

# 計算機による鋳物の凝固速度の推定

## Application of Computer in Predicting Rate of Solidification of Casting

新 山 英 輔\*  
Eisuke Ni'iyama

### 要 旨

鋳造方案設計の参考資料として鋳物の凝固速度、あるいは凝固パターンを求めるために数値解法に基づき、電子計算機によって計算する方法を開発した。原理、プログラムの内容、数値解と解析解の比較、実測値との比較について述べ、応用例として鋳鋼平板における押湯効果、端面効果、冷金効果、冷金に対する中間砂層の影響について計算した結果を述べた。

### 1. 緒 言

鋳物技術者の重要な任務のひとつは、ひけのない鋳物を作ることにある。そのためにはよい溶湯を作る必要性もさることながら、鋳造方案の正しい設定が最もたいせつである。鋳造方案にはおもに湯口方案と、押湯や冷金の方案とがあり、ひけの防止には特に後者、すなわち凝固の方向性をコントロールする諸方策の検討がたいせつである。押湯や冷金のつけ方については種々の規準や計算図表があるが、鋳物の形状が複雑になるにつれてこれらの規準の適用が困難になり、結局は実際に試作してみてひけが発生したならば方案を修正するという場合が多い。したがってそこには試行錯誤のむだがあり、それを救うために経験や勘のはいりこむ余地がまだ多いのが現状である。この状態からぬけ出るためには押湯効果の一般法則などだけでなく、個々の形状の鋳物がどの部分からどのような順序で凝固していくかを推定することができれば、これが最も有効な設計資料になるであろう。

凝固速度あるいは凝固パターンの推定には種々の手段がある<sup>(1)</sup>。まず厳密な解析的 (analytical) な計算がある<sup>(2)</sup>。これは単純な形状と単純な熱的性質をもった系に対しては最も正確な解を与える。また解が数式の形でまとまっているから各因子が結果にどのように影響するかを定性的にひとめでみることができる。しかし形状や、熱的性質や境界条件が複雑になると解析的な取り扱いほとんど不可能になる。次にアナログ的な推定法がある。最も一般的なものは系をいくつかのブロックにわけ、各ブロックの熱的性質に電気的性質を対置させて回路を組み、各点の電圧から原系の温度を推定する方法である。このほかにも水流によるアナログとか、電解質中の電圧によるアナログなどもある。さらに透明ワックスモデルの凝固観察も一種のアナログ推定法といえる。このうち電気回路による方法は原理的には複雑な形状の鋳物にも適用でき、境界条件もかなり任意に与えることができるが、それに比例して演算器の数が増し、結線作業や測定が複雑になり、計算機の価格も膨大なものになる。第3の手段として図式計算法がある。これも簡便ではあるが二次元以上の複雑形状に適さない。第4の手段として数値的 (numerical) な計算法がある<sup>(1)(3)(4)(9)</sup>。これも系をブロックにわけ各ブロック間の熱収支から温度変化を計算するもので、数学的には偏微分方程式を差分方程式に書きなおして解くことになる。任意の形状、熱的性質、境界条件を与えることができ、精度もブロックを細分することにより十分に向上させることができる。デジタル式の大形電子計算機が利用できるようになったため、この方法が実用的になってきた。アナログ計算機のように凝固計算用の専用機をおく必要もなく、データの投入も一定の書式に従って記入するだけでよい。

本報では大形電子計算機 (HITAC 5020) を利用した数値解法によ

\* 日立製作所日立研究所

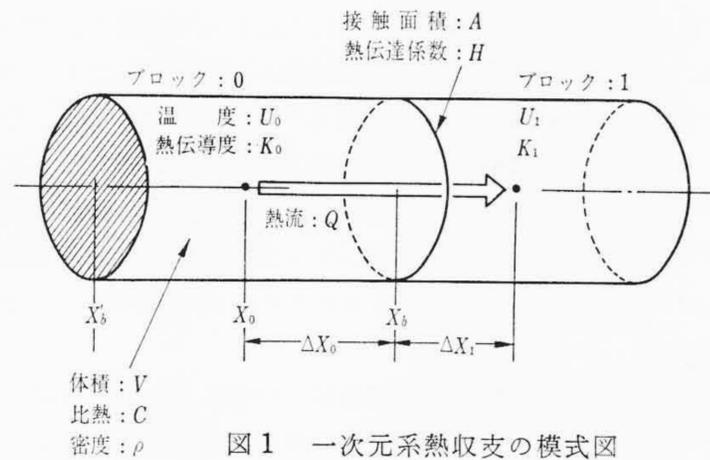


図1 一次元系熱収支の模式図

り鋳物の凝固速度あるいは凝固パターンを推定する方法についてやや詳細に説明し、さらに二、三の計算例を紹介し、最後に今後の方向について展望する。

### 2. 計算方法

#### 2.1 原 理

用いる原理は従来のもの<sup>(3)(4)(9)</sup>と類似しているが、ここではできるだけ整理された形で説明しよう。図1のような一次元の系で時間  $T$  から  $T + \Delta T$  の間に定常熱流を想定し、ブロック0から1へ流れる熱量  $Q$  を考えると

$$Q = \frac{A(U_0 - U_1)\Delta T}{(\Delta X_0/K_0) + (1/H) + (\Delta X_1/K_1)} \dots\dots\dots (1)$$

この間に0の温度が  $U_0$  から  $U_0'$  になったとすれば失った熱は

$$Q = V\rho C (U_0 - U_0') \dots\dots\dots (2)$$

収支関係から二つの  $Q$  を等置して変形すれば新しい温度  $U_0'$  は過去の温度  $U_0, U_1$  の陽の関数として与えられる。

$$U_0' = G_1 U_1 + G_0 U_0 \dots\dots\dots (3)$$

ただし

$$G_1 = A\Delta T / V\rho C \{(\Delta X_0/K_0) + (1/H) + (\Delta X_1/K_1)\} \dots\dots (4)$$

$$G_0 = 1 - G_1 \dots\dots\dots (5)$$

(4) 式の  $A$  は接触面積、 $\Delta T$  は時間ステップ、 $V\rho C$  はブロック0の熱容量、かっこ内はブロック0と1の間の熱抵抗である。熱抵抗は両ブロックの内部抵抗  $\Delta X/K$  と境界抵抗  $1/H$  の和になっている。 $H$  は境界の伝熱量が面の両側の温度差に比例するとしたときの伝達係数 ( $\text{cal/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{deg}$ ) である。図2のようにブロック0の周囲に  $i$  個のブロックが隣接しているときにも同様に(3)式の代わりに

$$U_0' = \sum_{i=0}^i G_i U_i \dots\dots\dots (6)$$

ここで  $G_i$  は(4)式の1を  $i$  に置換したもので、 $G_0$  は次式で与えられる。

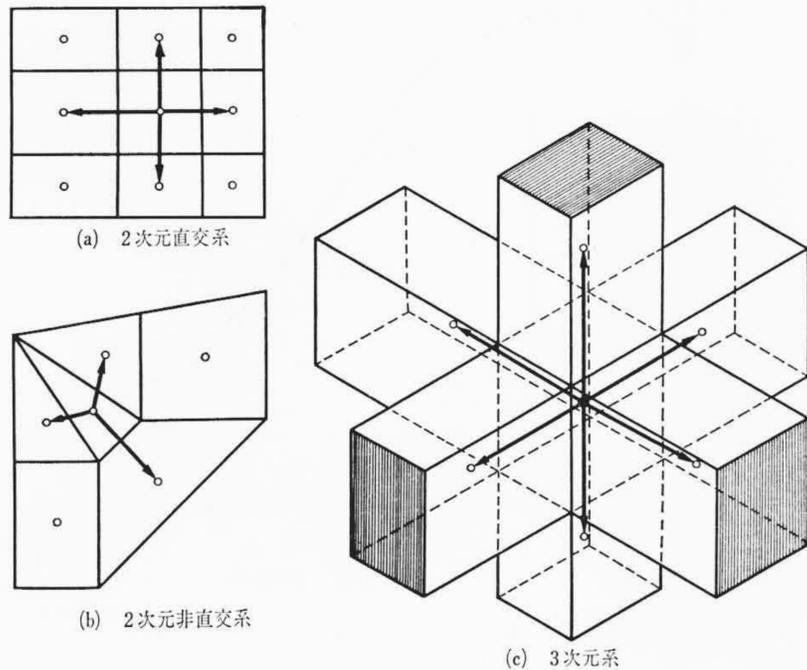


図2 ブロック区画の例

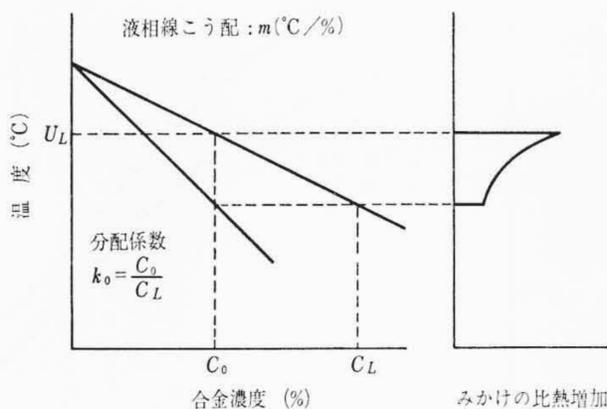


図3 2元合金の凝固潜熱によるみかけ比熱の増加

$$G_0 = 1 - \sum_{i=0}^i G_i \quad \dots\dots\dots(7)$$

$G_i$ は第*i*番目の隣接ブロックの影響を示す係数であり、 $G_0$ はブロック0自身の影響を示す係数である。物理的内容から当然

$$G_0 \geq 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

でなければならない、これを(6)式が発散しないための必要十分条件とみなす<sup>(9)</sup>。Henzel氏ら<sup>(3)</sup>は発散防止のため後進差分法を用いているがわれわれはその必要なしと考えた。(4)、(7)式から明らかのように(8)式という条件は区画を細かくすればそれに応じて $\Delta T$ をある限度以下に小さくしなければならないことを意味する。細かくすれば計算結果は正確になるが計算所要時間は区画幅の1~3乗に反比例して大となる。このような $\Delta T$ との関係を満足しさえすればブロックは等分される必要はなく、図2(b)のように非直交系でもよい。非直交のとき注意すべき点は各ブロックの重心の近くに計算点を選ぶことと、接触面積を傾角に応じて補正することである。なお普通は結節点(node)を決めてからブロックの境界線を定める<sup>(9)</sup>が、ここでは便宜上逆の手順にした。

こうして与えられた系を適当なブロックにわけ、(8)式を満足するように $\Delta T$ の値を決め、初期温度分布と境界条件を定めれば(6)式によって $\Delta T$ ごとの温度分布を逐次求めることができる。

2.2 計算プログラムの内容

上述の原理に基づいてわれわれはこれまでに二つの凝固計算用の電子計算機プログラムを開発した。その一つは図2(b)(c)のような三次元を含む任意のブロック区画が可能でここではプログラムAと呼ぶ。もう一つは図2(a)のように一、二次元系を直交区画するだけに限られプログラムBと呼ぶ。Bを使える系の形状は限定さ

表1 形状による変数の修正 ((4)式参照)

	距離 $\Delta X$	接触面積 $A$	体積 $V$
平板	$X_b - X_0$	高さ×単位厚	$A \times (X_b - X_0)$
円柱	$X_b \ln(X_b/X_0)$	高さ× $2\pi X_b$	高さ× $\pi(X_b^2 - X_0^2)$
球	$X_b^2(1/X_0 - 1/X_b)$	$4\pi X_b^2$	$\pi(4/3)(X_b^3 - X_0^3)$

れるがデータ記入が容易である。テーパやアールを含む形状の系ではデータ記入がやや煩雑であるがAを使用しなければならない。プログラムの容量としてはAは最大100ブロック、Bは900ブロックを扱えるが、計算機的能力としては最も大きくすることが可能である。

プログラムの内容にもう少し立ち入って説明しよう。計算の主目的は凝固問題だから凝固潜熱の取り扱いが重要であるが、与えられた合金の凝固温度範囲、すなわち液相線から固相線の間潜熱(L cal/g)を適当に配分して真の比熱に加算し、固液共存相のみかけの比熱を大きくしてやればあとは普通の計算法でよい。たとえば図3のような2元合金の平衡凝固の際には真の比熱 $C_i$ に対してみかけの比熱 $C_a$ は

$$C_a = C_i + \frac{mC_0}{1-k_0} \cdot \frac{L}{(mC_0 + U_L - U)^2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

で与えられる。温度Uの低下とともに $C_a$ が小さくなるのがわかる。液相線を切るステップでは液相の比熱を用いて温度降下が計算されるので降下分のうち液相線以下の分だけは液相線付近の固液相の比熱を用いて補正するようにした。固相線についても同様である。純金属も凝固範囲の非常に狭い(たとえば1 deg)合金とみなすことにより合金と同じ扱い方で処理する。

系を構成する材料の種類は任意であるがプログラム上では鋳造金属の液、固液、固相の3種とそのほか(砂、冷金など)3種に一応限定した。密度は材料によって一定とし、比熱と熱伝導度は温度の関数とした。関数の形としては任意数の温度点におけるそれらの値を与えておき、その中間温度は直線で内挿(ないそう)されるようにした。温度点は多いほど関数がスムーズになるがわれわれは最大8点で十分と考えた。

境界条件の設定法としては特定ブロックの温度を固定するか、または特定の面を断熱とみなした。固定温度は任意時間に切換可能とすることにより、押湯の電弧加熱の断続などを扱えるようにした。特定面の熱伝達係数も時間により切換可能とし、鋳型外面の冷却条件の変化などを扱えるようにした。

点对称の球状の系とか軸対称の円柱状の系はいずれも立体ではあるがそれぞれ1個および2個の座標軸で表現できるのでプログラムBではこれを一、二次元として扱った。ブロックは同心球、同心円で区画されるが、仮に各ブロックの厚さを一定にしても中心からの距離とともに体積と表面積が増加するので、表1のように(4)式の $\Delta X$ ,  $A$ ,  $V$ などが自動的に修正されるようにした。

2.3 計算機の使用

入力データ記入法としては、プログラムAでは $\Delta T$ , 計算打切時間T, などの記入について各材料の番号と熱的性質を記し、最後にブロックごとに番号, 材料, 体積, 初期温度, 隣接ブロックの番号, それとの接触面積と距離などを記入する。プログラムBでは一般事項と熱的性質の記入後, XY軸上の区画線の位置, 材料と初期温度の分布, 各ブロックのX面, Y面の熱伝達係数を記す。Aではブロックごとに全変数を記入するのに対し, Bでは変数ごとにまとめるので記入が容易である。

計算すべき鋳物の形状が与えられれば二次元ならば数分ないし数十分でデータシートに記入してカードパンチャに渡すことができ

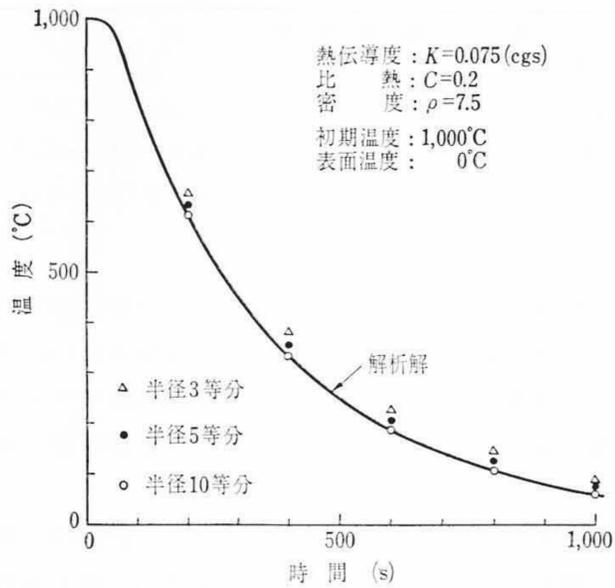


図4 円柱の冷却

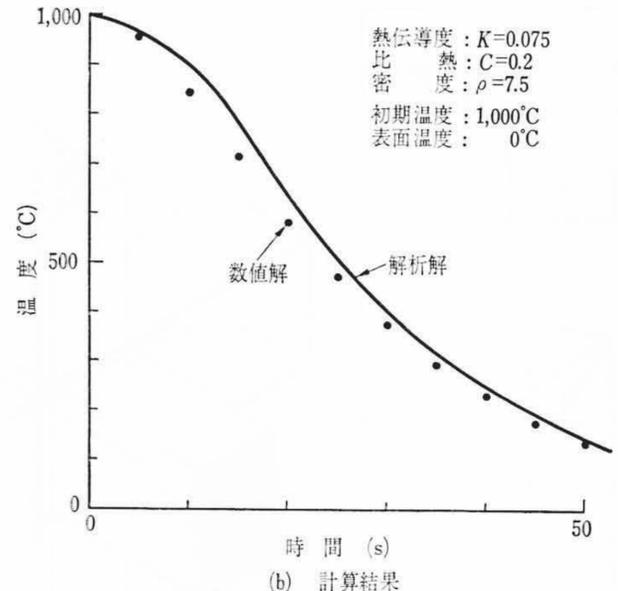
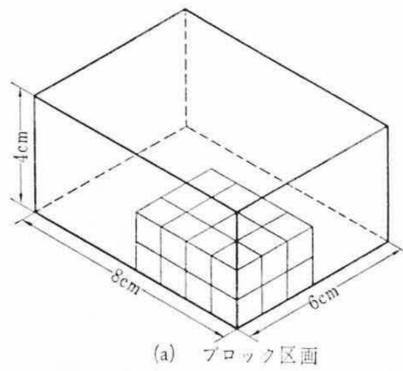


図5 直方体の冷却

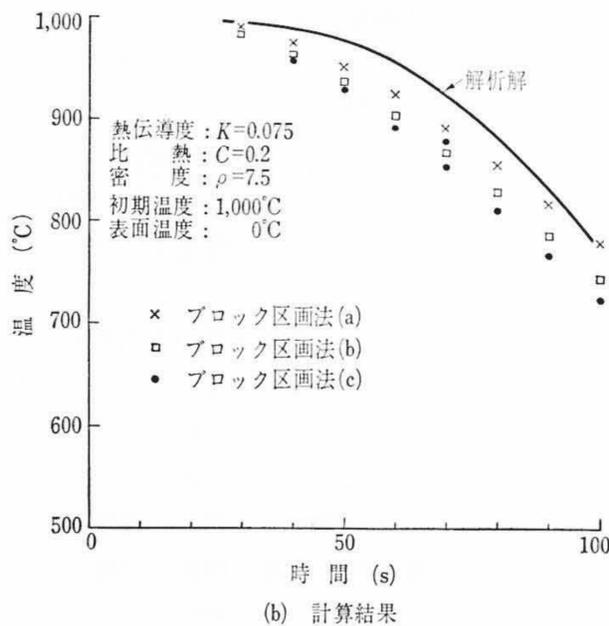
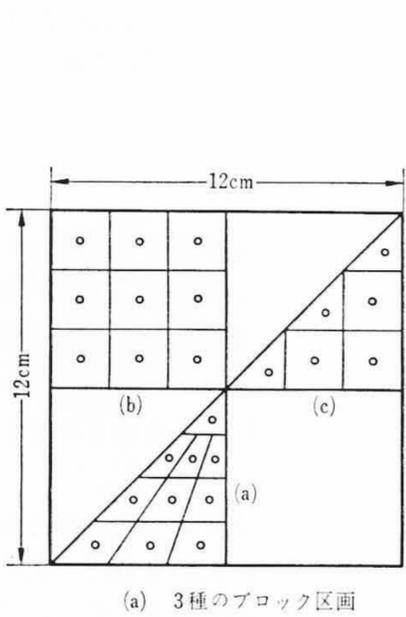


図6 角柱の冷却

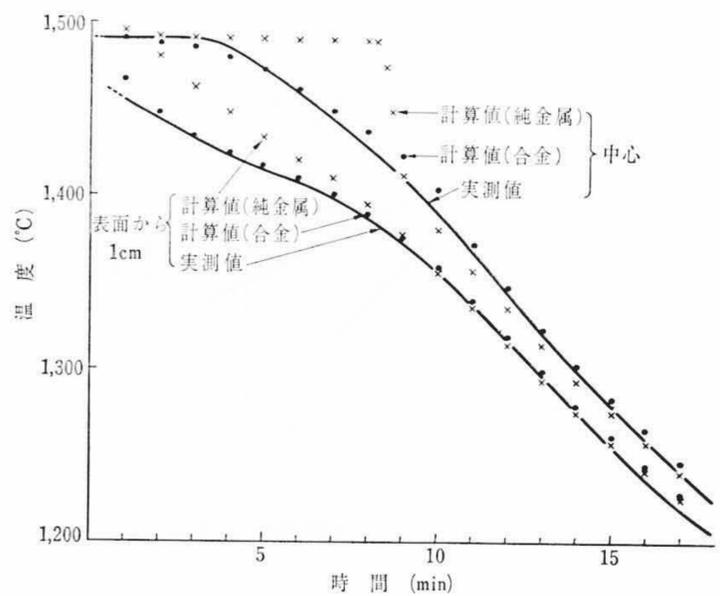


図7 砂型に铸込んだ直径10cmの鋼の冷却曲線

る。大形計算機が手近にあれば同日中に結果が得られる。計算機使用時間は数秒ないし数十秒が普通である。これらの数値計算は数年前の文献<sup>(3)</sup>に比べると大幅に短縮されているが、それは主として計算機自体の進歩によるものである。

### 3. 計算結果の検討

#### 3.1 解析解との比較

解析的な手法で厳密な解が得られている二、三の簡単な場合についてわれわれの数値解法の結果を比較してみた。図4は一定温度の無限長円柱を冷却したときの温度変化である<sup>(5)(6)</sup>。熱的性質は温度によらず一定としプログラムBによった。半径を10等分したときの数値解は十分な精度をもっていることがわかる。次に図5(a)のような直方体の冷却について対称性から1/8の部分を取り出し、24個の立方体に分けてプログラムAによって計算した。図5(b)は直方体の中心にいちばん近い立方体の中心温度と、解析解による直方体の中心温度<sup>(6)</sup>を比較したもので、若干の差はあるが、数値解から直方体の中心へ外挿(がいそう)してみると両者はほぼ完全に一致することがわかった。

非直交区画の例として図6(a)のような断面の無限長角柱の冷却時の温度変化を計算した。対称性から断面を8等分して2種の非直交区画(a)(c)を試み、4等分して直交区画(b)を試みた。その結果、図6(b)にみられるように解析解<sup>(6)</sup>と若干のずれはあるが、これは主として各ブロックの中心が角柱の中心から離れているため、外挿すればほぼ完全一致が得られることがわかった。これに

表2 比較試験に用いた鋳鋼の諸性質

組成(%)	C	Si	Mn	Cr	Mo	Ni
	0.67	0.40	0.72	0.89	0.35	0.10
液相線温度(°C)		固相線温度(°C)		凝固潜熱(cal/g)		
1,490		1,380		65		
	密(g/cm <sup>3</sup> )	比(cal/g °C)	熱伝導度(cal/s cm °C)			
液相	7.00	0.2	0.1			
固液共存相	7.25	1.44~0.2	0.1			
固相	7.50	0.2	0.1			
砂	1.70	0.2	0.004			

対し、角柱の場合には中心に一つのブロックをおけばよいように思われようが、その場合はブロックの中心温度はブロックの平均温度を代表しないという意味の誤差がはいつてくることに注意しなければならない。

#### 3.2 実測値との比較

一例として砂型に铸込んだ直径10cm、長さ40cmの円柱鋳鋼の場合について述べよう。鋳型はエアセットケイ砂、鋼は表2の組成のもので、铸込温度は1,500°Cとした。PR熱電対を石英管で保護し、中央部の中心と表面(1cm内部)の温度を測定した。これに対し、十分厚い砂に囲まれた無限長円柱について表2の定数<sup>(4)(7)</sup>により計算を行なった。ここで凝固温度範囲は1 deg(ほぼ純金属)と110 degの二つを仮定したが、図7にみられるように後者は

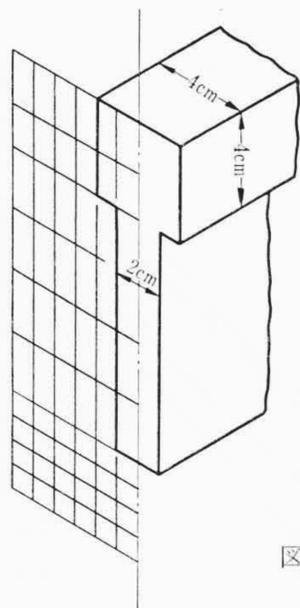


図8 平板鋳物の形状と区画

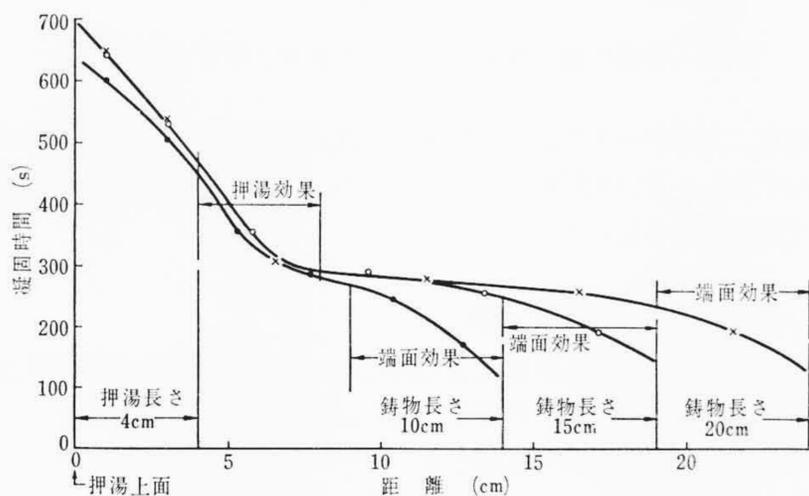


図9 平板における押湯効果と端面効果

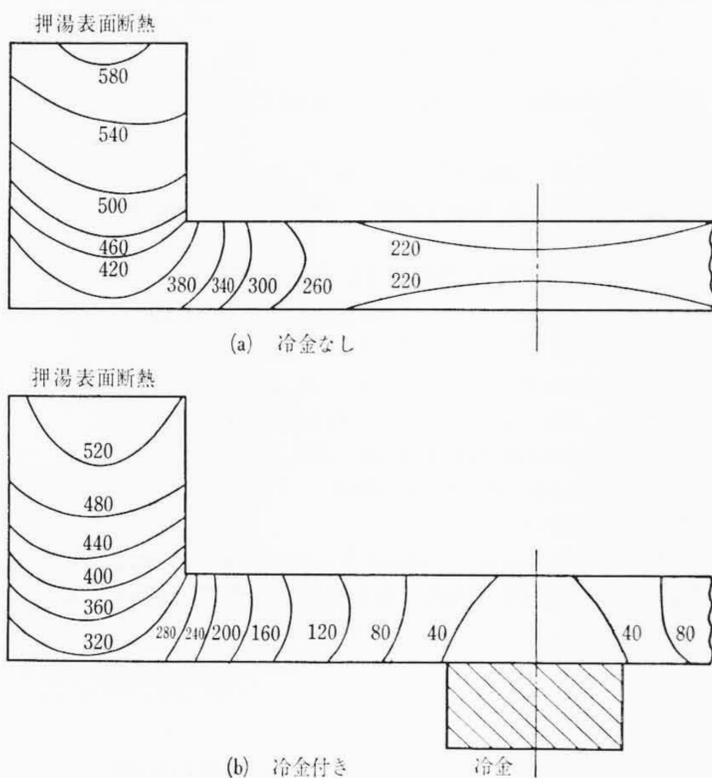


図10 平板における冷金の効果 (鋳物厚さ 2cm) 数字は凝固完了時間 (s) を示す

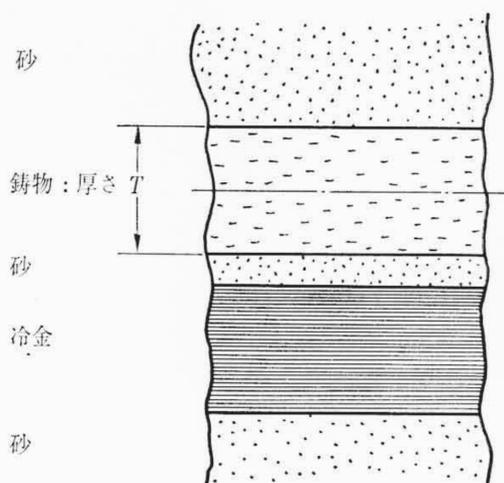


図11 平板鋳物と冷金の配置

表3 応用計算例で用いた定数

液相線温度		固相線温度		凝固潜熱
1,375 °C		1,275 °C		73.2 cal/g
		密度 (g/cm <sup>3</sup> )	比熱 (cal/g °C)	熱伝導度 (cal/s cm °C)
鋳物	液相	7.00	0.15	0.40
	固液共存相	7.25	0.57 ~ 1.31	0.1
	固相	7.50	0.115 ~ 0.140	0.027 ~ 0.070
冷砂	金	7.50	0.20	0.07
		1.70	0.18 ~ 0.28	0.002 ~ 0.004

(注) 範囲を示したものは温度の関数として変化する。

表4 鋳物の凝固時間に対する冷金厚さの影響

冷金厚さ (cm)	鋳物凝固時間 (s)
1	235
2	235
4	230
8	230

(注) 鋳物厚さ: 2cm  
砂層厚さ: 1cm

実測値とかなりよく一致している。前者も凝固完了後はよく一致している。固液共存相のみかけ比熱は図3のような曲線を仮定すべきであろうが、この場合は直線で近似させており、それでも傾向としては十分よい結果が得られることがわかった。

元来表2の諸定数は概略の推定値であるから実測値との一致は予期以上に良かったというべきであろう。むしろこのような比較をくり返して妥当な定数を選ぶようにしていけばよい。なお、測定した鋳物と同じように有限の長さで、湯口が付属した場合についても計算し、無限長の場合との差は問題にならないほど小さいことを確認した。

#### 4. 応用例

##### 4.1 平板における押湯効果と端面効果

表3のような熱的諸定数を仮定した<sup>(1)(7)</sup>。ここでは凝固温度範囲が比較的広く、熱伝導度が低い鋳鋼を想定している。まず図8のように厚さ 2cm で無限の幅をもつ種々の長さの平板について、図示のような区画法で凝固パターンを求めた。長さ方向の凝固時間の変化は図9のようになる。凝固時間曲線に大きいこう配がついた範囲は健全になると考えれば、鋳物の長さにかかわらず押湯効果範囲は約 4cm、端面効果範囲は約 5cm、合計 9cm となる。これは普通鋼において健全な鋳物が得られる長さの限界として実験的に求められた 4.5T (T=肉厚)<sup>(8)</sup> に一致する。

##### 4.2 平板における冷金の効果

表3の定数を用い、厚さ 2cm、長さ 16cm、幅無限大の平板の両端に押湯をつけ、押湯表面を断熱した場合の凝固パターンを求めた。図10は凝固完了時間の分布を示したものである。冷金なしの場合には押湯と押湯の中間に溶湯補給困難の場所があることが推察される。この部分に冷金(絶縁砂層なし)を付けると凝固は完全に方向性になることがわかる。普通鋼の実験結果<sup>(8)</sup>をあてはめれば、健全な鋳物が得られる限界の長さはこの場合、冷金なしで 8cm、冷金付きで 28cm となるから、いま 16cm の鋳物が冷金により健全になるという計算結果が得られたことはこのことからみても妥当である。

##### 4.3 冷金に対する中間砂層の影響

鋳物と冷金の間に適当の厚さの砂の層をおくことによって凝固速度を種々の程度にコントロールすることができる。この場合の砂

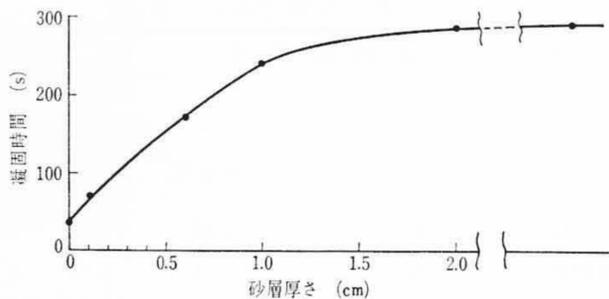


図12 平板の凝固時間に対する冷金表面の砂層厚さの影響 (鋳物, 冷金厚さ2cm)

の厚さの影響について計算した。熱的定数には表3の値を用い、図11のような無限の広さをもつ厚さ1~8cmの鋳物の1面に砂、ほかの1面に冷金を直接または間接に当てた場合の鋳物の凝固時間に着目した。

表4は厚さ2cmの鋳物に厚さ1cmの砂を介して種々の厚さの冷金を付けた場合の凝固時間であるが、冷金の厚さの影響は非常に小さいことがわかる。

図12は厚さ2cmの鋳物に厚さ2cmの冷金を付けたときの凝固時間であるが、砂層の厚さとともに凝固が遅くなり、約2cmでは冷金の効果は全くなくなることがわかる。

図13は種々の厚さの鋳物に対し、冷金を付けない場合、直接付けた場合、0.1および1.0cmの砂を介して付けた場合の凝固速度を示す。冷金は鋳物の厚さと等しいとした。同じ厚さ0.1cmの砂の層でもその断熱効果は薄肉鋳物においてより大きいことがわかる。

### 5. 応用の可能性

ここで述べた諸例では、合金における潜熱の扱い、砂と冷金の組合せの扱い、二次元以上の広がりをもった鋳物の扱い、などに数値計算法の特長が発揮された。このほか電弧加熱、発熱剤、水冷、空冷などを含む場合についても取り扱いが可能である。もちろん、凝固問題に限らず、熱処理時の加熱や冷却の問題にも同じプログラムを利用することができる。われわれも種々の基本的な場合および実製品に関連した多くの計算を実施しているが、やがては日常の鋳造方案業務の一環として組み込まれることになる。

今後の問題点をあげると、まず信頼性の問題がある。計算自体の精度は区画を細かくしさえすれば向上するが、計算に用いる材料の熱的諸定数が正確でないための誤差がむしろ大きい。今後各所で正確な測定値が多数発表されることを期待したいが、われわれとしても種々の鋳物の温度測定結果を計算結果と比較して妥当な定数の選択に努めるべきであろう。

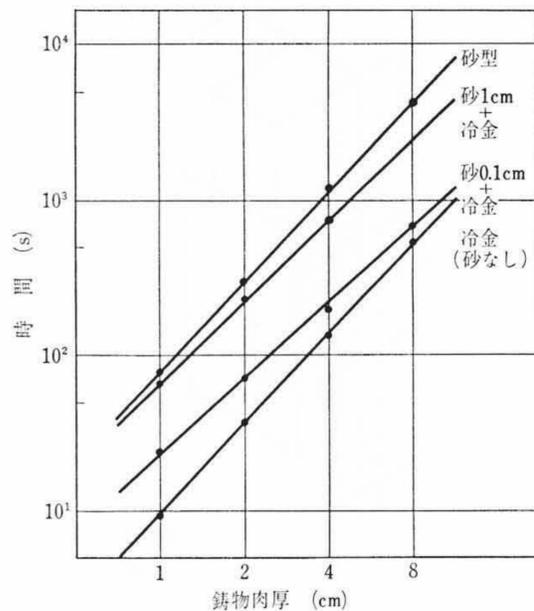


図13 平板の凝固時間に対する肉厚および冷金の影響

他方、入力データ作成上、複雑な三次元形状の系のブロック区画がむずかしいという問題が残っているが、これも適当な簡略化の手法で解決されるものと思う。

### 6. 結 言

以上に述べた原理と手法によりわれわれは種々の鋳物の凝固速度あるいは凝固パターンの計算を行ない、鋳造方案の設定に役立てている。今後、物理定数の整備と入力データ作成の簡略化によりこの手法はいっそう広く実用化され、日常作業に組み込まれていくであろう。

### 参 考 文 献

- (1) R. W. Ruddle: Solidification of Castings, 27 (1957, Inst. Metals)
- (2) 篠田: 鋳物 36, 679 (昭39-7)
- (3) J. G. Henzel, J. Keverian: Proc. Electric Furnace Conf. 12 (1964)
- (4) 益子, 松永: 住友金属 18, 41 (1966-1)
- (5) H. S. Carslaw, J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 200 (1959, Oxford U. Press)
- (6) L. R. Ingersoll, O. J. Zobel, A. C. Ingersoll: Heat Conduction, 185 (1954, U. of Wisconsin Press)
- (7) ASM: Metals Handbook, 313 (1948)
- (8) H. F. Bishop, W. S. Pellini: Tras. Amer. Found. Soc. 58, 185 (1950)
- (9) G. M. Dusenberre: Heat-Transfer Calculations by Finite Differences, 13 (1961, International Textbook Co.)