

クレーンブームなどに使用される横材つき三角ラーメンの座屈荷重

Buckling Load of Triangular Frame with Tie Members Used for Crane Booms

種 田 元 治*
Motoharu Taneda

中 沢 優**
Masaru Nakazawa

松 川 安 広***
Yasuhiro Matsukawa

要 旨

クレーンブームなどに用いられる横材つき三角ラーメンの座屈荷重計算用プログラムを、撓度撓角法で作成した。このプログラムは構造物の形状などのデータを与えれば、以後は計算機が自動的に計算するようにしたものである。われわれはまた、模型4個を用いて座屈実験を行ない、このプログラムの実用性を確かめた。最後に、実験結果および36例の計算結果から座屈荷重に及ぼす各部材の剛度などの影響を検討した。

1. 緒 言

旋回クレーンのブームや橋形クレーンの脚などには、図3に示すような横材つき三角ラーメンがしばしば用いられる。このような骨組構造物の座屈計算法は種々発表されているが^{(1)~(4)}、これらを実際に計算し実験的に確かめた例は少ない。

今回、撓度撓角法による計算プログラムを作成し、この計算結果と模型4個による実験結果との比較など二、三の検討を行なったので報告する。なお、プログラムでは計算式などをすべて一般形で表わすことを検討し、部材数が変わった場合にも用いられるようにした。

2. 計 算 方 法

2.1 座屈荷重の計算方法

座屈荷重は安定な釣合と不安定な釣合との分岐点の荷重である。これを求めるには新しく生じ得る座屈変形様式を考え、その微小な変形を考慮した釣合が成立する荷重を求めればよいわけである。

ここでは、座屈荷重の計算法として撓度撓角法を用いるので、はじめにその基礎式について述べる。

いま、座屈荷重を計算しようとする構造物(図3)の任意の ik 部材をとって考えると、この部材は軸力を受けながら他部材のたわみ剛性によって弾性支持されているものである。ここで構造物が座屈した状態を考え、図1がこのときの ik 部材の変形を示すものとする。

軸力 P_{ik} は荷重 W (図3)の方向により引張りあるいは圧縮となる。おのおの場合について、材端モーメントを材端変位で表わすと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= EK_{ik} [\alpha_{ik} \theta_i + \beta_{ik} \theta_k - (\alpha_{ik} + \beta_{ik}) R_{ik}] \\ M_{ki} &= EK_{ik} [\alpha_{ik} \theta_k + \beta_{ik} \theta_i - (\alpha_{ik} + \beta_{ik}) R_{ik}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 M_{ik} : i 端におけるモーメント

M_{ki} : k 端におけるモーメント

E : 縦弾性係数

$K_{ik} = I_{ik}/l_{ik}$

I_{ik} : 断面二次モーメント

l_{ik} : 部 材 長

θ_i : i 節点の回転変位

θ_k : k 節点の回転変位

$R_{ik} = d_{ik}/l_{ik}$: 部材の回転変位

d_{ik} : i 端に対する k 端の変位

P_{ik} : 軸 力

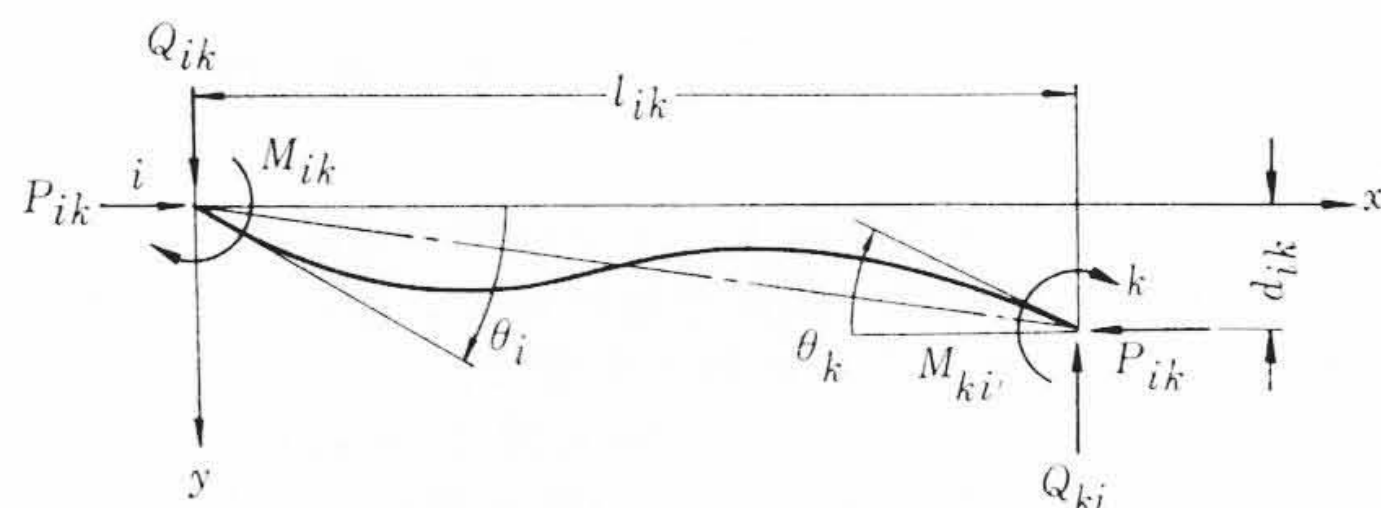


図1 座屈を生じた場合の部材の変形

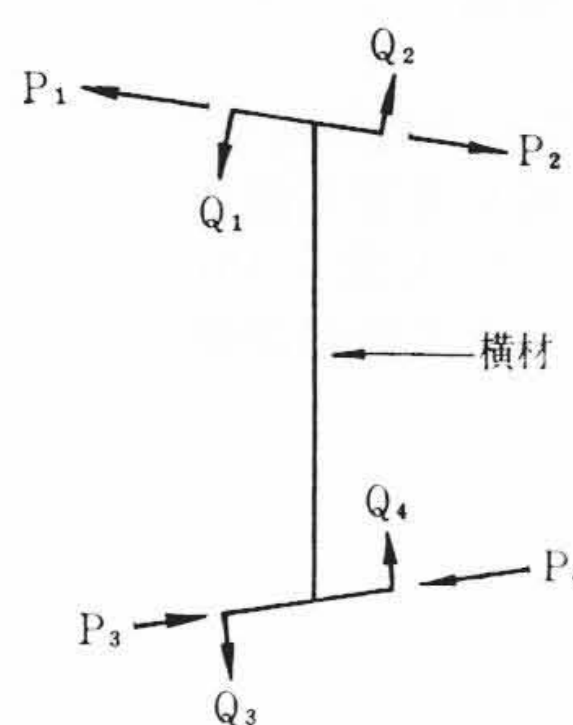


図2 仮定の free body

α_{ik}, β_{ik} : 軸力による係数で

$$Z_{ik} = l_{ik} \sqrt{\frac{|P_{ik}|}{EI_{ik}}}$$

とすれば、引張部材では

$$\alpha_{ik} = \frac{Z_{ik} \sinh Z_{ik} - Z_{ik}^2 \cosh Z_{ik}}{2(\cosh Z_{ik} - 1) - Z_{ik} \sinh Z_{ik}}$$

$$\beta_{ik} = \frac{Z_{ik}^2 - Z_{ik} \sinh Z_{ik}}{2(\cosh Z_{ik} - 1) - Z_{ik} \sinh Z_{ik}}$$

圧縮部材では

$$\alpha_{ik} = \frac{Z_{ik} \sin Z_{ik} - Z_{ik}^2 \cos Z_{ik}}{2(1 - \cos Z_{ik}) - Z_{ik} \sin Z_{ik}}$$

$$\beta_{ik} = \frac{Z_{ik}^2 - Z_{ik} \cos Z_{ik}}{2(1 - \cos Z_{ik}) - Z_{ik} \sin Z_{ik}}$$

軸力を受けない部材では

$$\alpha_{ik} = 4, \quad \beta_{ik} = 2$$

である。

また、部材端のせん断力は

$$Q_{ik} = \frac{EK_{ik}}{l_{ik}} [(\alpha_{ik} + \beta_{ik})(\theta_i + \theta_k) - \{2(\alpha_{ik} + \beta_{ik}) \mp Z_{ik}^2\} R_{ik}] \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし二重符号は上が圧縮部材、下が引張部材の場合である。

次に、図3の構造物の各節点のモーメントの釣合から

$$\sum_k M_{ik} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

* 日立製作所機械研究所 工学博士

** 日立製作所機械研究所

*** 日立製作所亀有工場

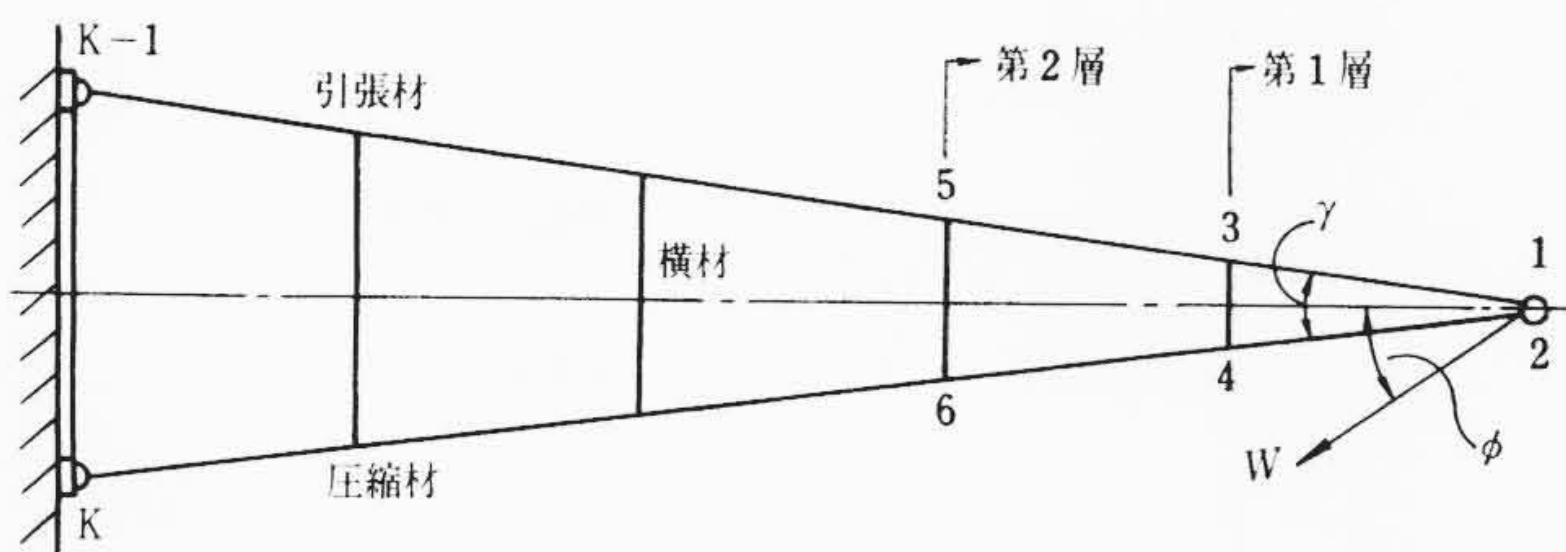


図3 構造物の形状

が成り立つ。

また、図2に示したように、構造物の横材を含めて切断した仮想の free body の釣合から

$$\sum Q_{ik}=0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

が得られる。

(3)式に(1)式を、(4)式に(2)式を代入すると、荷重 W が加わったとき、この構造物の未知量を座屈変位 θ および R で表わした釣合の連立方程式が得られる。この連立方程式の解のうち未知量 θ , R のすべてが0である場合を除いたものが座屈条件を満足する。いま、この連立方程式の係数から成る行列式を Δ とすれば

$$\Delta=0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

が座屈条件式となり、これを満足する W のうち最小のものが求める座屈荷重となる。

2.2 計算方法の一般化

ここではプログラミングについて検討し、この種の構造物の部材数すなわち節点数が変わった場合にも適用できるようにする。このためデータの読込方法や、さきに述べた計算式などをすべて一般形で与え、また行列式の各エレメントが規則的になることに着目して、これを計算機自身で求めさせて座屈荷重を計算するプログラムをつくる。

座屈荷重を計算しようとする構造物の形状は図3に示すようなものである。この各節点に図に示したような番号をつけ、各部材を1-3部材、3-5部材のように呼ぶことにする。

図3によって、11節点までの構造について前述の方法により座屈条件の係数行列式をつくり、検討した結果、0となるもの以外の各エレメントは以下に述べるように一般的に表わされることがわかった。

係数行列式の行および列番号を N 、計算しようとする構造物の節点数を L 、層番号を NC とし、その他補助数 $LC(=L+NC)$ を用いる。また行列式の任意のエレメントを $A(i, j)$ で表わすことにする。

L 行以内はモーメントの釣合式に相当するエレメントである。まずこの L 列以内については次のように行および列番号 N によってエレメントを表わすことができる。

すなわち、奇数行では

$$A(N, N)=K(N+1, N-1) \cdot \alpha(N+1, N-1)+4K(N+1, N) \\ +K(N+1, N+3) \cdot \alpha(N+1, N+3)$$

$$A(N, N-2)=K(N+1, N-1) \cdot \beta(N+1, N-1)$$

$$A(N, N-1)=2 \cdot K(N+1, N)$$

$$A(N, N+2)=K(N+1, N+3) \cdot \beta(N+1, N+3)$$

また偶数行では

$$A(N, N)=K(N+1, N-1) \cdot \alpha(N+1, N-1)+4K(N+1, N+2) \\ +K(N+1, N+3) \cdot \alpha(N+1, N+3)$$

$$A(N, N-2)=K(N+1, N-1) \cdot \beta(N+1, N-1)$$

$$A(N, N+1)=2 \cdot K(N+1, N+2)$$

$$A(N, N+2)=K(N+1, N+3) \cdot \beta(N+1, N+3)$$

となる。

次に L 行までの範囲における $L+1$ 列以降の列のエレメントは、

N, LC により次のように表わすことができる。すなわち

$$A(N, LC-1)=-\{\alpha(N+1, N-1)+\beta(N+1, N-1)\} \\ \times K(N+1, N-1)$$

$$A(N, LC)=-\{\alpha(N+1, N+3)+\beta(N+1, N+3)\} \\ \times K(N+1, N+3)$$

となる。

以上は節点におけるモーメントの釣合から得られるエレメントを一般的に表わしたものであるが、同様にせん断力の釣合式から得られるものが必要である。せん断力の釣合に相当するエレメントは $L+1$ 行以降で表わされる。まずこのうち L 列以内のものは

$$A(LC, 2NC)=K(2NC+1, 2NC-1)\{\alpha(2NC+1, 2NC-1) \\ +\beta(2NC+1, 2NC-1)\}/l(2NC+1, 2NC-1)$$

$$-K(2NC+1, 2NC+3)\{\alpha(2NC+1, 2NC+3) \\ +\beta(2NC+1, 2NC+3)\}/l(2NC+1, 2NC+3)$$

$$A(LC, 2NC+1)=K(2NC+2, 2NC)\{\alpha(2NC+2, NC) \\ +\beta(2NC+2, NC)\}/l(2NC+2, NC)$$

$$-K(2NC+2, 2NC+4)\{\alpha(2NC+2, 2NC+4) \\ +\beta(2NC+2, 2NC+4)\}/l(2NC+2, 2NC+4)$$

$$A(LC, 2NC-1)=K(2NC+2, 2NC)\{\alpha(2NC+2, 2NC) \\ +\beta(2NC+2, 2NC)\}/l(2NC+2, 2NC)$$

:

となる。

また $L+1$ 列以降のエレメントは、

$$A(LC, LC-1)=-K(2NC+1, 2NC-1)$$

$$\times \{2[\alpha(2NC+1, 2NC-1)+\beta(2NC+1, 2NC-1)] \\ +Z^2(2NC+1, 2NC-1)\}/l(2NC+1, 2NC-1)$$

$$-K(2NC+2, 2NC)\{2[\alpha(2NC+2, 2NC)+\beta(2NC+2, 2NC)] \\ -Z^2(2NC+2, 2NC)\}/l(2NC+2, 2NC)$$

$$A(LC, LC)=K(2NC+1, 2NC+3)\{2[\alpha(2NC+1, 2NC+3) \\ +\beta(2NC+1, 2NC+3)]+Z^2(2NC+1, 2NC+3)\} \\ /l(2NC+1, 2NC+3)+K(2NC+2, 2NC+4)$$

$$\times \{2[\alpha(2NC+2, 2NC+4)+\beta(2NC+2, 2NC+4)] \\ -Z^2(2NC+2, 2NC+4)\}/l(2NC+2, 2NC+4)$$

となる。

以上により、座屈条件の係数行列式の各エレメントを一般的に表わすことができる。ただし節点番号1, 2を同一節点にとったため、1~3行および $L+1$ 行はこの一般表示の例外となる。したがってこれらについては別にエレメントの式を与える。また $L-1, L$ 行目では実際にはない部材に対してもエレメントを造る場合があるが、これは計算プログラムで必ず0になるようにした。

2.3 計算プログラムの概略

まず、座屈荷重より十分低いと思われる荷重を与えて行列式の値を計算する。これより等間隔に荷重を増加させながら、その都度行列式の値を計算していく。この間隔が十分細かければ座屈荷重を越えた荷重では、行列式の値の正負の符号が変わる。したがって座屈荷重は正負の符号の変わる荷重の間にあることになる。

次にその中間の荷重について行列式の値の計算を行ない、得られた値の符号を比較し、さらにその中間の荷重について計算する。このような方法をくり返して、荷重を分割する幅が許容値内になるまで続け、行列式の値を0とする荷重 W の近似値を求め、これを座屈荷重の第一近似とする。

次に、荷重を増加する幅を小さくして、上述のものと全く同様な計算を行ない、得られた結果を座屈荷重の第二近似とする。これを第一近似のものと比較して差が定めた範囲にはいってれば座屈荷重とする。定められた範囲にはいない場合には、第一近似か第二近似かのどちらかあるいは両方が最小の座屈荷重でないことにな

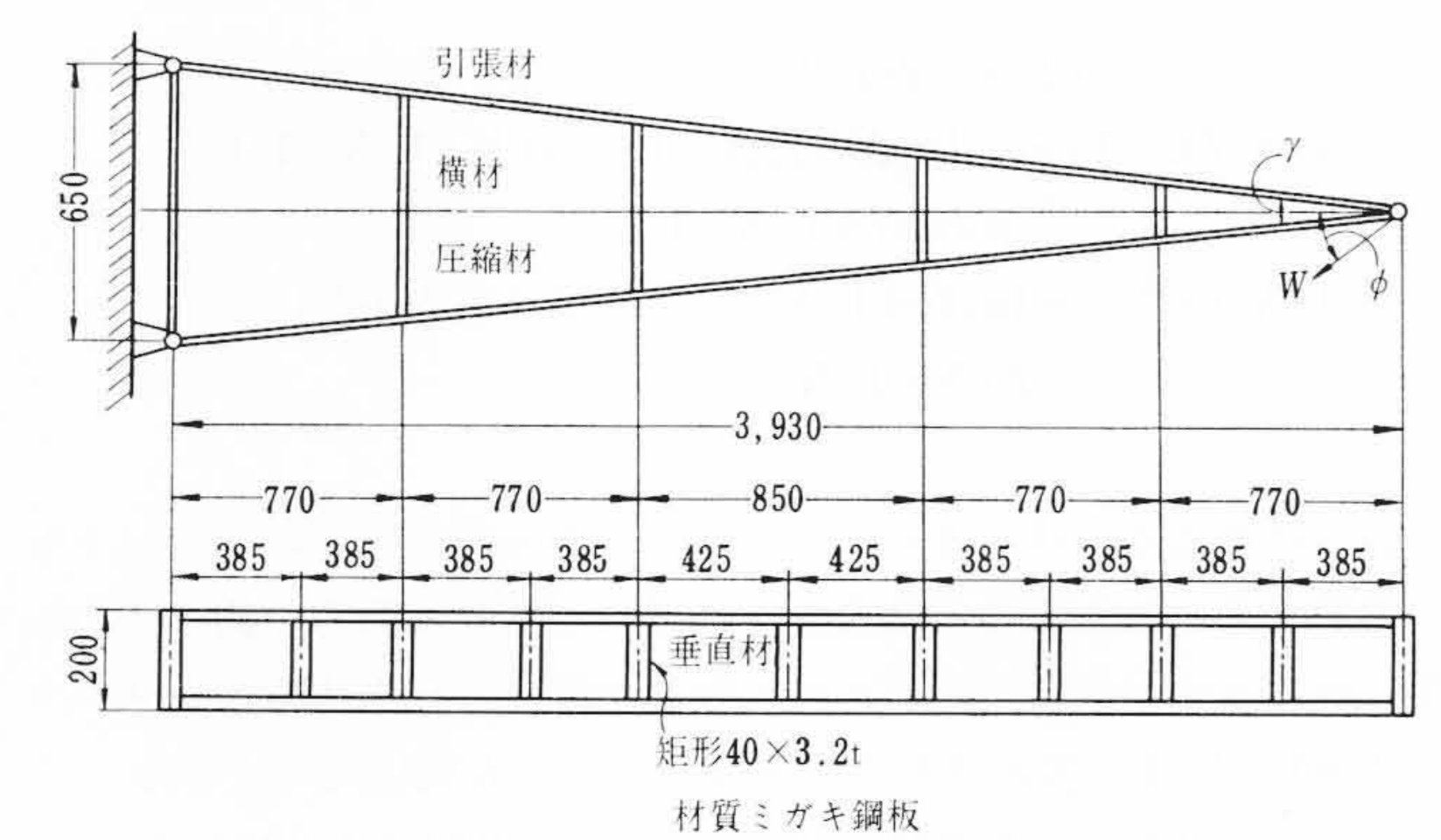


図 4 模 型

表 1 各 模 型 の 部 材 形 状

	圧 縮 部 材	引 張 部 材	横 材	
模 型 I	I 形 40×20×2.3 t	矩形 40×3.2 t	I 形 40×20×2.3 t	
模 型 II	I 形 40×20×2.3 t	矩形 40×3.2 t	矩形 40×3.2 t	
模 型 III	I 形 40×20×2.3 t	矩形 40×3.2 t	矩形 40×3.2 t	模型 II の各節点に ガセットプレート をつけたもの
模 型 IV	I 形 40×20×2.3 t	I 形 40×20×2.3 t	I 形 40×20×2.3 t	

表 2 模型の単位重量当たりの座屈荷重(実験値)の比較

	負 荷 方 向			模型の重量比
	30°	60°	90°	
模 型 I	1.00	0.71	0.69	1.00
模 型 II	0.29	0.33	0.38	0.94
模 型 III	0.44	0.47	0.38	1.03
模 型 IV	1.16	—	0.62	1.12

る。このような場合には、さらに上述のことをくり返し、同じ値(許容誤差内で)の座屈荷重が求まるまで計算する。

3. 実験による検討

3.1 実験方法

実験用模型の概略を図 4 に示す。模型は 2 個の同じ平面構造を垂直材でつないだ立体構造物であるとした。垂直材の取付位置は圧縮側では図に示す位置とし、引張側では横材と引張材の交点とした。

模型を立体構造とした理由は、1 個の平面構造では面外座屈を生じやすいので、これを防ぐためである。後述の実験において上下 2 個の平面構造はそれぞれ面内座屈を生じ、これらの座屈変形はまったく同じであった。したがって各平面構造をそれぞれ単独の平面構造として取り扱うことにした。

表 1 に示すように、各部材の断面形状や節点の剛性を変えた模型 4 個を使用した。図 4 の模型の左端をピンで支持し、右端に面内荷重 W を加えた。 W の方向 ϕ は 30～90 度の範囲で変更できるようにした。個々の実験に際しては、方向 ϕ を一定にして荷重 W を静かに増加してゆき、最後に弾性座屈を生ぜしめた。荷重を増加させなくても、模型先端のたわみが限りなく進行しようとするときの荷重を、座屈荷重の実験値とした。

3.2 実験結果および検討

座屈荷重の実験値を図 5～7 に示す。この結果から次のことがいえる。

(1) 模型 II は模型 I の横材の剛性を小さくしたものである。座屈前にはいずれの模型の横材にも、応力はほとんど生じていなかった。しかるに模型 II の座屈荷重は模型 I のものより 50～75% 低下した。このように横材の剛性が座屈荷重に及ぼす影響は大きいと考えられる。

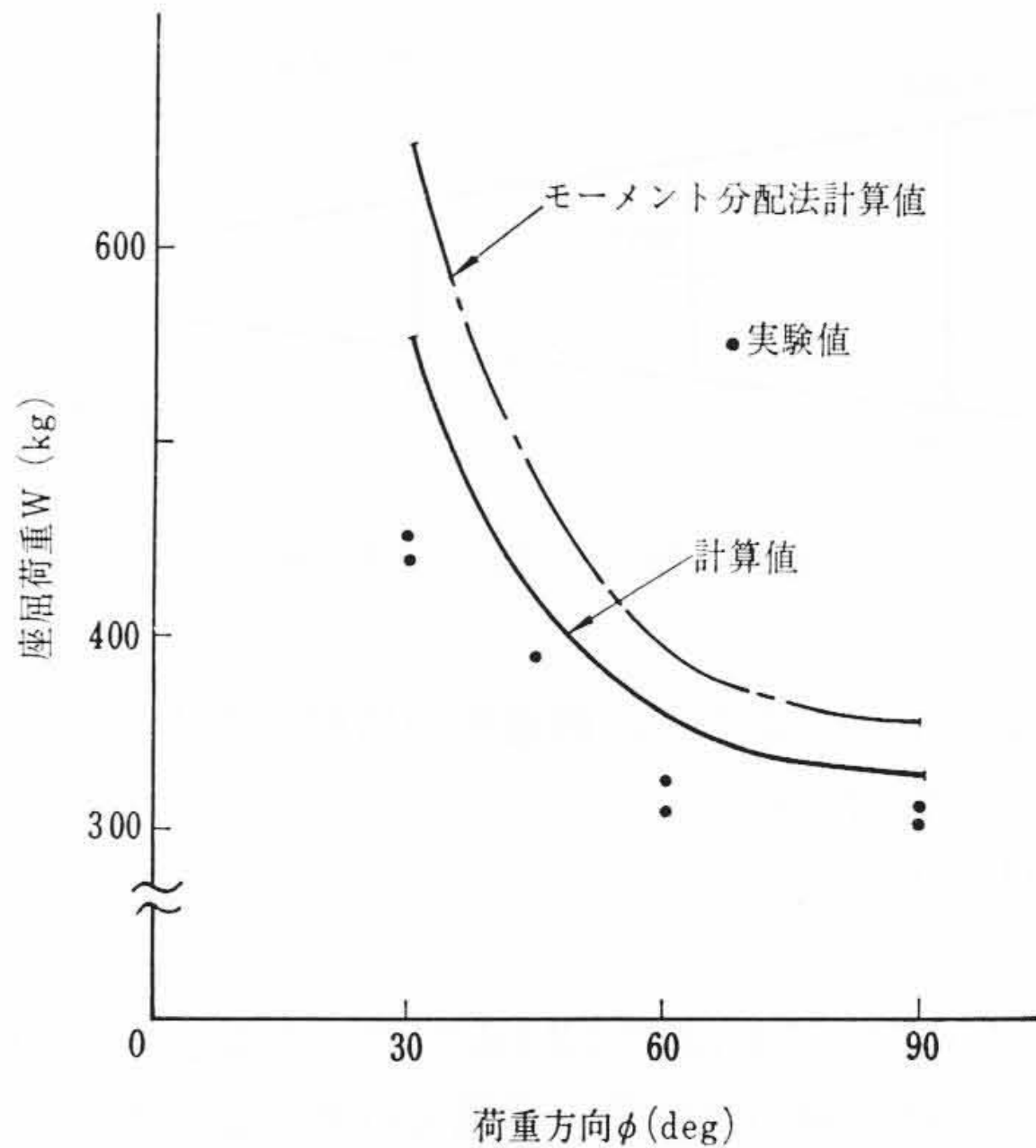


図 5 模 型 I の 結 果

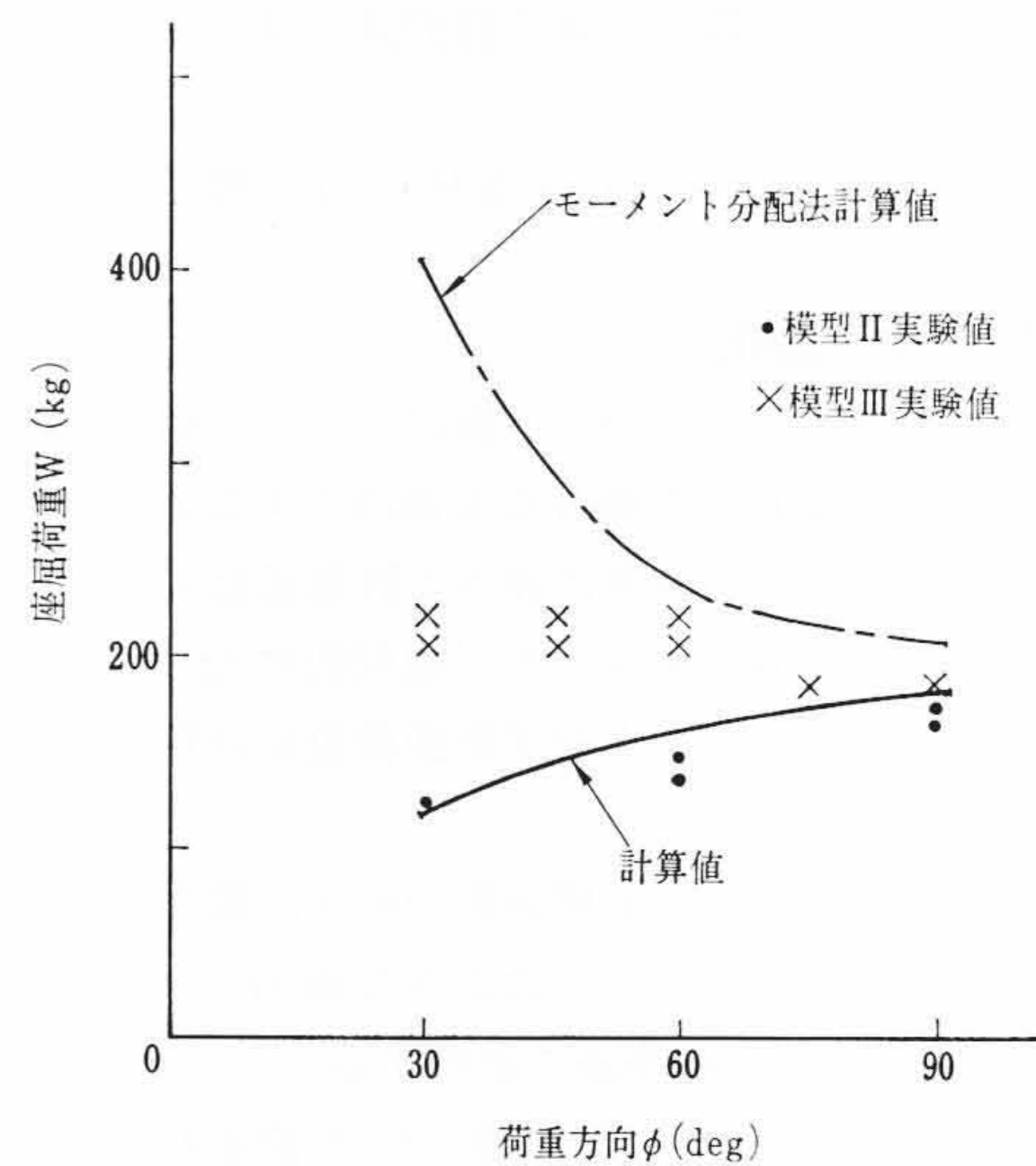


図 6 模 型 II, III の 結 果

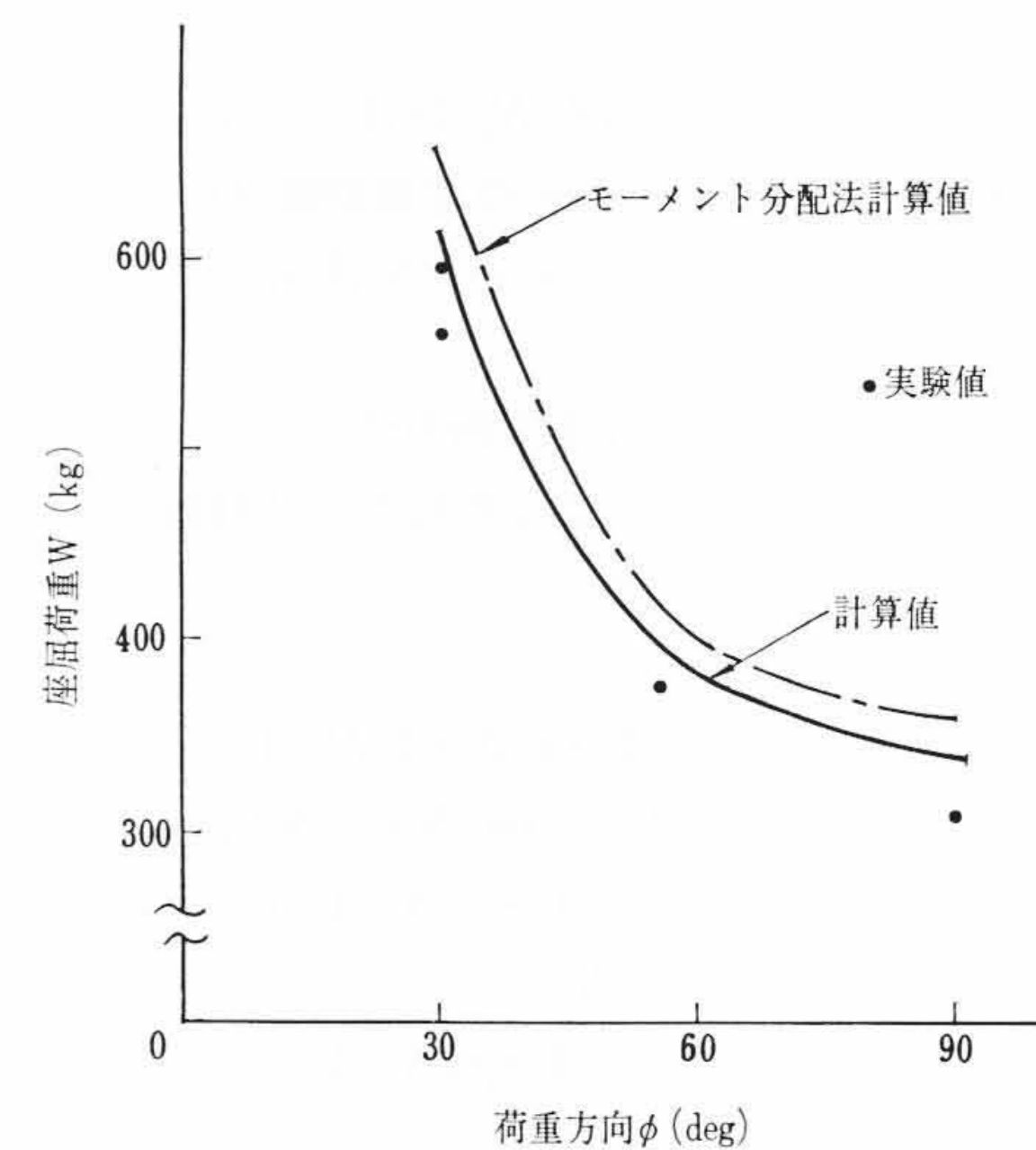


図 7 模 型 IV の 結 果

(2) 模型 II と III の実験値を比較してわかるように、ガセットプレートをつければ座屈荷重を高めるうえに非常に効果がある。

(3) 構成部材が細くなると、部材単体のオイラー座屈荷重よりも低い荷重で全体座屈を起こすことがある(模型 II)ので注

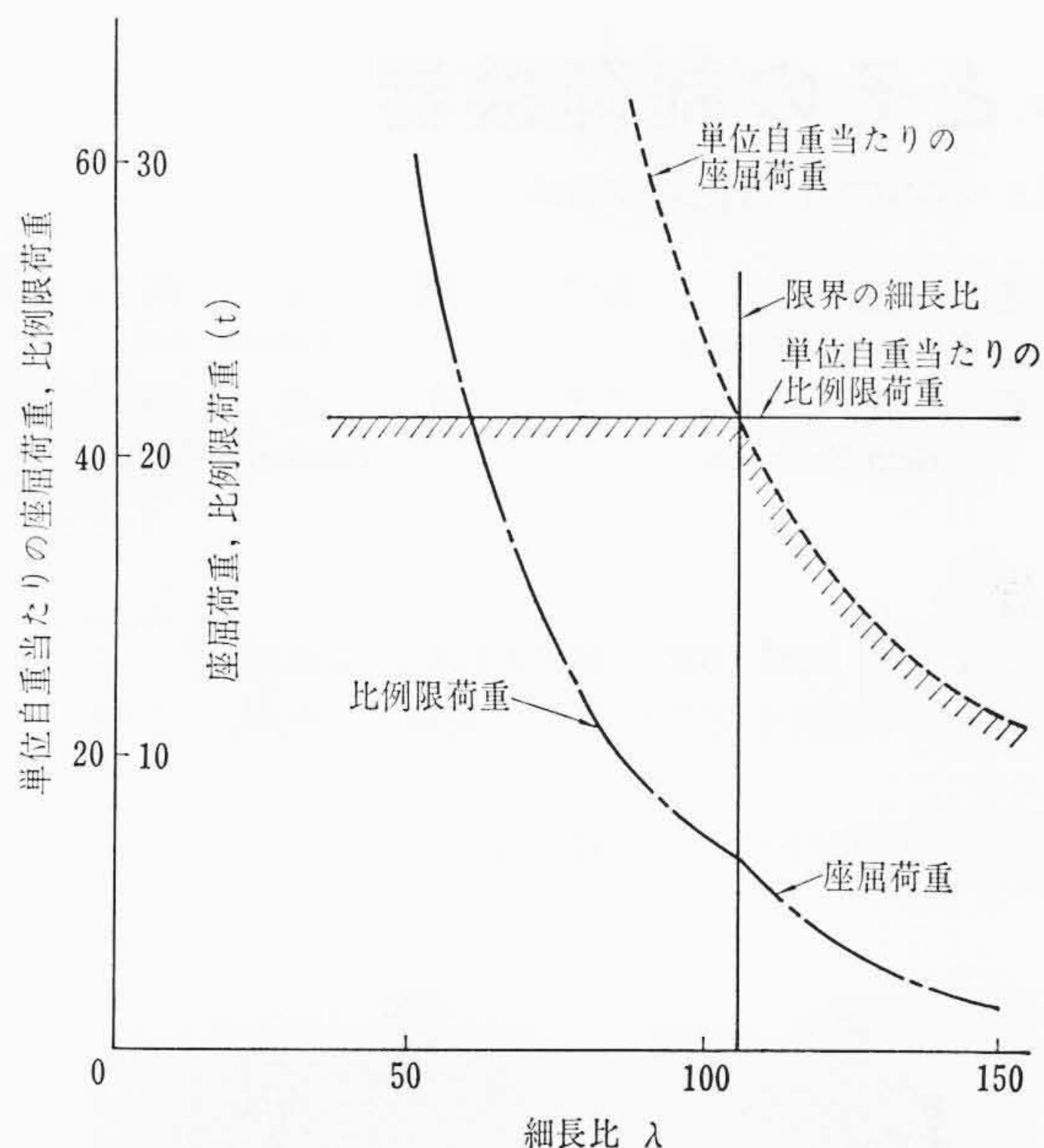


図8 横材数3, 断面二次モーメントの比0.7の結果

意を要する。また模型ⅠやⅣの場合には、このオイラー座屈荷重に対して1.7~2.2倍の座屈強さがあるから、オイラーの式で設計計算をするのは経済的でない。

- (4) 模型の座屈荷重(実験値)を模型重量で割った値を比較すれば、表2のようになる。ただし模型Ⅰの $\phi=30$ 度の場合を基準(1.00)として示した。この表から、模型Ⅰ、Ⅳの値が高く、経済的であることがわかる。座屈荷重を高めるには、部材断面形状の選択が重要である。

3.3 計算結果と実験結果との比較

前述の計算プログラムによる計算結果を図5~7に実線で示した。これを見るといずれの模型に対しても計算値は実験値よりもやや大きくなっている。しかし、傾向はよく合っているので計算値の0.9倍を座屈荷重とするなどの補正を行えば、この計算方法で構造物の座屈荷重は実用上十分な精度で求められると思う。なお、図式計算による比較的簡単な方法としてモーメント分配法⁽³⁾⁽⁴⁾があるので、これによっても計算をした。計算結果(節点は移動しないとした)は図5~7に鎖線で示すとおりであるが、部材の剛性の小さい構造物では実際とかなり違っている。このことより、ラーメン構造物の座屈荷重に及ぼす節点変位の影響はかなり大きいといえる。

以上の計算において縦弾性係数 E は $21,000 \text{ kg/mm}^2$ であると仮定した。

4. 経済的構造に関する検討

ここでは、計算プログラムの使用の一例として次に述べる範囲内で経済的な構造について検討した。すなわち構造物は全長が $9,950 \text{ mm}$ で先端の角度 γ が 10 度のものとし、これに $\phi=60$ 度で荷重が加わるものとする。ここで部材の断面形状は、すべて(高さ):(幅):(板厚) $=40:20:3$ のⅠ形であるとし、面内の曲げに対して断面二次モーメントの大きい方向に部材を用いることにする。これに横材数を等間隔に3, 5, 8本とした場合、圧縮材の断面寸法を細長比が50, 80, 110, 150となるようにした場合、および圧縮材の断面二次モーメントに対し他部材の断面二次モーメントの比が0.4, 0.7, 1.0とした場合の組合せから得られる36種類の構造について座屈荷重を求めた。

計算により得られた結果に補正係数0.9を乗じたものを座屈荷重とした。この座屈荷重をそれぞれの構造物の自重で除した単位自重当たりの座屈荷重で経済性を比較し、次のことがわかった。

- (1) 細長比 λ が小さくなれば単位自重当たりの座屈荷重は大きくなる。本計算の範囲では、 $\lambda=50$ のものに対して $\lambda=150$ のものは約10分の1程度となる。
- (2) 圧縮部材の断面二次モーメントに対する引張材、横材の断面二次モーメントの比が小さくなると、単位自重当たりの座屈荷重は概して小さくなる。
- (3) 横材数が多くなると、単位自重当たりの座屈荷重は小さくなる。横材数3本の場合に対して8本の場合は約2分の1となる。

以上は全体的な傾向についてみたのであるが、次に各構造物のうち自重がほぼ等しいものを選び出して座屈荷重を比較してみた。その結果、同一重量であっても座屈荷重は2~3倍程度にもなる場合があることがわかった。

本計算法では構造物全体の弾性座屈荷重を計算している。しかし実際の構造物ではこの全体弾性座屈を生ずる以前に、ほかの破壊様式で破壊する場合もある。ここでは簡単のため、比例限 40 kg/mm^2 の材料を使ったとし、構造物中の部材応力がこの比例限以下でなければならないとする。そしてこの応力を生ずるような荷重を比例限荷重と呼ぶことにする。こうすると、構造物に加え得る荷重はさきに述べた座屈荷重とこの比例限荷重とのうちの小さいほうである。単位自重当たりの座屈荷重は細長比が小さくなると急激に大きくなっていくが、単位自重当たりの比例限荷重は細長比の変化に対して、本構造の場合には一定となる(図8参照)。したがって、今回の検討の範囲では単位自重当たりの比例限荷重が最大となる範囲すなわち限界細長比以下の範囲が経済的である。

今回の検討の中で最も経済的なものを選ぶと横材数3, 断面二次モーメントの比が0.7の場合である。図8にこの場合の細長比と荷重の関係を示す。これより、細長比は106以下がよく、その範囲では経済性は等しい。したがって、この図よりたとえば30tの荷重を受ける構造に対しては細長比を50にする、というようにして経済的な構造を定めることができる。

5. 結 言

以上述べたことを要約すれば次のようである。

- (1) 撓度撓角法によって、横材を有する三角ラーメンの座屈荷重を計算する電子計算機用プログラムを作成した。
- (2) プログラムは、インプットデータの読込み、計算式などすべて一般形で表わし、任意の部材数の場合が計算できるようにした。
- (3) 模型4個に対する実験値と電子計算機による計算値とを比較検討した結果、このプログラムが実用に供しうることがわかった。
- (4) 実験結果および36例の計算結果より、次のことがわかった。
 - (a) 横材の剛性が座屈荷重に大きな影響を及ぼす。
 - (b) 構成部材が細くなると、部材単体のオイラー座屈荷重よりも低い荷重で座屈を起こすことがある。
 - (c) 同一重量の構造物でも座屈荷重は数倍も異なる場合がある。

終わりに臨みご指導をいただいた東京大学宮本博教授ならびに日立製作所神奈川工場松岡潤氏に厚く感謝する。

参 考 文 献

- (1) J. Ratzersdarker: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken (1936, Springer)
- (2) チェモシエンコ: 座屈理論(昭-29, コロナ社)
- (3) N. J. Hoff: J. of the Aeronautical Sciences (Jan. 1941)
- (4) N. J. Hoff, B. A. Boley, S. V. Nardo, S. Kaufman: Trans, ASCE (1951)