

計 数 形 微 分 解 析 機

Digital Differential Analyzer (DDA)

山 岸 峻*
Takeshi Yamagishi

山 口 新 治*
Shinji Yamaguchi

吉 竹 昌 嗣**
Masatsugu Yoshitake

要 旨

計数形微分解析機 (DDA) は、各種の線形、非線形微分方程式の数値解析を主目的とした、デジタル形の計算機である。本文では演算方式について詳細に述べるとともに、このたび完成した4号機 HIDAC-8020 形、計数形微分解析機の構成、機能概要および使用法の代表例を述べてある。

1. 緒 言

計数形微分解析機 (以下 DDA と略す) は、特に、微分方程式の解を容易にしかも比較的高い精度で求めることができる計算機である。DDA は、1949 年、ノースロップ航空会社 (アメリカ) によって開発されて以来、多くの研究が成されてきたが、製品として開発されたものは 10 種に過ぎない。日立製作所は、東京大学宇宙航空研究所穂坂衛教授のご指導のもとに、1963 年に 1 号機を完成。以後、研究開発を続け、1965 年 5 月に 4 号機 (HIDAC-8020) を完成した。DDA の特長、原理、構成などはすでに発表されているが、本文では演算方式につきさらに詳細に説明し、HIDAC-8020 形 DDA の構成、機能概要を紹介するとともに、使い方の代表例を紹介する。

2. 演 算 方 式

2.1 積分器の動作と長方形積分方式

DDA の積分器は、 dx, dy, dz を量子化した最小単位のパルスで表わし、 dz が $y dx$ に比例する関係を満たすパルス回路である。図 1 にその原理を示す。

積分演算は、区分求積法により実行される。図 2 で表わされた曲線 $y=f(x)$ の積分 (I) は

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \dots\dots\dots (1)$$

により、近似的に求めることができ、その精度は Δx の値により定まる。

ここで積分が進行していく過程を考察すると、 i 番目における y の値 (y_i) は、

$$y_i = y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_{i-1} + \Delta y_i = y_{i-1} + \Delta y_i \dots (2)$$

で表わされる。これは図 1 の加算器①で行なわれる。

一方、 i 番目までの積分値 (I_i) は、

$$I_i = y_0 \Delta x_0 + y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \dots + y_{i-1} \Delta x_{i-1} + y_i \Delta x_i \dots\dots\dots (3)$$

で表わされる。これは図 1 の乗算器と加算器②で行なわれる。

ここで変数 x の量子化した最小単位を h_1 とし、 Δx を次のように定義すると、

- 変数 x が h_1 だけ増加したとき $(\Delta x)_i = +1$
- 変数 x が h_1 だけ減少したとき $(\Delta x)_i = -1$
- 変数 x の変化が h_1 以下のとき $(\Delta x)_i = 0$

(3) 式の計算は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta x = +1 \text{ のとき} & I_i = I_{i-1} + y_i \\ \Delta x = -1 \text{ のとき} & I_i = I_{i-1} - y_i \\ \Delta x = 0 \text{ のとき} & I_i = I_{i-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となり、乗算器は省略でき、 Δx は演算を制御する制御パルスとなる。

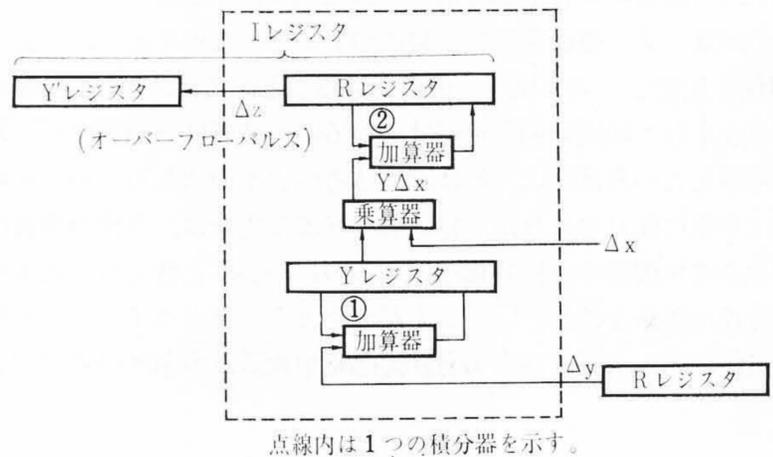


図 1 計数形積分器の原理

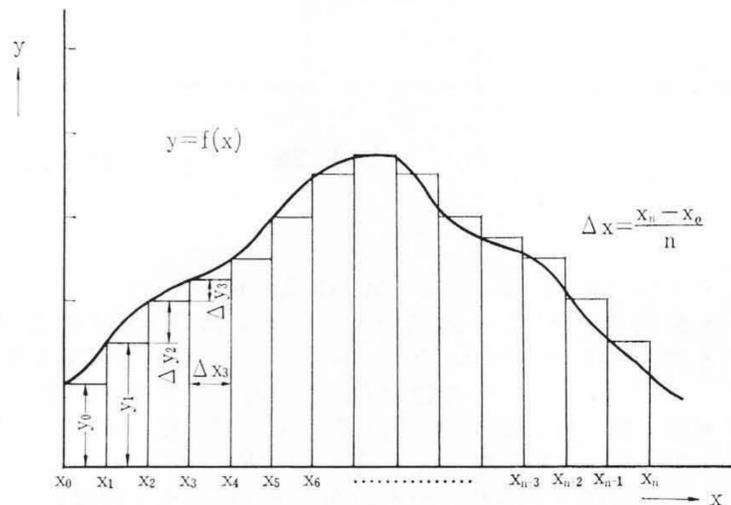


図 2 区分求積の例

いま、 I レジスタを、 Y レジスタと同容量で下位を受持つ R レジスタと、上位を受持つ Y' レジスタに 2 分すると、 R レジスタから Y' レジスタへのけた上りは、 Y レジスタに貯えることができる最大値と h_1 との積となり、実際の使用上は、このけた上りパルスをほかの積分器の dy 入力とすればよい。したがって、 Y' レジスタは不要となり、図 1 の点線で囲んだもので一つの積分器が構成される。

R レジスタよりのけた上げパルスを Δz と称し、これがほかの積分器の Δy 入力となる場合、加算器①で Y レジスタに加算される。

したがって、(2) 式は、

$$y_i = y_0 + h_2 \sum_{s=1}^i (\Delta z)_s \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 h_2 : 変数 z の量子化した最小単位で表わされる。 y_i の範囲を $-1 \leq y_i < +1$ とし、 R レジスタで取り扱われる数値範囲を $0 \leq R_i < +1$ とすると、 Δz は次のように定義される。

- $R_{i-1} + y_i \Delta x_i \geq 1$ ならば $\Delta z_i = +1$
- $1 > R_{i-1} + y_i \Delta x_i \geq 0$ ならば $\Delta z_i = 0$
- $0 > R_{i-1} + y_i \Delta x_i \geq -1$ ならば $\Delta z_i = -1$

* 日立製作所神奈川工場

** 日立電子エンジニアリング

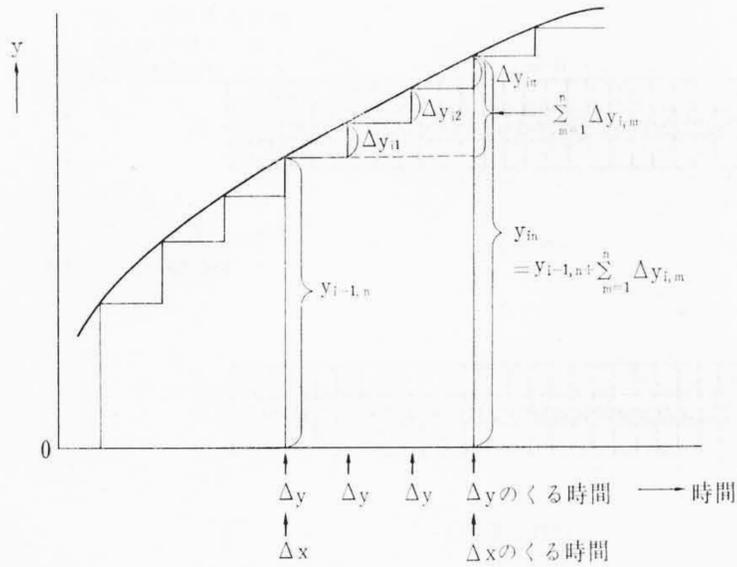


図3 台形積分の原理

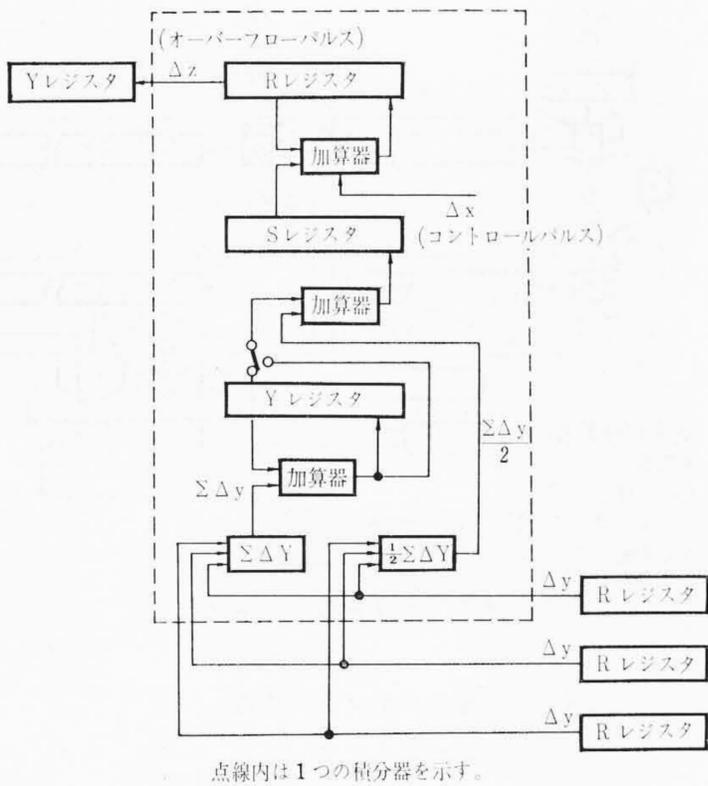


図4 台形積分器

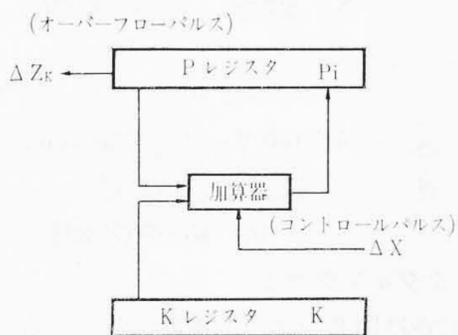


図5 定数掛算器

したがって、 i 番目のサイクル終了後の R の値 (R_i) は、

$$R_i = R_{i-1} + y_i \Delta x_i - \Delta z_i \dots\dots\dots (6)$$
 と表わされる。実際の計算では、 h_1, h_2 は非常に小さい値にとるので、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ も微小変化を表わし、(2)式は、

$$y = \int dy \dots\dots\dots (7)$$

Δz パルスは、

$$dz = y dx \dots\dots\dots (8)$$
 と考えることができる。

以上は、長方形の小面積 $y_i \cdot \Delta x_i$ を集計しているので長方形積分方式という。このほか、図3の斜線を引いた台形面積の集計を行なう台形積分方式があり、長方形積分方式より積分精度がよい。概略説明すると、台形積分方式はさらに内そう法と外そう法とに

		dxi		
		+	0	-
Yi	+	+	0	-
	0	0	0	0
	-	-	0	+

表1 デンジョン、サーボの Δz 発生

分かれ、次の各式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 y_{in} &= y_{i-1,n} + \sum_{m=1}^n \Delta y_{i,m} \\
 R_{in} &= R_{i-1,n} + S_{in} \cdot \Delta x_{in} - \Delta z_{in} \\
 \text{内そう法 } S_{in} &= y_{i-1,n} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i,n-1} \Delta y_{i,m} + \frac{1}{2} \Delta y_{in} \\
 \text{外そう法 } S_{in} &= y_{i-1,n} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i,n-1} \Delta y_{i,m} + \frac{3}{2} \Delta y_{in}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Delta y_{i,m}$$

は、 $\Delta x=0$ のサイクルより次の $\Delta x=1$ のサイクルまでの Δy 入力のを示す。これは一般に Δx と Δy 入力の時間的比は必ずしも 1:1 には対応せず、 Δx 入力がないときも Δy 入力は存在することを意味する。台形積分方式の積分器は、図4のように構成され、 R, S, Y と3個のレジスタを必要とする。

内そう法と外そう法は、プログラムにより適時切り換えて使用するもので、一般に、DDA (直列形の場合) は両方式が使用できるよう考慮されている。

3. 定数掛算器

定数掛算器は長方形積分器で、 Y レジスタの内容を変化させる機構のない積分器である。図5にその原理を示す。けた上り dz_k は

$$dz_k = K dx \dots\dots\dots (10)$$

第 i 番目のサイクル終了時における P レジスタの内容は

$$P_i = P_{i-1} + K \Delta x_i - \Delta z_{ki} \dots\dots\dots (11)$$

で表わされる。

4. デンジョンおよびサーボユニット

積分器の動作を変更することにより、デンジョン動作を行なわせることができる。デンジョンとは、 Δz 出力が先に述べた条件でなく、 $Y < 0$ か、 $Y > R$ であるとき、表1のような符号のパルスを発生する動作である。 R レジスタの内容は変化しない。

この時、 R レジスタの内容を0とすると、積分器はサーボ動作を行なう。すなわち表1に従い、 $Y=0$ になるまで Δz を発生する。デンジョン、サーボ動作の具体例は後述するが、これにより非線形関数の発生、絶対値、不感帯、比較、ヒステリシス、バックラッシュなどの計算、あるいは制御に使用できる。

5. DDA の回路構成

DDA は各積分器ごとに独立して同時に計算を行なう並列方式と、各積分器に対する計算を時分割で行なう直列方式とがある。前者



図6 HIDAC-8020

は、演算速度は速いが、素子の数が多くなり、装置の価格も高くなる。後者は、演算速度は遅いが、素子の数は少なく、安価である。並列方式と直列方式のもう一つの異なる点は、積分器の相互接続を行なうための信号の伝達方式にある。並列方式は出力信号が同時に発生するので、出力信号そのものをほかの積分器入力にすればよいが、直列方式の場合は、出力信号は時間的に分割されて発生するから、ほかの積分器入力とする場合、その積分器の時間を指定する必要があるので、並列方式に比較して複雑になる。

記憶装置としては、並列方式、直列方式ともその特長を生かし、並列方式には磁気ひずみ遅延線、電磁遅延線、磁心記憶装置が、直列方式には磁気ドラム、磁気ひずみ遅延線などが使用される。

積分器の結合方式には、大別して二つあり、一つはパッチボードに各積分器の入出力端子を出し、パッチコードにより接続する方法、ほかの方法は記憶装置にあらかじめ接続法を記憶させておき、内部で自動的に積分器を結合する方法である。前者は直視的でプログラムのチェックが比較的容易である。後者は主として直列方式の場合採用され、出力信号の接続先を記憶装置に時間列として記憶させるので、プログラムが多少めんどろであるが、汎用デジタル計算機とハイブリッドにして使用した場合、汎用計算機でコンパイルすることも可能であるので、実際、使用面では不便ではない。また、計算機の指令によりプログラムの変更が容易にできるので、応用範囲が倍加される。

6. HIDAC-8020 の概要

以上述べた種々の方式の長短所を勘案し、下記に示す方式により作成した。

6.1 性能および仕様

制御方式	同期直列方式、クロック周波数 1 Mc
取扱数値	純2進、固定小数点、負数は2の補数表示
記憶装置	磁気ひずみ遅延線
演算方式	長方形積分方式(台形積分方式可能)
積分器数	30個
定数掛算器数	30個
容量	積分器 2進19ビット 定数掛算器 2進21ビット
レジスタの構成	図7参照
プログラム方式	パッチボード(プリパッチ)
繰返し時間	720 μs
入力の方法	操作パネルのボタン

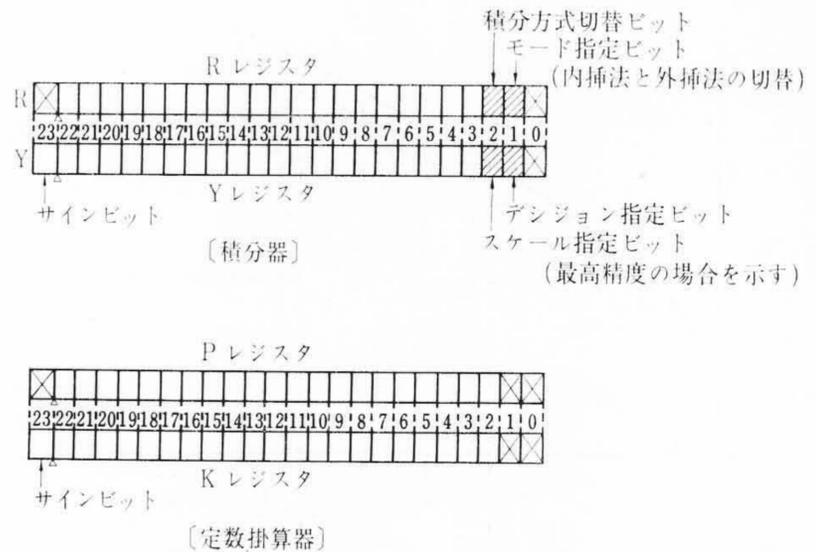


図7 レジスタの構成

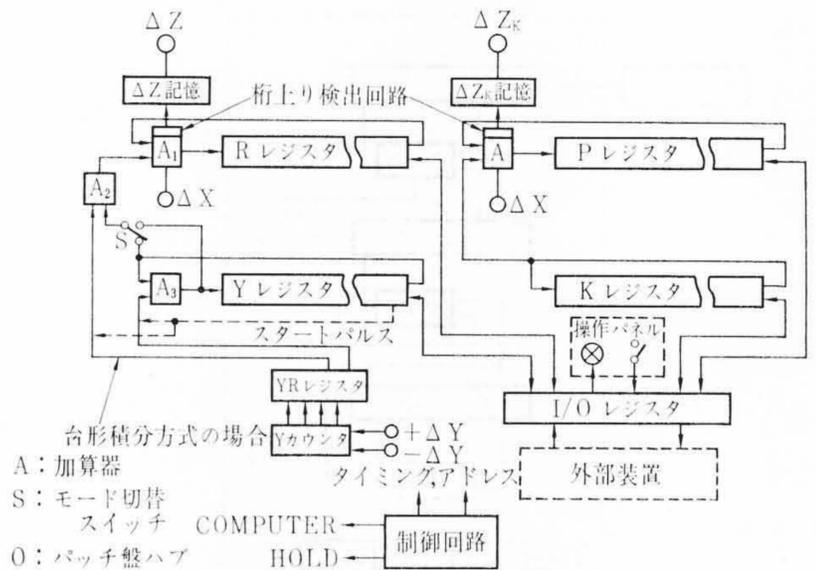


図8 演算装置ブロック図

汎用デジタル計算機	
テーブリーダー	
キーボード	
出力の方法	操作パネルのランプ表示 XY記録器(2台接続可能) 汎用デジタル計算機 タイプライタ
入力電源	AC 100 V ± 10% 50~60 c/s 単相 5A
使用条件	外囲温度 15~25°C 湿度 40~80% RH

6.2 ブロックダイアグラム

本機の演算回路は図8のように構成されている。積分器の動作だけを簡単に説明すると、RおよびYレジスタには720 μsの磁気ひずみ遅延線を使用し、30個の積分器を収容しているの、1積分器時間は24 μsとなる。

YカウンタはΔyパルスを計数する4ビットの可逆カウンタである。したがって、1積分器時間のΔy入力は7個まで計数可能である。YRレジスタはYカウンタの内容をYレジスタに加算するため、Yカウンタの内容を一時記憶しておくレジスタである。スタートパルスはYRレジスタをYレジスタのどのけたから加算するかを定めるもので、Rレジスタのスケール指定ビットにより制御される。スイッチSは内そう法と外そう法を切り換えるもので、Rレジスタのモード指定ビットにより制御される。けた上り検出回路は、Δz信号の発生論理を切り換えている。本機は直列方式であるため、Δz信号は時間列で発生するので、Δz記憶装置により1繰返し時間記憶しておき、パッチボードのゲートによりほかの積分器のΔX、ΔY入力として分配される。I/Oレジスタは本機の各レジスタと外部装置間

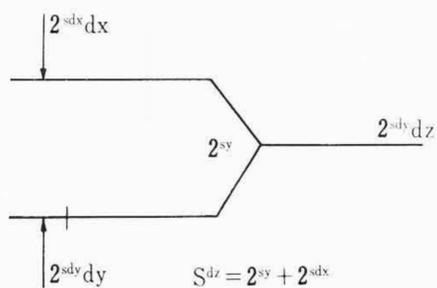


図9 スケーリングを含む積分器の記号

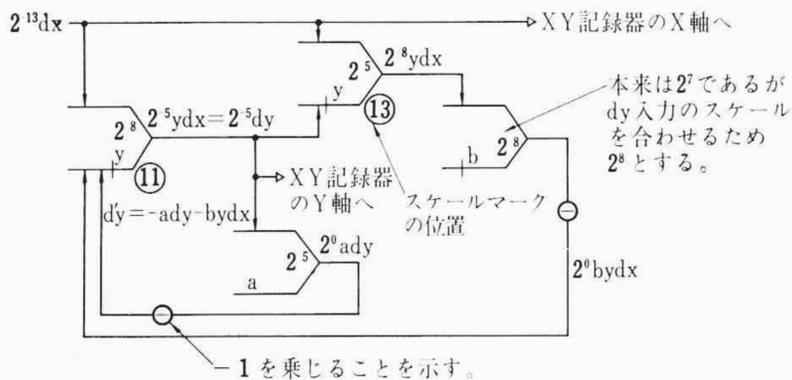


図10 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$ のプログラム

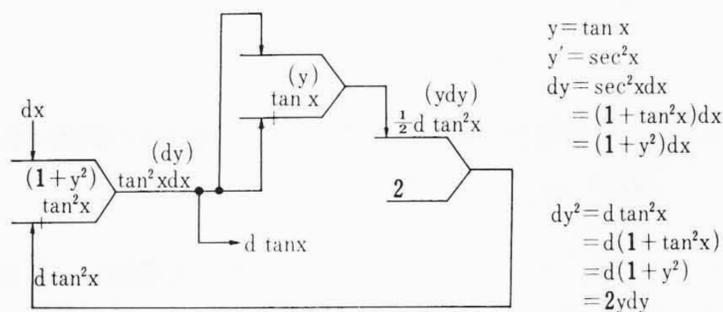


図11 $\tan x$ の発生

で、データの授受を行なうときのバッファレジスタである。入出力装置としては、前項で列挙したものが可能である。ただし、XY記録器はパッチ盤をとおして接続される。XY記録器としては、本機のようなパルス出力を記録するに最適なデジタル形記録器が使用される。

7. プログラム

7.1 微分方程式

DDAのプログラムは、マッピングと呼ばれる与えられた微分方程式の問題に応じ、積分器および定数掛算器の結合を定めることと、スケーリングと呼ばれる演算の精度と、速度を定める数値のウェイト(スケールファクタ)を決定することである。

マッピングは解くべき微分方程式をまず差分方程式に変形し、さらに最高次の項を左辺に、ほかの項を右辺になるように変形し、積分器および定数掛算器を原則としてループになるように結合する。

スケーリングはDDA内で取り扱われる数値と実際の数値との関係を定めることで、本質的にはアナログ計算機の電圧スケーリングと類似している。スケーリングはまず演算の進行中それぞれの変数の取り扱う数値の最大値を予測し、Yレジスタのオーバフローが発生しないように微分方程式の変数を変換する。この変数のウェイトの選定が過小であると、Yレジスタのオーバフローが起り、また過大であると有効けたの上位が使用されず演算速度が遅くなる。具体的には、変数yの最大値を|y_{max}|で示すと

$$\frac{|y_{max}|}{2^{Sy}} < 1$$

を満足する最小の2^{Sy}を定めればよい。

次に独立変数の大きさを決定する。独立変数の大きさは、求めた

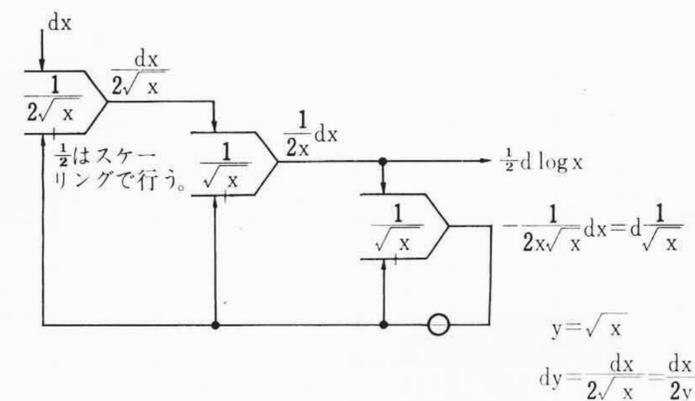


図12 $\log x$ の発生

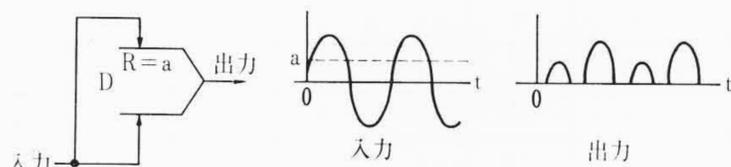


図13 絶対値

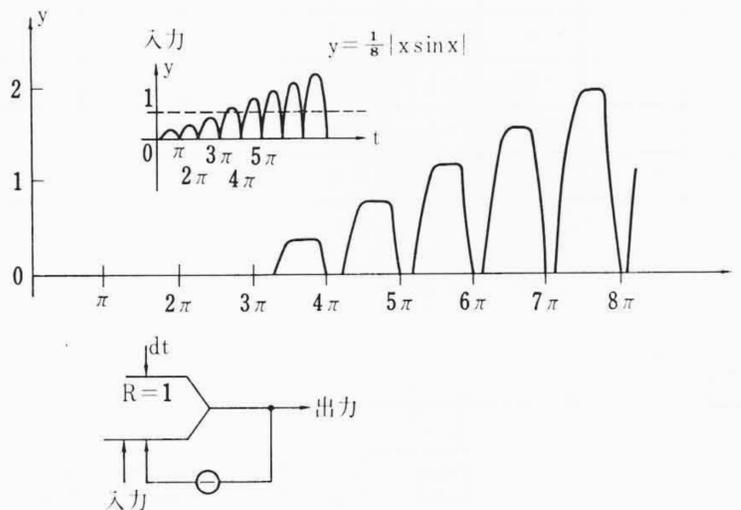


図14 バックラッシュ

い精度と演算速度により決定される。この係数のべきをS_xで示すと、DDAの演算式は、dz=ydxで示されるので、dzのべき(Sdz)は

$$Sdz = Sy + Sdx$$

で示される。これを図9のように図示する。

ここでYレジスタのスケールSyとdyのスケールSdyとは無関係であるので、このスケール関係を一致させるため、換言すれば、dyをYレジスタに加える位置を決定する必要がある。この位置を示すのがスケールマークで、本機の場合符号ビットから数えて

$$Sy - Sdy + 3$$

ビット目にはいれればよい。たとえば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \rightarrow d'y + ady + bydy = 0 \\ -200 \leq \frac{dy}{dx} \leq +200 \quad y'(0) = 200 \quad 0 \leq a \leq 30 \\ -30 \leq y \leq +30 \quad y(0) = 0 \quad 0 \leq b \leq 100 \\ dx \text{の精度} = 2^{-13} \end{array} \right.$$

についてマッピングおよびスケーリングを行なうと図10のようになる。

dyとdx出力をXY記録器に接続すれば、解を描かせることができる。このとき、XY記録器に対する時間および係数に関するスケールが必要であるが本文では割愛する。

7.2 関数の発生

特定の微分方程式を解くことにより、それにより定められた関数を発生することができる。図11にtan x, 図12にlog xを示す。

7.3 デジジョンおよびサーボ

デジジョン、サーボはDDAにとっては非常に有用なもので、ア

表 2 誤差の具体例

積分方式	Rレジスタ 関数	長 方 形 法			台 形 法			
		R=0 内挿法 ^{*1}	R=0 外挿法 ^{*1}	R=1/2 外挿法 ^{*1}	R=0 内挿法	R=0 外挿法	R=0 12 外 ^{*2} 14 内	R=1/2 12 外 ^{*2} 14 内
π/2	sin x	+1	+1	0	+1	0	+1	0
	cos x	+1	+1	0	+1	+1	+1	0
π	sin x	+1	+1	0	+1	0	+1	0
	cos x	+2	+1	0	+1	0	+1	0
2π	sin x	0	-1	0	0	0	-1	0
	cos x	+4	+1	0	+2	-1	+1	0
4π	sin x	0	-1	0	0	-3	0	0
	cos x	+7	+1	0	+4	-3	+1	0
8π	sin x	0	0	0	0	0	-1	0
	cos x	+13	+1	0	+7	-6	+1	0
16π	sin x	0	0	0	0	0	0	0
	cos x	+26	0	0	+13	-12	+1	0
32π	sin x	0	0	+1	0	0	-1	+1
	cos x	+52	+1	0	+26	-24	0	0
64π	sin x	-1	-1	+1	0	0	-1	+1
	cos x	+106	0	0	+52	-49	+1	0

※1 矩形法の場合、内挿、外挿はないが、台形法の時の名前を便宜上、とることにする。

※2 12: 外挿法
14: 内挿法の意

誤差 e
単位は $\times 2^{-10}$

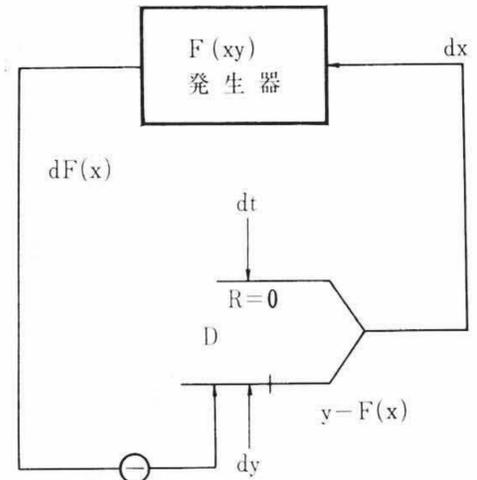


図 15 逆関数の計算

テイラー展開は次のとおりである。

$$f(x+dx) = f(x) + dx f'(x) + \frac{(dx)^2}{2} f''(x) + \frac{(dx)^3}{4} f'''(x) + \dots$$

いま、長方形積分の場合、上式の右辺の第 3 項以下を省略しているのだから、これによって生ずる誤差は 1 ステップにつき約

$$\frac{(dx)^2}{2} f''(x)$$

である。また台形積分の場合は、1 ステップ当たりの誤差は約

$$\frac{(dx)^3}{4} f'''(x)$$

である。これが、ステップ数が増すにしたがって増加し、最後には Y レジスタに生ずる。一般に丸めの誤差に比べて、近似積分による誤差の増加の速度は速い。しかし、丸めの誤差は初めのステップで、ただちに Y レジスタの最小のビット 1/2 だけの誤差を生ずるのに対し、近似積分による誤差はその影響が表われるまでに時間がかかる。実際には、丸めの誤差と近似積分による誤差は独立しているものではなく相互に影響し合う。

8.2 誤差の具体例

DDA の誤差が具体的にどの程度なのか、sin x, cos x を対象として調べてみる。その際、積分方法 (長方形法, 台形法), モード (内そう法, 外そう法), R レジスタに 1/2 を入れるときと入れないときの各組合せについての誤差を示す (図 16, 表 2 参照)。

9. 結 言

DDA は微分方程式の解を容易に、高精度に求めるために開発されたが、その特長を有効に活用した使用方法が開発されつつある。一つは DDA の原理を応用したナビゲーションコントロール、サーボ機構のデジタル化などであり、すでに実用化されている。

ほかの一つはアナログ計算機および汎用デジタル計算機とのハイブリッド化である。アナログ計算機により DDA の近似積分誤差の補正を行ない、より高精度の演算を行なう計算法、汎用デジタル計算機とハイブリッドによる図形処理、手書き文字の認識などの開発が進行している。

本稿で紹介した HIDAC-8020 は、後者の目的に使用できるよう設計されている。今後、この種の研究開発に活用されることを期待している。

参 考 文 献

- (1) 穂坂, 松原, 吉竹: 日立評論 45, 1655 (昭 38-10)
- (2) 安藤: 計数形微分解析機の研究
- (3) 穂坂, 遠藤: 情報処理 第 6 巻第 3 号
- (4) Max, Palevsky: Computer Handbook 1962 年
- (5) Edward, L. Braun: Digital Computer Design 1963 年
- (6) 穂坂, 村田: 計測と制御 第 4 巻第 7 号

8. DDA の 誤 差

DDA の精度をあげるために各種の公式を用いたり、積分間隔を必要なだけ小さくすることは可能である。ただ機械の単純化のうえから、ある程度の近似積分による誤差や、丸めの誤差を生ずる。しかし変数の最小単位をさらに小さくして、初めの解とどのくらい差があるかを比較することにより、必要なだけの精度は、積分器のビット数で制限を受けない限り可能となる。

8.1 丸めの誤差と近似積分による誤差

丸めの誤差は Y レジスタの内容に限度があるので、それを丸めたことによって生ずる誤差である。本 DDA では R レジスタに負はないため、R レジスタの初期値に 0.5 をセットし、それを原点とすると、R レジスタが負の側に変化する場合も正の側に変化する場合も 0.5 だけ変化するとオーバーフローする。これによる丸めの誤差は

$$|e| < 0.5$$

となる。

近似積分による誤差はテイラー展開の高次の項を省略したことによって生ずる誤差である。

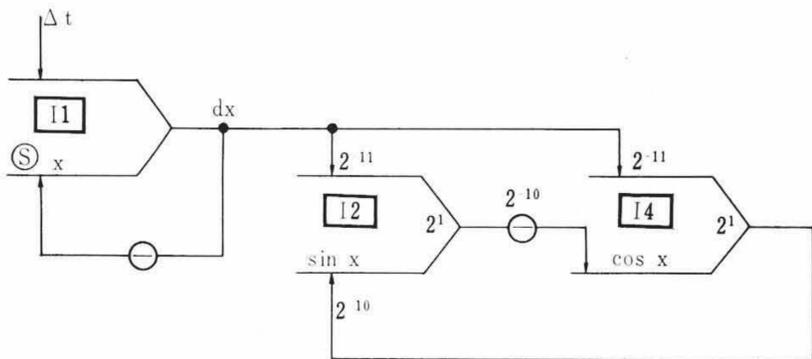


図 16 誤差の具体例

ナログ計算機の非線形要素に相当する働きをする。図 13 は絶対値, 図 14 はバックラッシュの例を示す。また図 15 は逆関数の計算で、 $F(x, y) = 0$ で示された関係で y が与えられたとき、サーボを使用すれば x を求めることができる。そのほかサーボ動作は、加算、除算の代数演算、フィードバック回路の誤差検出、高利得の増幅器の役割などを行なわせることができる。