

# 円すいころ軸受の外輪のだ円変形が荷重分布に及ぼす影響

## Effects of Elliptical Deformation of Outer Race on the Load Distribution of Taper Roller Bearings

高井 昭\*  
Akira Takai

### 要 旨

円すいころ軸受の外輪がだ円に変形した場合の軸受寿命とだ円度との関係を定量化するため、外輪は剛性の高いハウジングに密着していると仮定し、ころによる集中荷重を外輪転走面上の分布荷重におきかえ、だ円度ところの荷重の関係を示す式を導き出した。またこの式を用い、ラジアル荷重とスラスト荷重の比をパラメータとし、内外輪が真円のとときの最大接触変形量とだ円の長短径差の比であらわしただ円度ところの最大荷重の関係を図示した。

### 1. 緒 言

一般にころがり軸受の外輪かん入部はできるだけ真円になるよう加工されるが、鉄道車両の駆動装置は軸受を介して車軸に装架されるため、歯車箱を外輪かん入部で二つ割りにすることが多く、一体のものに穴くりしてかん入した場合にくらべて加工上あるいは組立上外輪の真円度が保ちにくい。このため外輪剛性や歯車箱の加工工作、組立などにいろいろの考慮が払われている。軸受の早期はく離したものに外輪の変形が見られ、しかもだ円短軸が荷重方向に合致していることが報じられている<sup>(1)</sup>。遊び歯車について外輪変形による転動体の荷重分担をみつかった例<sup>(2)</sup>もあるが、円すいころ軸受では当然スラスト荷重がかかりこの影響も含めて転走面の荷重分布を論じたものが見あたらない。本報では外輪がだ円になっている場合について、ころの荷重および剛性をあらわす式を導き出し、これによって軸受の寿命とだ円度の関係を数量化しようとした。

本報においてはハウジングは軸受荷重によっては変形せず、また外輪は全周にわたってかん入部に密着しているという仮定をおいた。これは変形が接触部の弾性変形のみであることと同意義である。

### 2. ころ荷重の算出

円すいころ軸受の内外輪転走面にはころを通して集中荷重がかかるが、本報では図1に示すように、集中荷重を転走面上の分布荷重  $p$  でおきかえる。すなわち  $n$  個のころを有する軸受では  $p$  と 1 個のころの荷重  $Q$  の間に (1) 式の関係をもたせる。

$$Q = \int_{-\pi/n}^{\pi/n} pR \cos \phi d\phi \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $R$  : 転走面半径

$Q$  による接触弾性変形量  $\bar{\delta}_r$  は次式<sup>(3)</sup>で示される。

$$\bar{\delta}_r = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E l_r} Q \left( 1.8864 + \log \frac{l_r}{2b} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$b = 1.52 \sqrt{\frac{Q}{E l_r} \frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $b$  : 接触幅の 1/2,

$l_r$  : ころの長さ

$r_1$  : 内輪または外輪半径

$r_2$  : ころの半径

$E$  : 材料の縦弾性係数

$\nu$  : ポアソン比

$Q$  による内輪中心の近より量はほぼ  $4\bar{\delta}_r$  である。いま  $p$  を余弦分布とし、ころ中心における分布荷重を  $p_0$  とすれば

$$Q = (\pi/n + 1/2 \sin 2\pi/n) p_0 R \dots\dots\dots (4)$$

\* 日立製作所笠戸工場

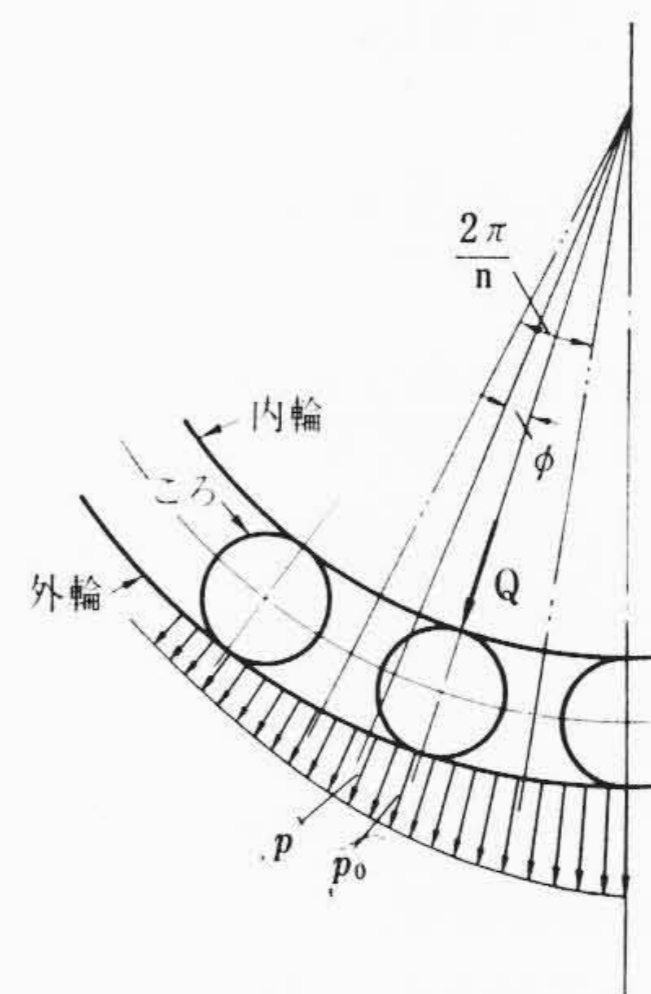


図1 ころの荷重

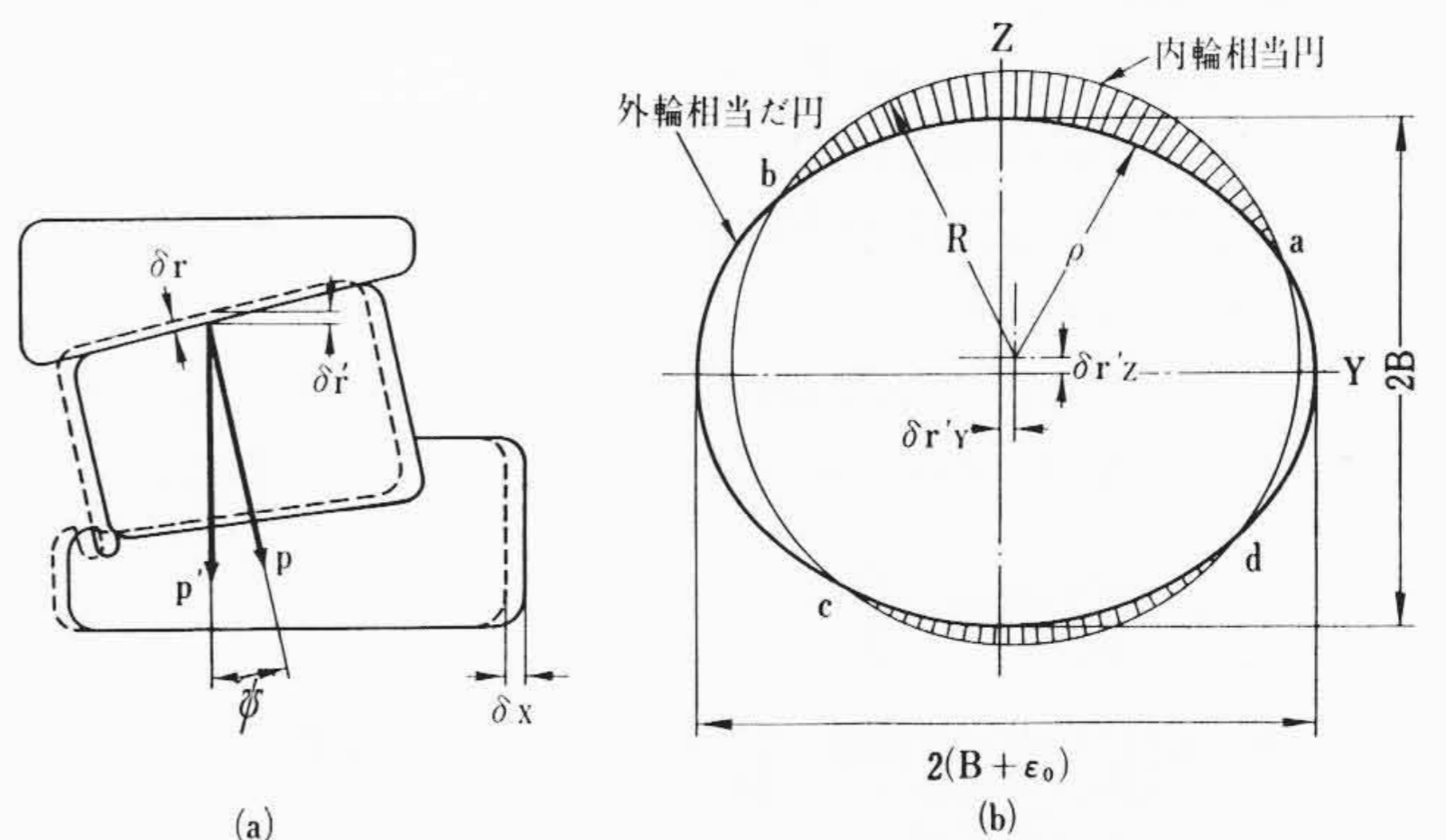


図2 (a) (b) 内外輪およびころの接触状態の模型

となる。分布荷重  $p$  と弾性変形量  $\delta_r$  の関係を

$$p = K \delta_r \dots\dots\dots (5)$$

と仮定し

$$\delta_r (p = p_0) = 4 \bar{\delta}_r$$

とおけば  $K$  は次式で示される。

$$K = \frac{\pi E l_r}{4(2\pi/n + \sin 2\pi/n)(1-\nu^2)(1.8864 + \log l_r/2b)} \dots\dots\dots (6)$$

$p$  はころにこじれがなければ両端の応力集中部を除けば、ころの長さ方向に一様に分布する。いま便宜上ころの中央を考え、以下この断面における荷重でころの長さ方向の荷重を代表させる。この部分の分布荷重の方向は図2(a)に示されるように、母線が軸と  $\pi/2 - \psi$  なる角度をかまえる円すい上の母線方向に合致するから、 $p$  のかわりに軸直角断面に  $p'$  なる分布荷重を与えると

$$\left. \begin{aligned} \delta_r' &= \delta \sec \Psi \\ p &= K \delta_r' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。いま外輪転走面をだ円とすれば、着力点を通る軸直角断面は図2(b)のように書くことができる。

図2(b)において断面に垂直な軸をX、だ円の長軸方向をY、短軸方向をZ軸とする。短径を2Bとし、長短径の差を2ε<sub>0</sub>とすれば、だ円の式は

$$\frac{Y^2}{(B+\epsilon_0)^2} + \frac{Z^2}{B^2} = 1 \dots\dots\dots (8)$$

これに内輪をそう入して荷重を加えれば、内外輪中心は弾性変形量だけ相対的に移動する。いま内輪を真円と仮定し、ころの半径を無限小とみなした円を考える。最初内外輪中心を一致させ、しかる後に荷重によって生じた中心移動のY, Z成分をそれぞれδ<sub>r'y</sub>, δ<sub>r'z</sub>とすれば、図2(b)のように外輪相当だ円と内輪相当円で囲まれる図形は弾性変形量すなわちδ<sub>r'</sub>の分布をあらわすことになる。YZ座標をδ<sub>r'y</sub>, δ<sub>r'z</sub>だけ原点を移動し、さらに新座標を極座標(ρ, θ)に変換すれば(8)式は

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \theta + 2 \delta_{r'y} \rho \cos \theta + \delta_{r'y}^2}{(B+\epsilon_0)^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta + 2 \rho \delta_{r'z} \sin \theta + \delta_{r'z}^2}{B^2} = 1 \dots\dots\dots (9)$$

となる。ε<sub>0</sub>, δ<sub>r'y</sub>, δ<sub>r'z</sub>はB, ρにくらべてきわめて小さいから、2乗以上の項を省略すれば動径ρは(10)式のようになる。

$$\rho = B - \delta_{r'y} \cos \theta - \delta_{r'z} \sin \theta + \epsilon_0 \cos^2 \theta \dots\dots\dots (10)$$

円すいころ軸受にスラスト荷重が作用すれば、図2(a)に点線で示したように接触面を変形させ、ころおよび内輪が軸方向に移動する。このときの内輪のX軸方向の変位をδ<sub>x</sub>として表わせば、外輪相当だ円に半径B+δ<sub>x</sub> tan Ψの円をおしこむことになるから、弾性変形量は(11)式のようにあらわされる。

$$\delta_r' = R - \rho = \delta_x \tan \Psi + \delta_{r'y} \cos \theta + \delta_{r'z} \sin \theta - \epsilon_0 \cos^2 \theta \dots\dots\dots (11)$$

また(5)(7)(11)式から分布荷重pは(12)式で示される。

$$p = (\delta_x \tan \Psi + \delta_{r'y} \cos \theta + \delta_{r'z} \sin \theta - \epsilon_0 \cos^2 \theta) K \cos \Psi \dots\dots\dots (12)$$

軸受荷重のX, Y, Z成分をそれぞれP<sub>x</sub>, P<sub>y</sub>, P<sub>z</sub>とすれば

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} p R d\theta + \int_{\theta_3}^{\theta_4} p R d\theta \right) (\sin \Psi \pm \mu \cos \Psi) \\ P_y &= \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} p R \cos \theta d\theta + \int_{\theta_3}^{\theta_4} p R \cos \theta d\theta \right) (\cos \Psi \mp \mu \sin \Psi) \\ P_z &= \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} p R \sin \theta d\theta + \int_{\theta_3}^{\theta_4} p R \sin \theta d\theta \right) (\cos \Psi \mp \mu \sin \Psi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、μ: ころと転走面間の摩擦係数  
となり、(13)式に(12)式を代入して積分すれば

$$P_x = [\delta_x \tan \Psi (\theta_2 - \theta_1 + \theta_4 - \theta_3) + \delta_{r'y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1 + \sin \theta_4 - \sin \theta_3) - \delta_{r'z} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1 + \cos \theta_4 - \cos \theta_3) - \epsilon_0 / 2 \{ 1/2 (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_4 - \sin 2\theta_3) + \theta_2 - \theta_1 + \theta_4 - \theta_3 \}] KR \cos \Psi (\sin \Psi \pm \mu \cos \Psi) \dots\dots\dots (14)$$

$$P_y = [\delta_x \tan \Psi (\sin \theta_2 - \sin \theta_1 + \sin \theta_4 - \sin \theta_3) + \delta_{r'y} / 2 \{ 1/2 (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_4 - \sin 2\theta_3) + \theta_2 - \theta_1 + \theta_4 - \theta_3 \} + \delta_{r'z} / 2 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_4 - \sin^2 \theta_3) - \epsilon_0 / 3 \{ \sin \theta_2 (2 + \cos^2 \theta_2) - \sin \theta_1 (2 + \cos^2 \theta_1) + \sin \theta_4 (2 + \cos^2 \theta_4) - \sin \theta_3 (2 + \cos^2 \theta_3) \}] KR \cos \Psi (\cos \Psi \mp \mu \sin \Psi) \dots\dots\dots (15)$$

$$P_z = [-\delta_x \tan \Psi (\cos \theta_2 - \cos \theta_1 + \cos \theta_4 - \cos \theta_3) \dots\dots\dots (16)$$

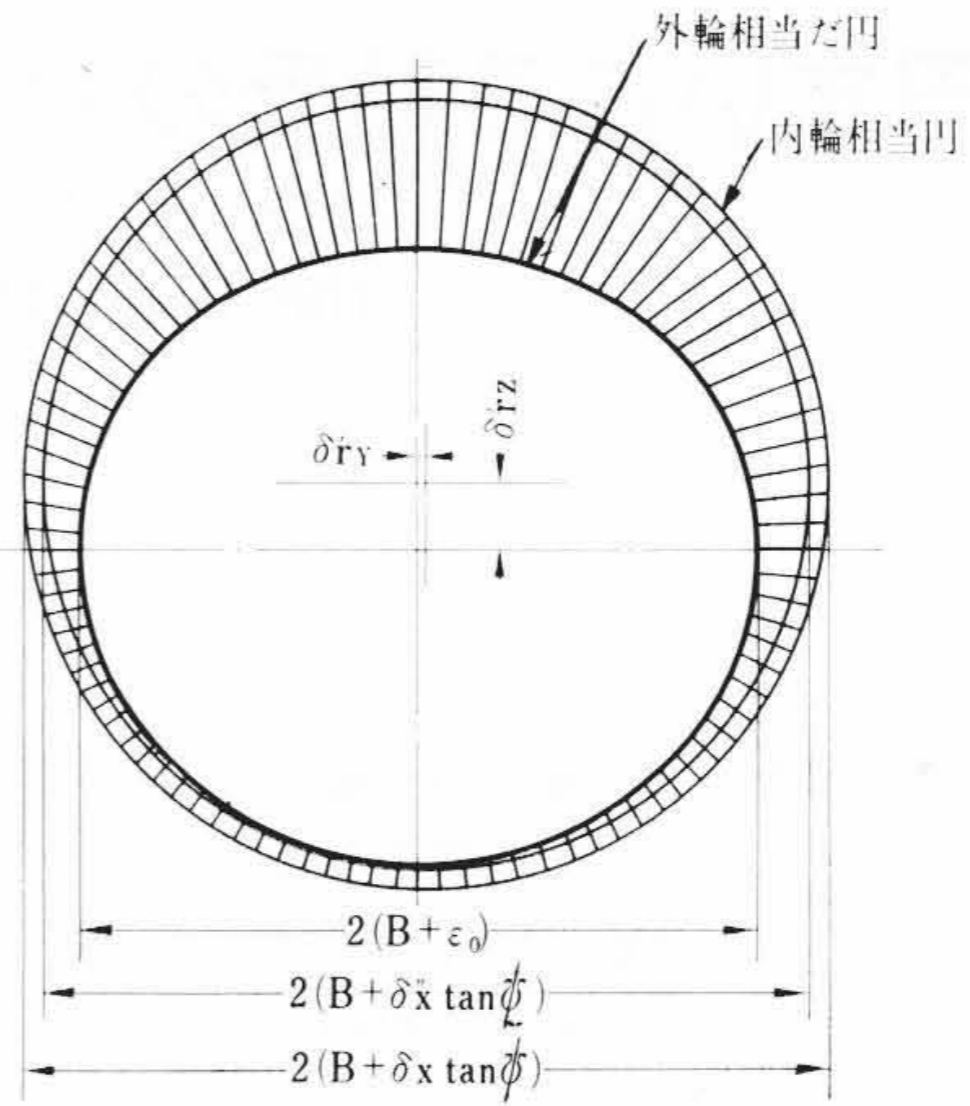


図3 ころの荷重分布模型

$$\begin{aligned} & + \delta_{r'y} / 2 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_4 - \sin^2 \theta_3) \\ & + \delta_{r'z} / 2 \{ \theta_2 - \theta_1 + \theta_4 - \theta_3 - 1/2 (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1 \\ & + \sin 2\theta_4 - \sin 2\theta_3) \} + \epsilon_0 / 3 (\cos^3 \theta_2 - \cos^3 \theta_1 + \cos^3 \theta_4 \\ & - \cos^3 \theta_3) ] KR \cos \Psi (\cos \Psi \mp \mu \sin \Psi) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

θ<sub>1</sub>, θ<sub>2</sub>, θ<sub>3</sub>, θ<sub>4</sub>は荷重の分布範囲を示し、図2(b)においてρ=Rとなる点a, b, c, dのθ座標である。したがっておのおののθは次式を満足する。

$$\delta_x \tan \Psi + \delta_{r'y} \cos \theta_i + \delta_{r'z} \sin \theta_i - \epsilon_0 \cos^2 \theta_i = 0 \dots (17)$$

(i=1, 2, 3, 4)

軸受に遊びきのある場合は、だ円短径よりも半径方向遊びきだけ小さい円をだ円におしこむことになるから、(14)~(17)式中のδ<sub>x</sub> tan Ψはもちろん負の値をとる。

これらの式の成立範囲は、円にだ円が少なくとも1点で接するまでであり、このときの積分範囲は2πとなる。積分範囲を2πとしたときのスラスト荷重P<sub>x'</sub>よりも大きいスラスト荷重P<sub>x</sub>が与えられたときは、P<sub>x</sub>-P<sub>x'</sub>だけ円周に沿って一様な荷重分布となるとして計算する。この場合の荷重分布は図3のようになり、(14)~(17)式は下記のようになる。すなわち軸受荷重のX, Y, Z成分がP<sub>x'</sub>, P<sub>y</sub>, P<sub>z</sub>のときの内輪中心の変位をδ<sub>x''</sub>, δ<sub>r'y''</sub>, δ<sub>r'z''</sub>, P<sub>x</sub>, P<sub>y</sub>, P<sub>z</sub>のときの中心の変位をδ<sub>x</sub>, δ<sub>r'y</sub>, δ<sub>r'z</sub>とすれば

$$P_{x'} = (2\pi \delta_{x''} \tan \Psi - \pi \epsilon_0) KR \cos \Psi (\sin \Psi \pm \mu \cos \Psi) \dots (14)'$$

$$P_y = \pi \delta_{r'y''} KR \cos \Psi (\cos \Psi \mp \mu \sin \Psi) \dots\dots\dots (15)'$$

$$P_z = \pi \delta_{r'z''} KR \cos \Psi (\cos \Psi \mp \mu \sin \Psi) \dots\dots\dots (16)'$$

$$\delta_{x''} \tan \Psi + \delta_{r'y''} \cos \theta + \delta_{r'z''} \sin \theta - \epsilon_0 \cos^2 \theta = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$P_x - P_{x'} = 2\pi (\delta_x - \delta_{x''}) \tan \Psi KR \cos \Psi (\sin \Psi \mp \mu \cos \Psi) \dots\dots\dots (18)$$

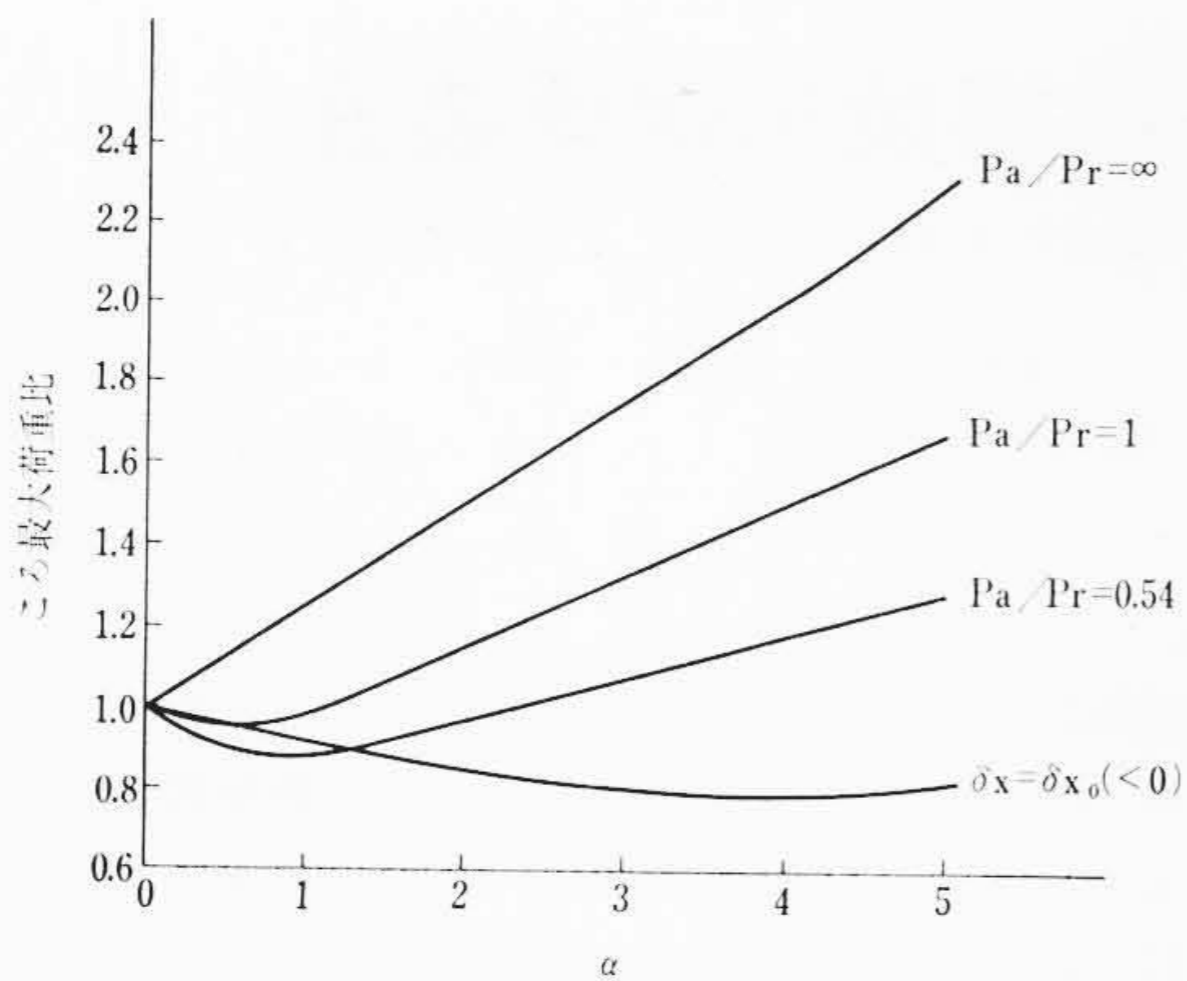
$$\delta_{r'y} = \delta_{r'y''} \dots\dots\dots (19)$$

$$\delta_{r'z} = \delta_{r'z''} \dots\dots\dots (20)$$

計算は(15)'(16)'で求めたδ<sub>r'y''</sub>, δ<sub>r'z''</sub>を(17)'に代入し、θの値が1個であるという条件下のδ<sub>x''</sub> tan Ψの正の最小値を(14)'に代入してP<sub>x'</sub>を求め、(18)(19)(20)式からδ<sub>x</sub>, δ<sub>r'y</sub>, δ<sub>r'z</sub>を求め、(12)式によりpを算出する。

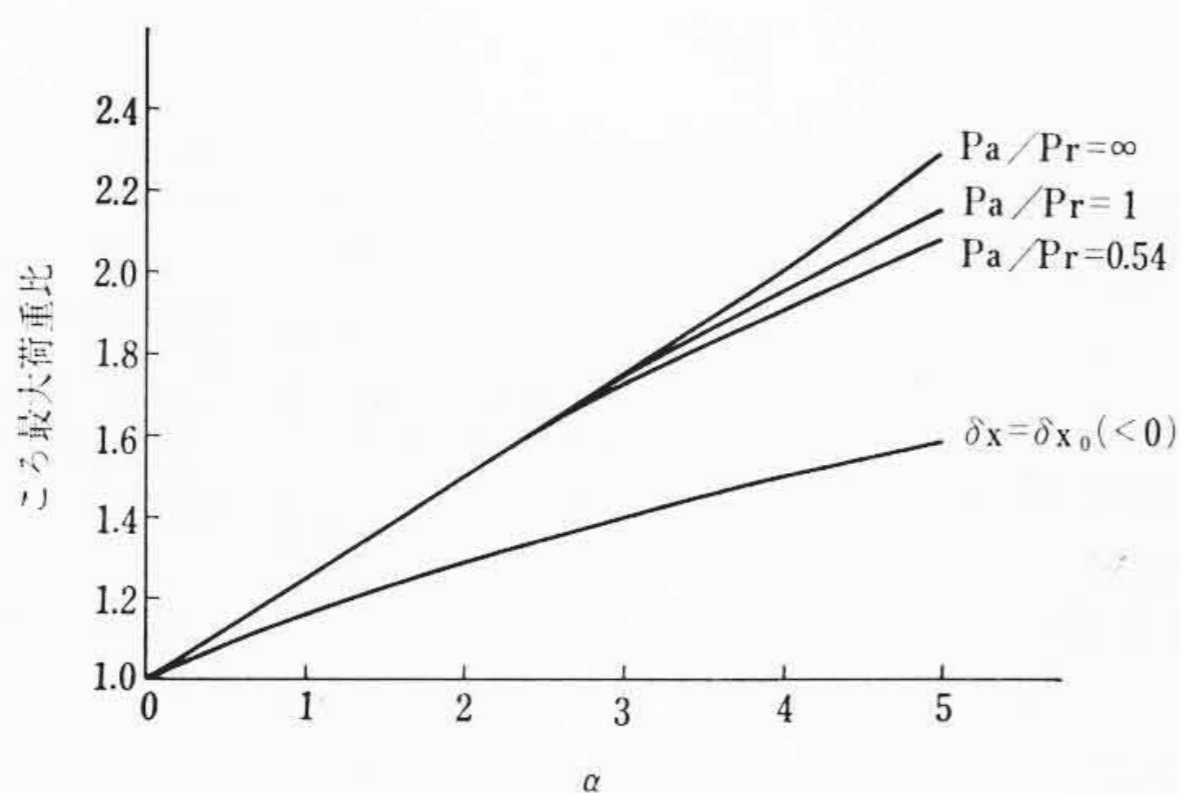
### 3. 計算例と外輪だ円度に対する評価

外輪のだ円度の評価は与える荷重によって異なる。いまスラスト荷重P<sub>a</sub>, ラジアル荷重P<sub>r</sub>のもとに外輪がだ円の場合と真円の場合のころの最大荷重と変形を比較する。だ円の長短径の差ε<sub>0</sub>を無次元表示するため、P<sub>a</sub>, P<sub>r</sub>のもとに外輪が真円の場合の最大弾性変形量とε<sub>0</sub>の比αであらわす。すなわち(14)(15)(17)(10)式から求められるε<sub>0</sub>が0のときの軸方向、半径方向の最大変位量をδ<sub>x0</sub>, δ<sub>r'0</sub>と



(ラジアル荷重がだ円長軸方向)

図4 外輪だ円度によるこの最大荷重の変化



(ラジアル荷重がだ円短軸方向)

図5 外輪だ円度によるこの最大荷重の変化

すれば

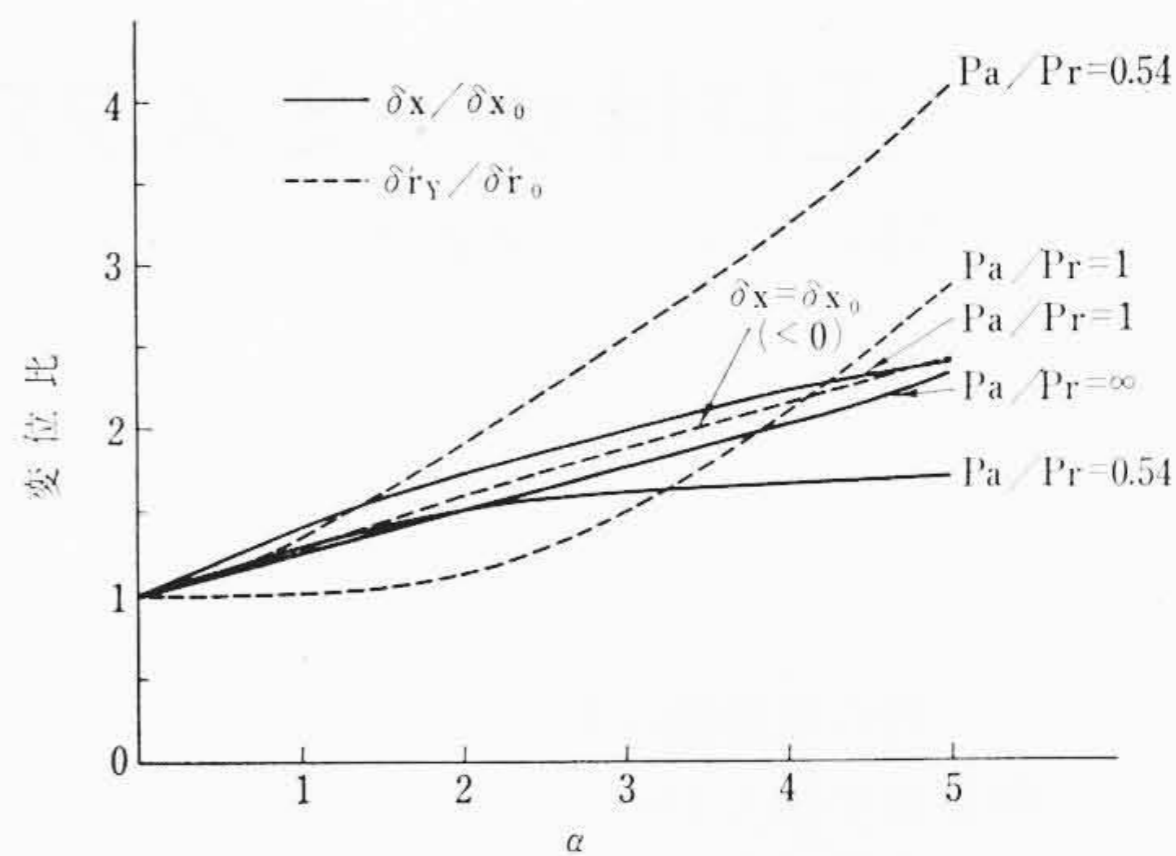
$$2\varepsilon_0 = \alpha(\delta x_0 \tan \Psi + \delta r'_0)$$

で  $\alpha$  を定義する。

$\alpha$  を変化させたときの最大弾性変形量と真円の場合の最大弾性変形量の比はこの最大荷重の比である。便宜上ラジアル荷重の方向がだ円の長軸、または短軸に一致したときのこの最大荷重比を、 $P_a/P_r$  をパラメータとして図4,5に示した。すなわち  $\delta x_0 \tan \Psi$  が正の場合については  $P_a/P_r$  を  $\infty, 1, 0.54$  とし、 $\delta x_0 \tan \Psi$  が負の場合すなわちガタのある場合はガタ量一定として計算した。この計算例では  $P_a/P_r$  が約0.3で、この場合は外輪を真円とした弾性変形量と、直径差であらわしたガタ量が等しくなる。また外輪に対する内輪の相対変位をそれぞれの場合について図6,7に示した。これらの計算では摩擦係数は  $\sin \Psi, \cos \Psi$  に対して非常に小さいとして0とおいた。

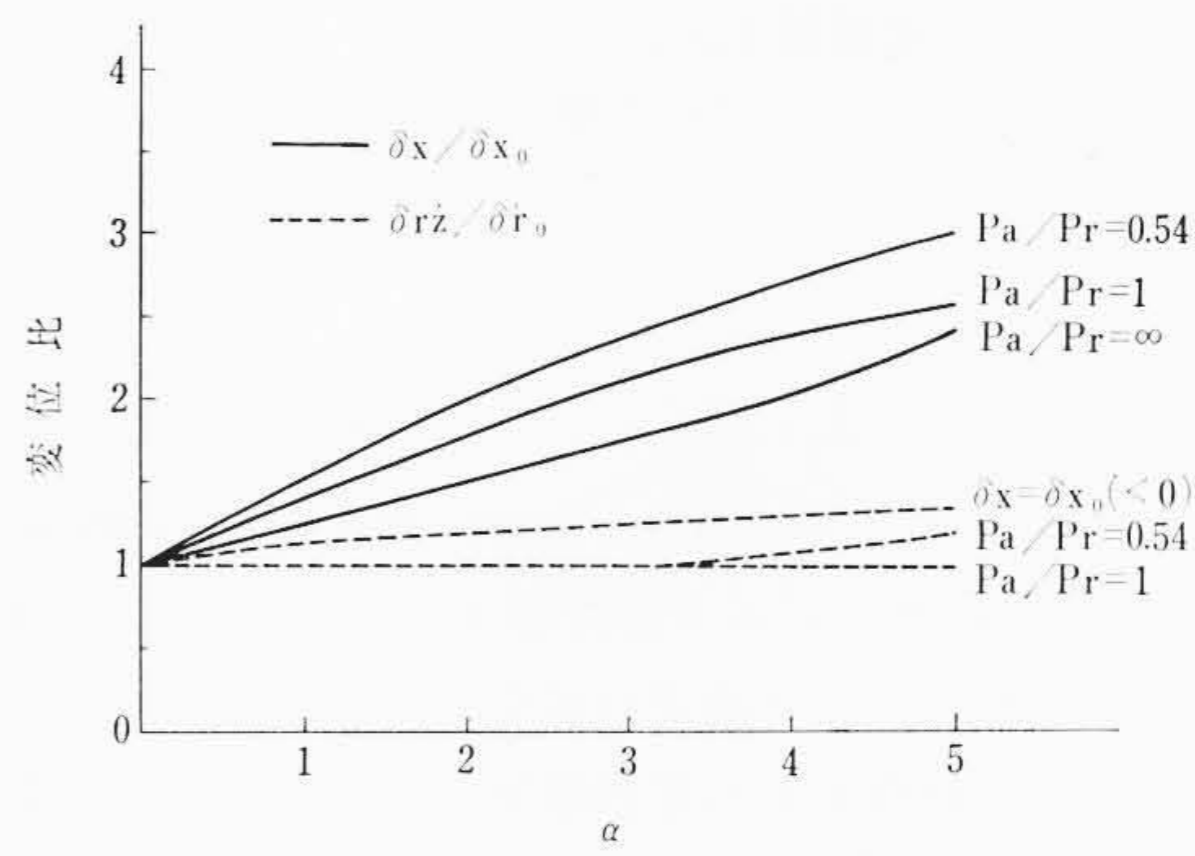
これらの計算で  $P_r$  の方向がだ円の長軸に合致している場合は、だ円度がこの最大荷重に及ぼす影響は短軸に合致している場合に比してかなり小さい。とくにスラスト成分の小さい場合、 $P_r$  方向が長軸に合致したときは真円の場合よりもこの荷重が減少するのは、だ円のために負荷圏が増すためである。 $P_r$  方向が短軸に合致した場合は負荷圏が減少するため、だ円度のこの荷重に及ぼす影響が顕著となる。内外輪間の相対変位についてはラジアル荷重方向の変位は  $P_r$  が長軸に合致した場合がきわめて大きく、短軸に合致した場合は小さい。軸方向の相対変位はいずれの場合もだ円度の影響を大きくうける。

だ円度の評価としてはまず軸受寿命を考えねばならぬ。便宜的に



(ラジアル荷重がだ円長軸方向)

図6 外輪だ円度による内輪の変位の比較



(ラジアル荷重がだ円短軸方向)

図7 外輪だ円度による内輪の変位の比較

は等価軸受荷重比をこの最大荷重比に等しいとして寿命を算出することができる。ころ自身は負荷圏の変化があるため、最大荷重のみで論ずることはできないとしても、外輪に対しては上記の考え方は成立する。したがってだ円度が寿命に及ぼす影響はきわめて大きいといえよう。

軸受寿命の低下以外に軸受の剛性の低下を考えねばならない。とくに歯車軸に使う円すいころ軸受では、軸受の剛性が歯車軸のねじり剛性を大幅に支配する場合もあり<sup>(4)</sup>、また軸受の変形が歯車の歯当り中心を移動させることも無視できない。歯面の接触点の変位についてはすでに解析されており<sup>(5)</sup>、クラウニング量と対応させて片あたりの防止にこれらの計算を役立てることは可能であり、この面からの規制も必要である。

#### 4. 結 言

外輪がだ円になった場合、軸受荷重によってだ円度が変わらないという仮定のもとに円すいころ軸受のこの荷重分担を求める式を導き計算例を示した。だ円のこの最大荷重に及ぼす影響、剛性の低下に及ぼす影響はだ円の長短軸と荷重方向の関係によってかなり相違するが、顕著にあらわれる。だ円の限界値は簡単には定められないが、本文の計算によって等価ラジアル荷重として寿命の推定、また負荷時の歯当り位置の変化の推定にも使用できる。

#### 参 考 文 献

- (1) 赤岡：機械の研究 3, 257 (昭33-5)
- (2) A. B. Jones: Trans. A. S. M. E ser D. 85 273 (1963)
- (3) G. Lundberg: Forschung, Ausgabe A. 10, 201 (1939)
- (4) 高井, 笠井: 日立評論 46, 1621 (昭39)
- (5) たとえば後藤: 機械学会論文集 20, 92 (昭29)