

# I 断面ガーダの横倒れ挫屈強さ

## Studies on the Lateral Buckling Strength of I Section Beams

久保 務\* 今村 実\* 坂井 裕 親\*  
 Tsutomu Kubo Minoru Imamura Hirochika Sakai

### 要 旨

ガーダの曲げねじり剛性のみを考慮し、単純ねじり剛性を無視した K. Basler, B. Thürlimann の横倒れ挫屈解析結果をエネルギー法による架構の挫屈理論に結びつけることにより弾性固定で、垂直荷重のほかに横荷重も負荷される I 断面ガーダについて横倒れ挫屈応力の解析を行ない設計計算式を求めた。しかし、式中には各種の仮定を含んでいるため、仮定の妥当性を確認する必要があるため、模型による荷重実験を行ない実験結果と比較検討した結果、計算式は、この種のガーダの横倒れ挫屈強さの推定に適していることを確認した。

### 1. 緒 言

軽量化にとまらぬ大きい曲げモーメントを受ける I 断面ガーダの設計上考慮すべき重要な因子として横倒れ挫屈があげられ、その正確な設計計算式が必要となる。

現在、I 形断面材の横倒れ挫屈応力の解析は単純な荷重条件および支持条件の場合については行なわれているが<sup>(2)</sup>、重量物運搬車用ガーダのような弾性固定で、垂直荷重のほかに横荷重も負荷された場合についてはほとんど行なわれていない。したがって、本報告においては、ガーダの曲げねじり剛性のみを考慮し、単純ねじり剛性を無視した Konrad Basler, Bruno Thürlimann の解析結果<sup>(1)</sup>をエネルギー法による架構の挫屈理論に結びつけることにより弾性固定で、垂直荷重のほかに横荷重も負荷される場合について挫屈応力解析を行ない、設計計算式を求めた。

しかし、当式には種々の仮定が含まれているため当式の挫屈強さの推定式としての妥当性を確認するために模型による挫屈実験を行なった。

本報告は実験および応力解析結果と、それらを比較検討した結果の概要を紹介するものである。

### 2. ガーダの横倒れ挫屈応力解析

横倒れ挫屈は St. Venant の単純ねじり剛性による要素と曲げねじり剛性による要素との二つの要素により決まるが<sup>(2)</sup>、最近の大きな曲げモーメントを受ける図 1 に示すような重量物運搬車用 I 断面ガーダは軽量化のため、はり高でかつフランジの x 軸まわりの曲げ剛性の大きな断面形状となる。

また、実際に遭遇する支持条件としてはかなり固定に近い場合、単純ねじりによる要因は無視できる場合が多い。したがって、以下近似的に単純ねじり剛性を無視して応力解析を行なう。

横倒れ挫屈応力を求めるにあたってガーダの単純ねじり剛性を無視するが、ウェブは圧縮側フランジが y 方向に変形することに対して抵抗する (図 2 参照)。

このウェブの効果については Konrad Basler, Bruno Thürlimann の解析<sup>(1)</sup>があり、その概略は次のようである。

ウェブの曲げ応力  $\sigma_w(x)$  は上下フランジを同一とすれば

$$\sigma_w(x) = \frac{2}{h} x \sigma_{cr} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $x$  : 坐標 (その他  $y, z$  も坐標を表わす) (図 1 参照)

$h$  : はりの高さ

$\sigma_{cr}$  : フランジの挫屈限界応力

となり、ウェブが y 方向に  $y(x, z)$  だけ変形すると仮定したときの

\* 日立製作所笠戸工場

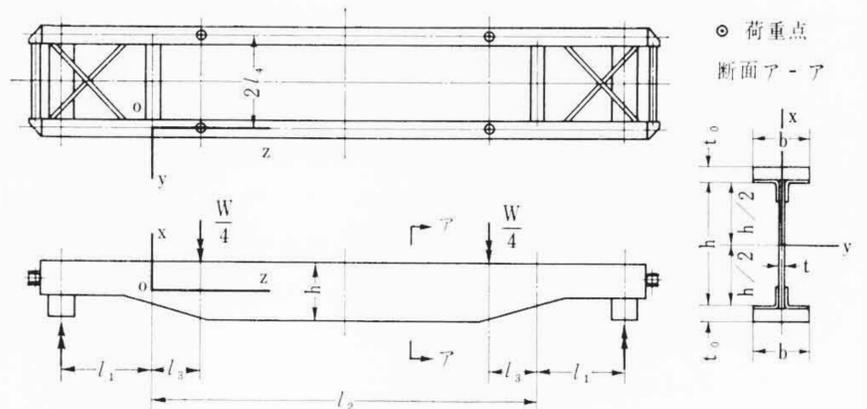


図 1 ガーダの挫屈解析に使用のおもな記号

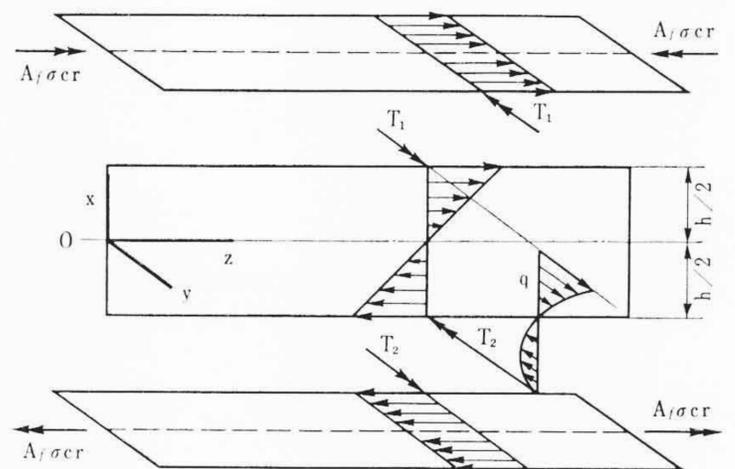


図 2 ウェブの  $\sigma_{cr}$  への影響

$\sigma_w(x)$  による y 方向のせん断力成分  $q$  はウェブが引張側フランジ中心まわりに直線状に変形すると仮定すれば

$$q = \sigma_w(x) t \frac{d^2 y(x, z)}{dz^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$y(x, z) = \frac{2x+h}{2h} f(z) \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $t$  : ガーダのウェブ厚さ

$f(z)$  : 境界条件にて決まる  $z$  に関する任意の関数と表わされる。したがって、ウェブより上下フランジに負荷される相当分布荷重  $T_1, T_2$  はそれぞれ  $x = -h/2, x = h/2$  におけるモーメントの釣合いから

$$T_1 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} q \left( x + \frac{h}{2} \right) dx = \frac{1}{6} A_w \sigma_{cr} \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} \dots (4)$$

$$T_2 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} q \left( \frac{h}{2} - x \right) dx = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ここに

$A_w = ht$  : ウェブの断面積となる。

ゆえに、曲げの基礎式として次式を得る。

$$EI_{fx1} \frac{d^4 y(h/2, z)}{dz^4} + \sigma_{cr} \left( A_f + \frac{1}{6} A_w \right) \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} = 0 \quad (6)$$

ここに

$E$  : ガーダ材料のヤング率

$I_{fx1}$  : 圧縮側ガーダフランジの  $x$  軸まわりの断面二次モーメント

$A_f$  : 圧縮側フランジの断面積

以上が K. Basler らの解析結果の概要であり、上式より I 形断面ガーダの横倒れ挫屈問題は断面積  $(A_f + \frac{1}{6} A_w)$ 、 $x$  軸まわりの曲げ剛性  $EI_{fx1}$  の圧縮柱が圧縮応力  $\sigma_{cr}$  を負荷されて、 $y-z$  面内に挫屈する曲げ挫屈の問題となることわかる。この問題は弾性固定で軸圧縮力のほかに横荷重が負荷される場合も含めて一般に Beam Column の問題といわれるものであり、すでに厳密解が得られることはわかっているが<sup>(2)</sup>設計計算式としては難解となり適切でない。

したがって、実際に遭遇するような弾性固定としてのたわみ曲線を工夫して垂直荷重のほかに  $y$  方向の横荷重も圧縮側フランジに負荷される図3の場合についてエネルギー法を用いて挫屈応力解析を行なった。なお、横荷重  $H$  の負荷位置は模型実験と同じ位置について解析するが、 $M_1$  は弾性固定であるための端部からの拘束モーメントであるから拘束係数を  $\alpha$  とすれば

$$M_1 + \alpha \theta_1 = 0 \quad (7)$$

ここに

$\theta_1$  : 端部におけるフランジの  $x$  軸まわりの変角

なる関係がある。

いま、フランジのたわみ曲線を

$$y\left(\frac{h}{2}, z\right) = k_1 \sin \frac{\pi z}{l_2} - k_2 \left( \cos \frac{2\pi z}{l_2} - 1 \right) \quad (8)$$

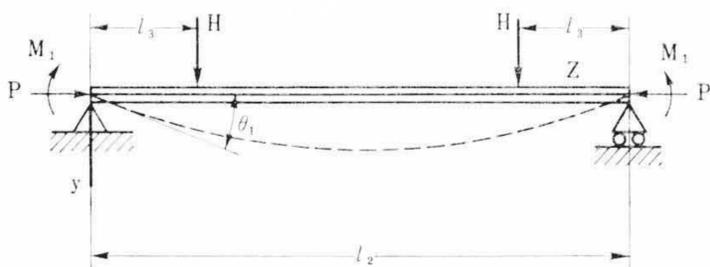


図3 挫屈強さの解析の仮定

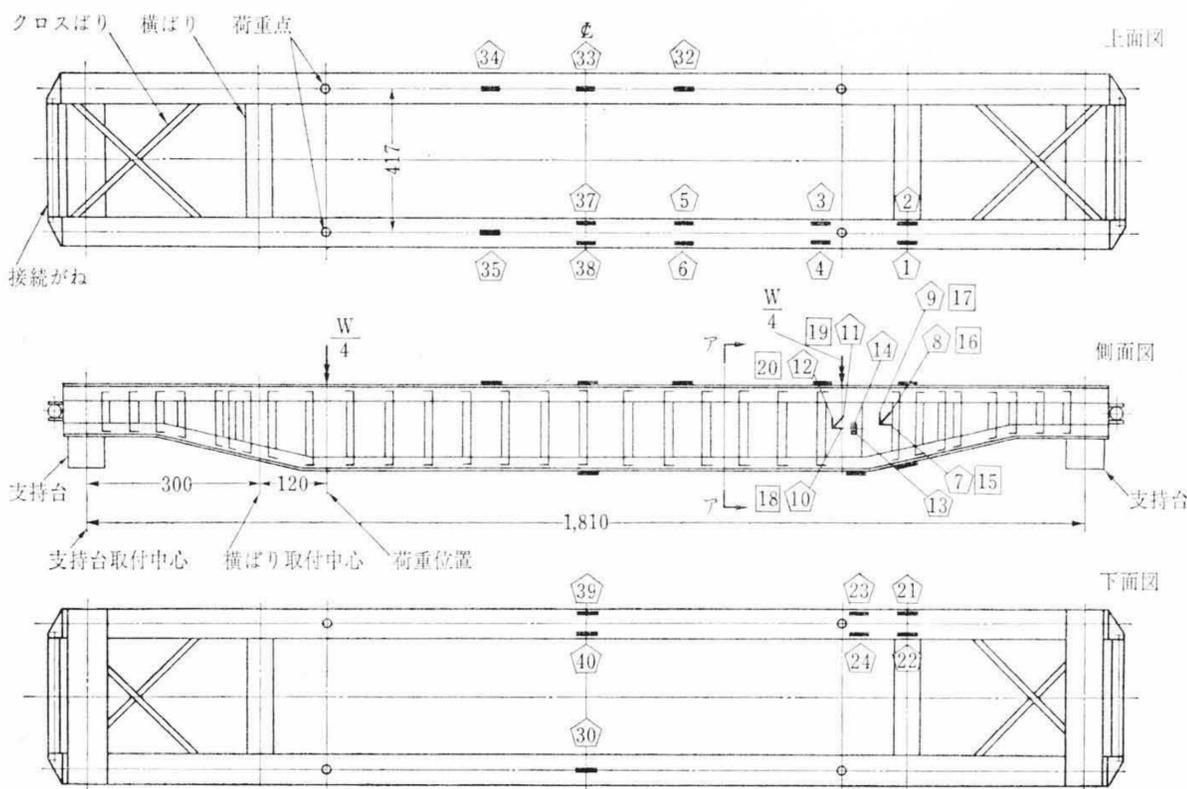


図4 模型寸法およびゲージはり付位置

注 1. ◻内数字は測定点No.  
2. □内数字はウェブ内側測定点No.

ここに

$k_1, k_2$  : 変位係数

$l_2$  : スパンの長さ

と仮定すれば、 $z=0$  における  $\theta_1, M_1$  は

$$\theta_1 = \left\{ \frac{dy(h/2, z)}{dz} \right\}_{z=0} = k_1 \frac{\pi}{l_2} \quad (9)$$

$$M_1 = -EI_{fx1} \left\{ \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} \right\}_{z=0} = -EI_{fx1} k_2 \frac{4\pi^2}{l_2^2} \dots (10)$$

となり、各値は(7)式を満足しなければならない。したがって(9)(10)式を(7)式に代入して

$$k_1 = \beta k_2 \quad (11)$$

ここに

$$\beta = \frac{EI_{fx1}}{\alpha} \frac{4\pi}{l_2}$$

が得られ、(8)式は

$$y = k_2 \left( \beta \sin \frac{\pi z}{l_2} - \cos \frac{2\pi z}{l_2} + 1 \right) \quad (8')$$

となる。ここで、 $k_2$  が  $dk_2$  だけ変分したときの軸力  $P$  ( $\equiv (A_f + \frac{1}{6} A_w) \sigma_{cr}$ )、モーメント  $M_1$ 、圧縮側フランジに負荷される横荷重  $H$  によるそれぞれの仕事量の変分  $dU$  は

$$\begin{aligned} dU = & 2 \left[ \int_0^{l_2/2} P \frac{dy(h/2, z)}{dz} \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} dz \right] dk_2 \\ & + 2M_1 \left[ \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} \right]_{z=0} dk_2 + 2H_1 \left[ \frac{dy(h/2, z)}{dz} \right]_{z=l_3} dk_2 \\ = & \frac{\pi^2}{l_2} \left( \frac{\beta^2}{2} + \frac{16\beta}{3\pi} + 2 \right) P k_2 dk_2 - 8EI_{fx1} \frac{\pi^3}{l_2^3} \beta k_2 dk_2 \\ & + \left( \beta \sin \frac{\pi l_3}{l_2} - \cos \frac{2\pi l_3}{l_2} + 1 \right) 2H dk_2 \quad (12) \end{aligned}$$

となる。一方、 $k_2$  が  $dk_2$  だけ変分したときの曲げの形でフランジにたくわえられるひずみエネルギーの変分  $dU$  は

$$\begin{aligned} dU = & 2EI_{fx1} \left[ \int_0^{l_2/2} \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} \frac{d^3 y(h/2, z)}{dz^3} dz \right] dk_2 \\ = & EI_{fx1} \frac{\pi^4}{l_2^3} \left( \frac{\beta^2}{2} + \frac{16\beta}{3\pi} + 8 \right) k_2 dk_2 \quad (13) \end{aligned}$$

となり、(12)と(13)式は等しいのであるから、 $k_2$  は次式により決定される。

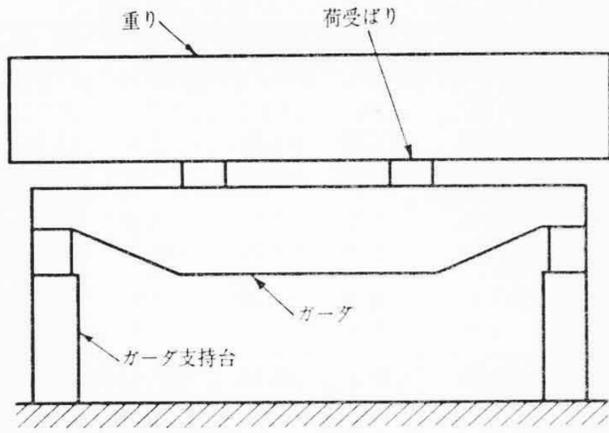


図5 試験方法

$$k_2 = \frac{\left(\beta \sin \frac{\pi l_3}{l_2} - \cos \frac{2\pi l_3}{l_2} + 1\right) 2H}{EI_{fx_1} \frac{\pi^4}{l_2^3} \left[\frac{\beta^2}{2} + \frac{40\beta}{3\pi} + 8\right] - \frac{\pi^2}{l_2} \left[\frac{\beta^2}{2} + \frac{16\beta}{3\pi} + 2\right] P} \dots\dots\dots (14)$$

(14)式の分母を0とすれば

$$P \equiv \sigma_{cr} \left(A_f + \frac{1}{6} A_w\right) = \frac{\pi^2 EI_{fx_1}}{l_2^2} \left[ \frac{8 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{40\beta}{3\pi}}{2 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{16\beta}{3\pi}} \right] \dots\dots\dots (15)$$

となり、横荷重のない場合の横倒れ挫屈応力  $\sigma_{cr}$  が求められる。

なお、横荷重の負荷される場合には純粋な曲げ挫屈にはならず\*、 $y-z$  面内への曲げ変形によるモーメント  $M_z$  は

$$M_z = -EI_{fx_1} \frac{d^2 y(h/2, z)}{dz^2} \dots\dots\dots (16)$$

から求められる。

また、最大モーメントは、 $z=l_2/2$  にて生じ、挫屈強さの限界式として次式が得られる。

$$|\sigma_0| + \left| \frac{M_z=l_2/2}{Z} \right| \leq \sigma_s \dots\dots\dots (17)$$

ここに

$|\sigma_0| < |\sigma_{cr}|$ :  $y$  軸に平行な軸まわりの圧縮側フランジの曲げ応力

$M_z=l_2/2$ :  $z=l_2/2$  での  $x$  軸に平行な軸まわりの曲げモーメント

$Z$ : フランジの  $x$  軸まわりの最外繊維での断面係数

$\sigma_s$ : ガーダ材料の降伏応力

### 3. 模型実験の概要

#### 3.1 実験方法の概要

式の妥当性を確認するために、図4のようなリベット組立てでのガーダ模型について荷重実験を行なった。クロスはりおよび横はりには弾性固定として実験をするために付けたものである。

実験は図5に示すように2個所にてガーダを支持し、2本の荷受ばりの上におもりを乗せて荷重を負荷した。

横荷重を加える実験は6度のテーパ板をガーダ支持装置にはさんでガーダを傾け、おもりを水平のままに負荷するためにテーパ板と

(注1) 横荷重が負荷される場合にはガーダは始めから、 $y-z$  面内の曲げ変形をするため純粋な曲げ挫屈にはならない、すなわち圧縮側フランジには  $x$  軸に平行な軸まわりの曲げ応力と  $y$  軸に平行な軸まわりの曲げ応力が同時に作用し、それらの加え合わされた応力が最大となる位置にて、この応力が材料の降伏点を越えるとき、その点を境として大変形を起こして破壊すると仮定してよい。したがって、(15)式により計算される  $\sigma_{cr}$  まで弾性(正しくは比例限度)を保持する場合に限って  $\sigma_{cr}$  にて挫屈することになる。

表1 応力測定値 (kg/mm<sup>2</sup>)

測定点 No.	2 t 負荷時		3.5 t 負荷時	
	傾斜角 0°	傾斜角 6°	傾斜角 0°	傾斜角 6°
1	-8.5	-9.4	-15.1	-17.3
2	-7.7	-5.2	-13.0	-6.3
3	-12.0	-11.6	-20.8	-19.4
4	-8.0	-3.3	-13.9	-6.4
5	-12.0	-12.1	-20.0	-23.0
6	-8.4	-7.1	-14.6	-10.4
21	+7.6	+8.8	+12.9	+17.2
22	+10.2	+9.7	+14.0	+13.5
23	+8.6	+9.8	+14.7	+17.4
24	+8.7	+6.6	+14.3	+10.9
30	+11.3	+11.1	+20.8	+19.1
32	-10.5	-9.9	-17.9	-17.4
33	-9.9	-9.5	-17.9	-16.9
34	-10.7	-11.1	-19.3	-18.8
35	-12.2	-10.7	-19.3	-20.1
37	-9.5	-13.2	-16.4	-24.9
38	-10.3	-7.4	-17.2	-11.1
39	+6.8	+8.2	+11.9	+13.1
40	+8.7	+7.7	+14.4	+12.3

表2 SS41 圧延材の機械的性質

試片No.	試験値		JIS 規格値	
	0.2% 耐力	引張強さ	降伏点	引張強さ
1	27.7 kg/mm <sup>2</sup>	43.8 kg/mm <sup>2</sup>	23 kg/mm <sup>2</sup> 以上	41~50 kg/mm <sup>2</sup>
2	28.1 kg/mm <sup>2</sup>	43.2 kg/mm <sup>2</sup>		
3	28.1 kg/mm <sup>2</sup>	41.7 kg/mm <sup>2</sup>		
4	28.1 kg/mm <sup>2</sup>	43.3 kg/mm <sup>2</sup>		
平均	28.05 kg/mm <sup>2</sup>	43.0 kg/mm <sup>2</sup>		

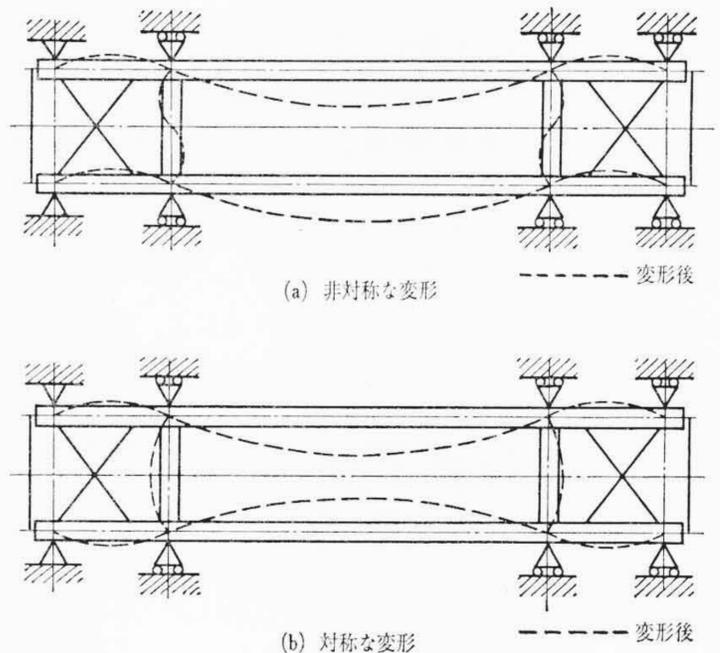


図6 変形様式

同じ6度のテーパをつけた荷受ばりの上におもりを負荷することにより行なった。

実験における応力の測定箇所は図4に示され、最大応力が生ずると予想されるフランジおよび荷重点近くの板場にひずみゲージをはりつけた。

なお、ひずみゲージは板場を除いてはPL-5(東京測器製)を使用し、板場ではPR-10(東京測器製)をはりつけた。

各実験において荷重は0.5tおきに最大荷重4tまで負荷した。

#### 3.2 試験結果

荷重は横傾斜角0度の場合には4tまで負荷したが、横倒れ挫屈は生じなかった。横傾斜角6度の場合には3.5tまでは横倒れ挫屈は生じなかったが、4t負荷と同時にガーダ中央部を降伏個所として、横倒れ挫屈破壊をした。

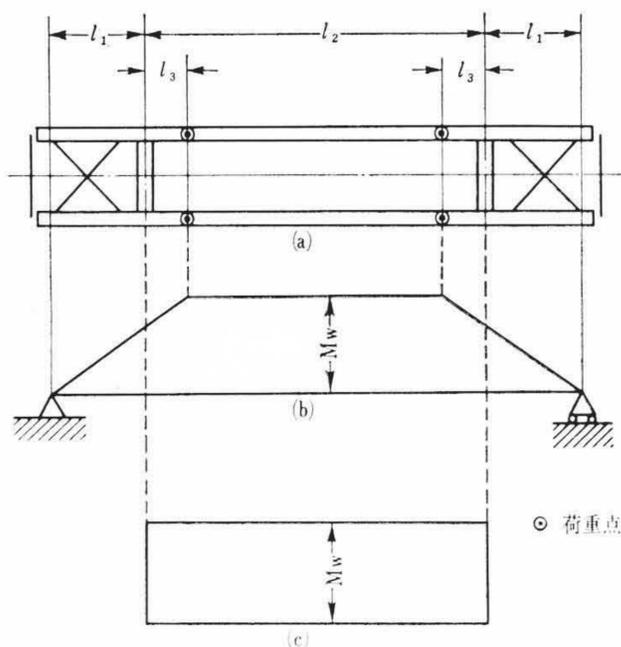


図7 模型ガーダのモーメントに対する仮定

各測定点のうち比較的大きな応力値を表1に、またガーダ材料の機械的性質を表2に示す。なお、引張試験片はJIS-7号試験片によるもので、また、降伏による加工硬化の影響のない所から採取したものである。

4. 実験結果と計算結果との比較検討

4.1 横倒れ挫屈限界応力

実験ガーダにはクロスはりがあり、その引張剛性が大きい横はり位置は支点と考えてよく、図6(a)(b)のような二種類の変形様式が考えられる。図6(a)は横荷重のある場合あるいは初期変形がある場合に起こる変形様式と考えられる。

荷受けはりからの載荷荷重Wに基づくy軸まわりのモーメント分布は、図7(b)のようになるが、横はり位置と荷受けはり位置が接近していること\*、および解析の単純化のために図7(c)のように、モーメント分布を仮定した。さらにガーダの変断面の影響を無視した図7(c)のモーメントによる軸力が横はり位置間のみ負荷されるとして、(15)式を用いて計算すれば、図6(a)(b)の場合には(15)式の右辺括弧内の値はそれぞれ3.05, 2.94となり、固定支持に近くまたσcrはそれぞれ42.0 kg/mm<sup>2</sup>, 40.3 kg/mm<sup>2</sup>となる。

この値はガーダ材料の降伏応力を越えているため、挫屈限界応力

(注2) この仮定が満足しない場合には

$$0 < Z < l_3 \quad P = P_0 \left( 1 + \frac{Z}{l_1} \right)$$

$$l_3 < Z < \frac{l_2}{2} \quad P = P_0 \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right)$$

ここに

P<sub>0</sub>: 横はり位置でのy軸に平行な軸まわりの曲げ応力による軸力として計算すればよい。

表3 計算値と実測値との比較 (6°傾斜時)

荷重 (ton)		測定位置 (1)(2) (kg/mm <sup>2</sup> )		測定位置 (5)(6) (kg/mm <sup>2</sup> )		測定位置 (7)(8) (kg/mm <sup>2</sup> )	
		曲げ応力 (x軸)	曲げ応力 (y軸)	曲げ応力 (x軸)	曲げ応力 (y軸)	曲げ応力 (x軸)	曲げ応力 (y軸)
1.5	実測値	±1.89	- 5.46	±2.03	- 7.37	±2.94	- 8.22
	計算値	±2.09	- 6.90	±2.28	- 8.00	±2.57	- 8.00
2.0	実測値	±2.48	- 7.27	±2.95	- 9.54	±3.40	-10.3
	計算値	±3.02	- 9.20	±3.29	-10.7	±3.72	-10.7
2.5	実測値	±3.93	- 8.72	±4.28	-12.0	±4.83	-12.9
	計算値	±4.14	-11.5	±4.50	-13.3	±5.09	-13.3
3.0	実測値	±5.15	-10.3	±6.10	-14.4	±6.33	-15.1
	計算値	±5.47	-13.8	±5.95	-16.0	±6.72	-16.0
3.5	実測値	±6.57	-11.8	±7.57	-16.6	±8.10	-18.0
	計算値	±7.13	-16.1	±7.78	-18.7	±8.75	-18.7

は材料の降伏応力と考えてよい。実験において、4 tまで負荷したが破壊せず、またそのときの最大応力は降伏応力より小さかった。

4.2 挫屈強さについて

横傾斜角6度の場合について各測定点でのx軸まわりの曲げモーメントによる圧縮側フランジ端面の応力、およびy軸まわりの曲げモーメントによる圧縮側フランジ上面の応力を(16)式を用いて計算した結果と実験値を比較したものを表3に示す。その結果から両者はほぼ合っているといえる。したがって解析に用いた仮定はこの種のガーダに対して妥当であると言ってよい。

なお表中の符号は図3に従うものとし、x軸まわりの実測応力は、フランジ端面でのものに換算してある。また、両者を加えた値は計算値が少し高めになっており、設計計算式として適切であると思われる。

なお、0.5 tおきに荷重を負荷しているため正確な破壊応力はつかめないが、3.5 t時の実測値の最大応力値は26.1 kg/mm<sup>2</sup>であり、材料の降伏応力近く、4 t負荷と同時に破壊したことは理解できる。

5. 結 言

エネルギー法を用いてガーダの曲げねじり剛性のみを考慮して横倒れ挫屈応力の解析を行ない計算式を求めた。

また、弾性固定としての模型実験を行ない、その結果と計算結果とを比較検討した結果、ほぼ合致することが確認され、この種のガーダの設計計算式として適切であり、解析に用いた仮定もこの種のガーダに対してほぼ妥当であることがわかった。

参 考 文 献

- (1) K. Basler, B. Thürlimann: Trans. of the A. S. C. E. Vol. 128, Part II 653 (1963)
- (2) S. Timoshenko (仲ほか2名): 挫屈理論 162 (昭14 コロナ社)