる)。

3. 計算例と実験結果との比較

以上述べたところにより、変断面を有する軸の固有振動数の計算方式がわかったから、この適用例として、ターボロータモデル軸の固有振動数を計算してみる。このロータは日立工場で危険速度付近のつりあいおよびたわみ振動の形態を研究するため試作した実物大のもので、第9図はその略図である。ロータは軸受端より突出部を有しているが、この部分の質量は比較的小さいので省略すると、ロータは中央から対称になった単純支持軸としてよいであろう。このロータの固有振動数(車盤の直径まわりの質量慣性モーメントのジャイロ効果の固有振動数に及ぼす効果は、計算誤差に対し省略できるほど小さいと見なされるので、固有振動数をもって危険速度としてよい)を計算するため、ロータの全長5,216mmを3等分し、その重心に自重が、質量のないこわさのみある軸に集中荷重として作用するとする。ロータの比重を $7.85 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ とすると、第10図より荷重と質量は

$$w_1 = w_3 = 1,042.5 \text{ kg}, \quad w_2 = 1,125 \text{ kg}$$

$$m_1 = m_3 = 1.0533 \text{ kg}\cdot\text{s}^2\cdot\text{cm}^{-1}, \quad m_2 = 1.14796 \text{ kg}\cdot\text{s}^2\cdot\text{cm}^{-1}$$



1次危険速度実測値 875 rpm, 2次危険速度実測値 3,100 rpm, 軸部と車盤部の接合部には30Rの丸みがついているが、図では省略してある。

第9図 ターボロータモデル略図

となり、系は第5図(a)に相当するものとなる。軸長および荷重位置は

$$a=c=53.3(\text{cm}), \quad b=415(\text{cm}), \quad f=368.7(\text{cm})$$

$$d=207.5(\text{cm}), \quad h=46.3(\text{cm}), \quad l=521.6(\text{cm})$$

となる。

次に a スパン部の断面2次モーメントは、

$$I_1=15.3 \quad I_2=38.0$$

$$I_{1E} = \frac{\pi(18)^4}{64} = 5,153 \text{ cm}^4 \quad I_{2E} = \frac{\pi(19.5)^4}{64} = 7,098 \text{ cm}^4$$

であるから(18)式より

$$I_1 = \frac{(15.3+38)^3}{38(3 \times 15.3^2 + 3 \times 15.3 \times 38 + 38^2) + \frac{(15.3)^3}{7,098}} = 7,039 \text{ cm}^4$$

$$I_1^{-1} = 0.1421 \times 10^{-3}$$

となり、 I_1 は I_{2E} と大差ないことがわかる。軸は対称だから $I_1=I_3$ である。

次に b スパン部の等価断面2次モーメントを定める。(21)式より

$$d_e = 24[1 + 0.4080 \times 0.625 + 0.0451 \times (0.625)^2 - 0.100 \times (0.625)^3]$$

$$= 30.485 \text{ cm}$$

となり、等価軸は細い部分の直径より約25%太いことになる。 d_e がわかったから、

$$I_2 = \frac{40}{\frac{25}{\frac{\pi}{64}d^4} + \frac{15}{\frac{\pi}{64}d_e^4}} = \frac{40 \times 10^4}{1.628 + \frac{15}{4.2395}} = 2.1170 \times 10^4$$

$$\frac{1}{I_2} = 0.4724 \times 10^{-4}$$

となる。以上で影響係数が計算できる。結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= 0.36322 \times 10^{-4} \\ a_{22} &= 0.6715 \times 10^{-4} \\ a_{11} &= 0.26872 \times 10^{-4} \\ a_{13} &= 0.18433 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m_1 &= 1.0633 \\ m_2 &= 1.1480 \\ m_3 &= 1.0633 \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

これらの値と前記質量 $m_1=m_3$, m_2 の値を用い、(13)式を定めると、

$$x^3 - 1.3426 \times 10^{-4} x^2 + 0.16177 \times 10^{-8} x - 0.004426 \times 10^{-12} = 0$$

となる。これを解くと、値の大きい順に

$$x_1 = 1.21258 \times 10^{-4} \quad x_2 = 0.090228 \times 10^{-4}$$

$$x_3 = 0.040672 \times 10^{-4}$$

となるから、固有振動数は

$$\omega_1 = 0.9080 \times 10^2 \quad \omega_2 = 3.291 \times 10^2 \quad \omega_3 = 4.959 \times 10^2 \quad (\text{rad/s})$$

$$f_1 = 14.451 \quad f_2 = 52.38 \quad f_3 = 78.92 \quad (\text{c/s})$$

$$f_{1\text{rpm}} = 867.06 \quad f_{2\text{rpm}} = 3,143 \quad f_{3\text{rpm}} = 4,735 \text{ rpm}$$

となる。実験値は1, 2次それぞれ875, 3,100 rpmであるから、実験値は計算値よりそれぞれ、0.92%大および0.22%小である。すなわちこの程度の一致ならば本計算方式は実用性十分といえよう。3次の振動数については実験値がないので比較できないが、多分計算値は実測値より数10%低く、全然一致しないであろう。その理由は3次振動数を得るにはあまりに分割の数が少なすぎ、本報のような3自由度系としては無理であるからである。

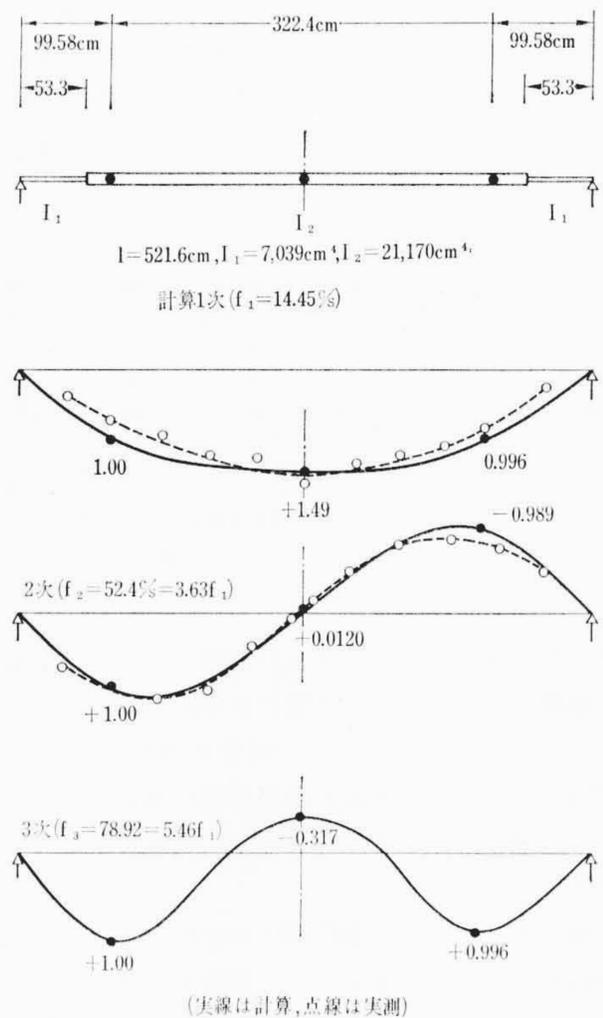
振動モードは(22)式の値と、

$$\omega_1^2 = \frac{1}{x_1} = 0.8244 \times 10^4 \quad \omega_2^2 = \frac{1}{x_2} = 11.083 \times 10^4$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{x_3} = 24.59 \times 10^4$$

の三つの値を(15)および(16)式に入れ

$$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\omega_1} = +1.492, \quad \left(\frac{x_3}{x_1} \right)_{\omega_1} = +0.9958 \dots\dots\dots 1 \text{ 次}$$



第10図 振動モード

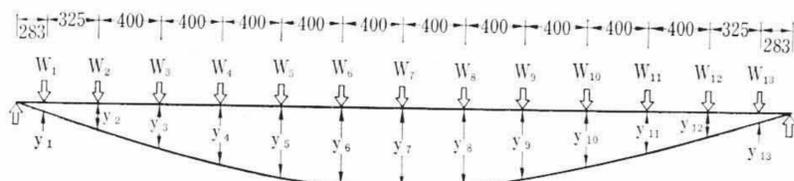
$$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\omega_2} = +0.01196, \quad \left(\frac{x_3}{x_1} \right)_{\omega_2} = -0.9892 \dots\dots\dots 2 \text{ 次}$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\omega_3} = -0.3167, \quad \left(\frac{x_3}{x_1} \right)_{\omega_3} = +0.9909 \dots\dots\dots 3 \text{ 次}$$

となる。図示すると第10図のようになる。2次のモードで (x_2/x_1) が0となるべきものがいくらかの値をもっているが、これは計算誤差である。ほぼ予期されるようなモードになっていることがわかる。

4. 検 討

3章の最後に記したように、本報の計算法で、削り出し車盤部を有するモデルロータの固有振動数を計算すると、1次の実験値は計算値より0.92%大、2次は0.22%小で比較的良好一致した。この程度の差異は計算上の仮定のあらかさや、実験測定上の誤差を考えれば、問題とするほどでないが、一応考察してみる。計算では、軸と車盤の接合部の丸みによる剛性上昇を考えてないから、この点からは計算値が高く出るべきである。また實際上ロータは有限の長さの軸受上で中立軸から、離れて支持されているからこの点からは実験値が高く出るべきである。しかし一方軸受弾性や油膜の影響を考えれば、実験値は低く出るべきである。また第1表に記したように、2次では3%程度実験値が高く出るべきである。以上のような正負各要素が結合し、実験値と計算値が比較的良好一致したとみなされる。なお実際のロータは両軸受ともオーバーハングを有している。これを考慮して計算すると計算値は、それを考えない場合より1次はいくらか低く、2次はいくらか高くなるであろう。今回の計算例では、オーバーハング部は省略してさしつかえない程度であったが、そうでない場合は、もちろんこれを考えた計算式で計算せねばならない。従来単純支持ロータの固有振動数計算は M/EI 線図を描くことによって行なわれた。この場合、一般に車盤部の剛性に実際の寸法から得られる値を直接用いているので、計算値は実際より数%高くなりがちである。本報の場合は第11図のようになり、値は892 rpmであるから、実測値より約2%高いことになり、本報の計算値より約3%高いことになる。本報では軸受のたわみはないとし



位 置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ
W (kg)	75.1	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	306.3	75.1	—
y (cm)	0.0259	0.053	0.0822	0.107	0.125	0.136	0.142	0.136	0.125	0.107	0.0822	0.053	0.0259	—
$y^2 \times 10^4$	6.71	28.1	67.57	114.5	156.3	185.0	201.6	185.0	156.3	114.5	67.57	28.1	6.71	—
Wy	1.95	16.3	25.2	32.8	38.3	41.7	43.5	41.7	38.3	32.8	25.2	16.3	1.95	356.0
$Wy \times 10^2$	5.04	86.1	207	351	479	567	618	567	479	351	207	86.1	5.04	4,008.3

$$\Sigma Wy = 356.0, \Sigma Wy^2 = 40.08, \omega = \sqrt{\frac{g \Sigma Wy}{\Sigma Wy^2}} = \sqrt{\frac{980 \times 356}{40.08}} = 93.3 \text{ rad/s}, f = 14.86 \text{ c/s}, n = 892 \text{ rpm}$$

中央軸部は直径 24 cm, 車盤部は直径 48.5 cm として計算, 削り出し部の R=30 は 0 とした。

第 11 図 モーメント図によるたわみと振動数の計算

たが、實際上軸受弾性を無視できない場合がしばしばある。このときは軸受（油膜を含めて）のバネ定数が与えられねばならない。影響係数は、ロータを剛体とし、左右軸受の単位荷重によるたわみ（2種の影響係数）の成分を本報の影響係数に適宜加えてやれば、まったく同様な計算法で、軸受弾性を考慮した場合のロータの固有振動数が計算できる。

本報では軸自重を三つの集中荷重におきかえて、3自由度系として固定振動数を求めた。荷重をさらに細分すれば、それだけ精度はよくなるだろう。しかし精度がよくなる以上に計算が煩雑になることはいうまでもない。表計算方式⁽²⁾を電子計算機で実行することが推奨される。3分割して2次の固有振動数が実際と比較的よく合ったのは、分割スパン（モードの1スパン、全長の半分）の有効質量が全質量の約1/3であることと、それがそのスパンの中央に位置せず、軸受端寄りにかたよっていたためである⁽³⁾。3次振動では分割スパンが全長の約1/3であるのに、質量は全質量の約1/6とならないで、その2倍の1/3であったから、本報の計算値は当然低過ぎる値になる。そこで近似的にはこの値を $\sqrt{2}$ 倍して補正する。計算例では4,735 rpmを $\sqrt{2}$ 倍し6,696 rpmとすればよいことになる。これは1次の7.7倍である。これが実験で現われると予期される3次の危険速度である。

はりの全長をさらに細分し、集中質量の個数を5個あるいは8個とすると、1~3次まで実測値との一致性が改善されるが、この計算は本報のような手計算では無理で、電子計算機を用いることが推奨される。

付記：実際の電機設計では、本報よりさらに精度をよくするため、系を細分割した多質点系とし、さらに軸受の弾性、ジャイロ効果を考慮し、Myklestad法による表計算方式⁽⁴⁾⁽⁵⁾を電子計算機により行なっている。

5. 結 言

変断面単純支持形車軸を質量のない段のついた3種の断面の軸と、三つの集中質量を有する系に置換し、この3自由度系の固有振動数（危険速度）を求めるための若干の計算式を作った、これら式の適用例として、削り出し車盤部を有する実物大モデルロータの車盤部の等価曲げこわさを求め、これより軸の固有振動数、振動モードなどを計算し、一部実例値と比較してみた。軸各部の曲げこわさの算定が適切ならば、1次および2次の振動数の計算値と実測値は数%以下の誤差で比較的良好一致することがわかった。

本研究に当たり、日立製作所日立工場電力設計部田附部長および西課長、実験研究にあたり協力された日立工場大形電気製造部石塚主任、交流設計課森主任、ご指導とごべんたつを賜った日立研究所北川部長に厚くお礼申しあげる。

参 考 文 献

- (1) W. T. Thomson (小堀訳): 機械振動入門 153 (昭37, 丸善)
- (2) 小堀: 日立評論 44, 288 (昭 37-2)
- (3) G. Sonnemam: Machin Design, 25, 123 (June, 1953)
- (4) 小堀, 大森, 石井: 日立評論 46, 931 (昭 39-6)
- (5) 小堀: 日立評論 44, 287 (昭 37-2)