

タービン翼の振動

小堀 與一* 奥山 勝明** 横田 一郎***

The Vibration of Turbine Blade

By Yoichi Kobori, Katsuaki Okuyama and Ichiro Yokota
Hitachi Laboratory, Hitachi Works, Hitachi, Ltd.

Abstract

The 7th-stage blade of 12,500 kW steam turbine was investigated from both experiment and calculation about its natural frequency and the distribution of amplitude at resonance frequency. Through this investigation the following were known:

- (1) The natural frequency of turbine blade which has been calculated until now, corresponds exactly the experimental value.
- (2) On the amplitude distribution of blade in resonant-vibration, both calculation and obserbation were executed, and then the node and maximum bending point, which are very important from the point of view of the blade strength calculation, were determined.
- (3) At the present, the binding wire is located at the point of maximum amplitude and at the same time the maximum bending point of the second order resonant-vibrotion.
- (4) It is very suitable for the analysis of the natural vibration of turtine blade to apply a method of approximatory calculation in which the blade may be supposed as a conical stick.

〔I〕 緒 言

タービン翼の振動について、従来専ら固有振動数の計算又は実験が行われ、計算式は Rayleigh-Ritz の方法⁽¹⁾或は W. Hort⁽²⁾ の式等大體実験値と一致する結果を興えている。翼の振動應力の計算には固有振動数を正しく知る以外に、共振時の翼の撓み即ち振幅の分布を明

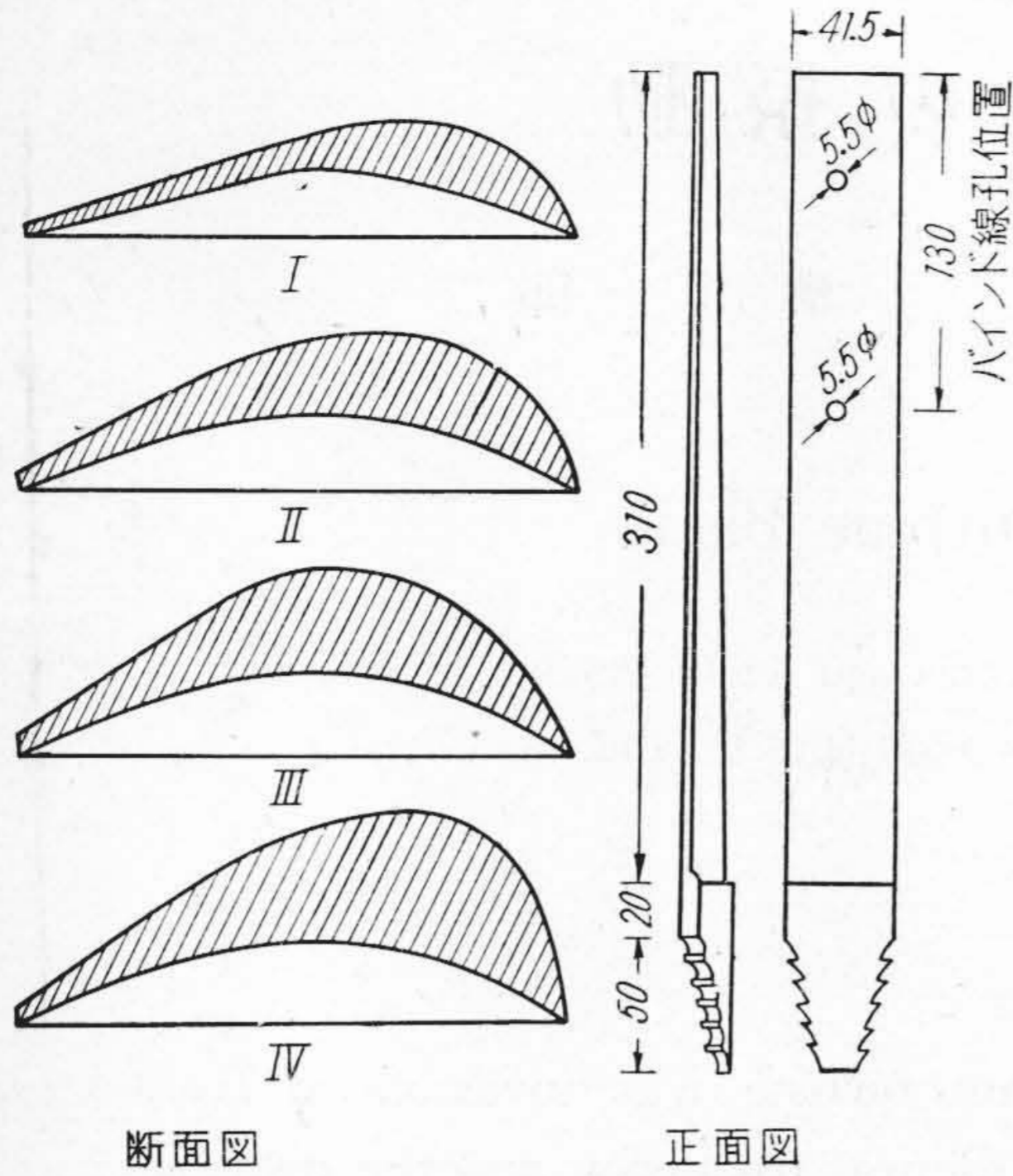
かにする必要がある。この點は従来殆んど顧られなかつたところで、著者は主として實測により共振時の振幅分布を求め、應力の計算上重要な節點及び最大屈曲點を明かにした。又この値に對し、翼に振動方程式を導入して近似計算から検討を加えた。

〔II〕 実験方法並びに装置

供試タービン翼の形狀及び寸法を第1圖に示す。実験装置を第2圖に示す。2枚の翼を同方向に重ね基部を萬

* ** 日立製作所日立研究所

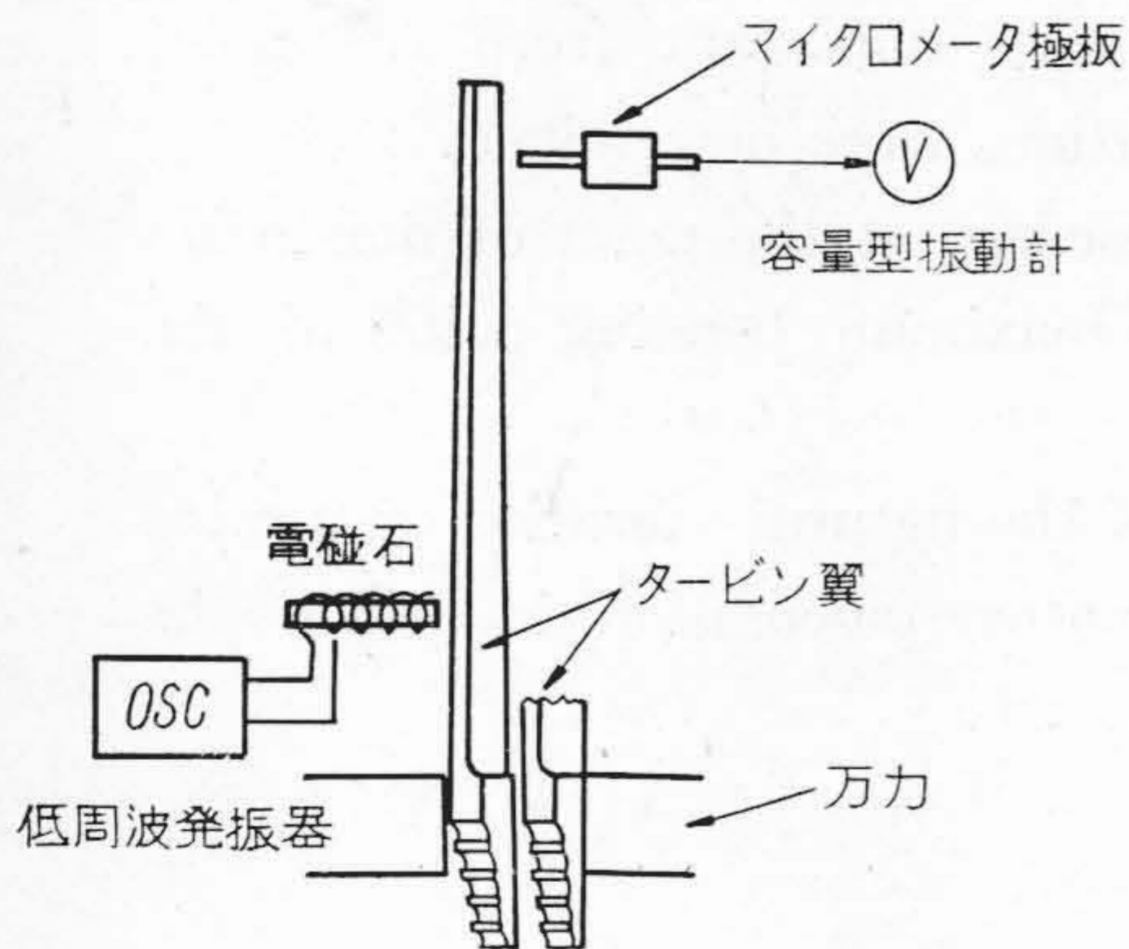
*** 日立製作所日立工場



- 断面図 正面図
- I 断面 (上端より) 0 cm , $A'=1.156\text{ cm}^2$, $I=0.04525\text{ cm}^4$
 - II " (" 10.3 ", $"=1.780$ ", $"=0.1136$ ")
 - III " (" 20.6 ", $"=2.320$ ", $"=0.2058$ ")
 - IV " (" 30.0 ", $"=3.192$ ", $"=0.3888$ ")

第1圖 供試翼

Fig. 1 Blade used for Experiment.



第2圖 實驗裝置

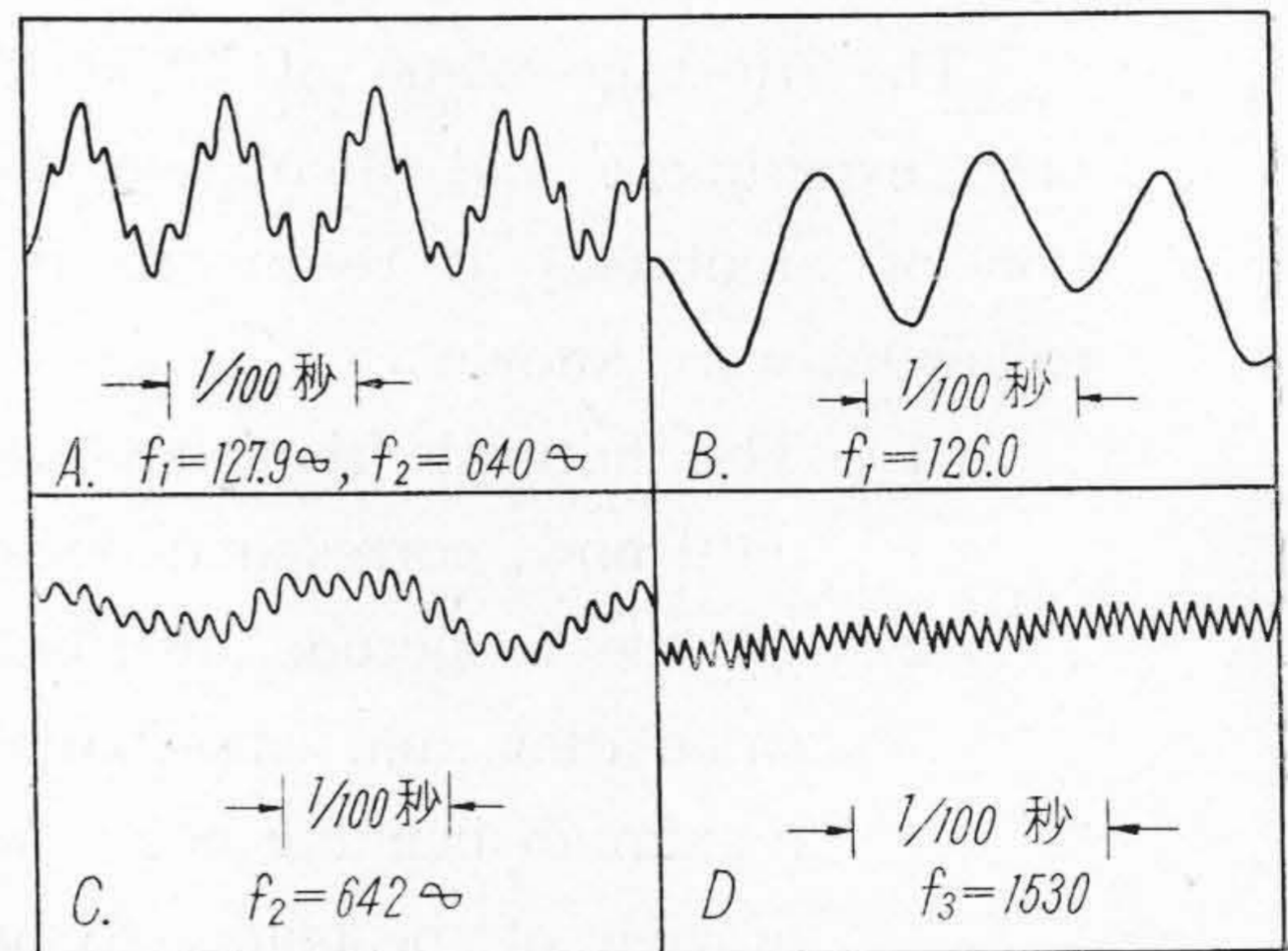
Fig. 2 Apparatus for Experiment.

力で締付ける。翼に強制振動を與えるため、翼の下端より約 $1/3$ 附近を輕打するか、或は下端に接近して設けた電磁石の周波数を C-R 發振器により變えて、翼の固有振動數と等しい振動數で強制力を與える。翼の振動狀況は翼の任意の位置に接近して設けた H 式振動計(容量型振動計の一種)⁽³⁾ の極板(ピックアップ)を通じて電流の

振動に變換し、電磁オシログラフにより記録する。又共振時の振幅分布は共振點において電磁石の出力を一定に保ちつゝ極板を翼の長さに沿つて移動し、豫め振幅較正のなされた直讀式の H 式振動計(本誌別項參照)の指示を讀んで得る。

〔III〕 實驗結果

第3圖に上記實驗方法により固有振動數を測定したオシログラムの一例を、第1表及び第2表に翼の固有振動數並びに振幅分布を測定した結果及び W. Hort の計算式による計算値を示す。



第3圖 固有振動のオシログラム

A: 打撃による自然振動

B, C, D: 電磁石による強制振動

Fig. 3 Oscillograms of Natural Frequency.

A: Natural Oscillation by Strike.

B, C, D: Forced Oscillation by Electromagnet.

第1表 固有振動數(毎秒振動數)

Table 1 Natural Frequency (c/sec).

第1次 f_1		第2次 f_2		第3次 f_3	
實驗	計算	實驗	計算	實驗	計算
127.9	132.1	628	640	1530	1572
127.8	—	629	—	—	—
127.7	—	626	—	—	—
129.0	—	634	—	—	—

計算 1. 固有振動數 W. Hort⁽²⁾ によればタービン翼の圓周方向における固有振動數は

第2表 振幅分布

Table 2 Amplitude Distribution.

測定点, 翼先端より (cm)	1次振動 (mm)	2次振動 (mm)
2.5	5.0×10^{-2}	1.6×10^{-2}
6.0	3.5 "	0 "
10.0	1.5 "	1.3 "
14.0	0.9 "	1.5 "
18.0	0.45 "	1.2 "
22.0	0 "	0.8 "
26.0	0 "	0.3 "

$$f = p/2\pi = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{k}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\rho}} \dots \dots \dots (1)$$

によつて與えられる。ここに

$$k = \text{固定端の回轉半徑} = \sqrt{I_0/A_0} = 0.359 \text{ cm}$$

$$E = \text{翼材のヤング率} = 2.1 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = \text{翼材の密度} = 7.86 \text{ g/cm}^3$$

$$l = \text{翼長} = 31.0 \text{ cm}$$

$$I_0 = \text{固定端の断面2次モーメント} = 0.417 \text{ cm}^4$$

$$A_0 = \text{固定端の断面積} = 3.25 \text{ cm}^2$$

α は翼の形状並びに振動の型に関する定數で、断面の面積及びモーメントによつてきまり、次式によつて與えられる。

$$\alpha_i = \alpha_{0i} \sqrt{\frac{1 - m\beta_i - m'\beta'_i}{1 - nr_i - n'r'_i}} \dots \dots \dots (2)$$

α_{0i} は均一断面片持軸に對する定數 α の値で、 i は次數を示す。 m, m', n 及び n' は

$$m = \frac{I_0 - I_1}{I_0}, \quad m' = \frac{1}{I_0} \left(\frac{I_0 + I_1}{2} - I_M \right)$$

$$n = \frac{A_0 - A_1}{A_0}, \quad n' = \frac{1}{A_0} \left(\frac{A_0 + A_1}{2} - A_M \right)$$

第3表 $\beta_i, \gamma_i, \beta'_i$ 及び γ'_i の表 (テイモシエンコ工業振動學、谷下譯 323 頁より)

Table 3 Table for $\beta_i, \gamma_i, \beta'_i$ and γ'_i (from Vibration Problems in Engineering by S. Timoshenko, tr. I. Tanishita, p. 323).

i	β_i	γ_i	β'_i	γ'_i
1	.193	.807	.493	.493
2	.405	.594	.703	.703
3	.468	.532	.661	.661

で、 $\beta_i, \beta'_i, \gamma_i, \gamma'_i$ は次數に關して Hort の與えた表⁽²⁾があつて、それは第3表の如きものである。添數 0, 1 及び M はそれぞれ翼の根本、先端、中點における値を示し、 $A_1 \dots \dots I_M$ の値は

$$A_1 = \text{翼先端の断面積} = 1.156 \text{ cm}^2$$

$$I_1 = \text{ " の断面2次モーメント} = 0.0453 \text{ cm}^4$$

$$A_M = \text{翼中點の断面積} = 2.050 \text{ cm}^2$$

$$I_M = \text{ " 断面2次モーメント} = 0.1595 \text{ cm}^4$$

である。以上より翼の1次、2次及び3次の固有振動數を計算すると第4表のようになる。

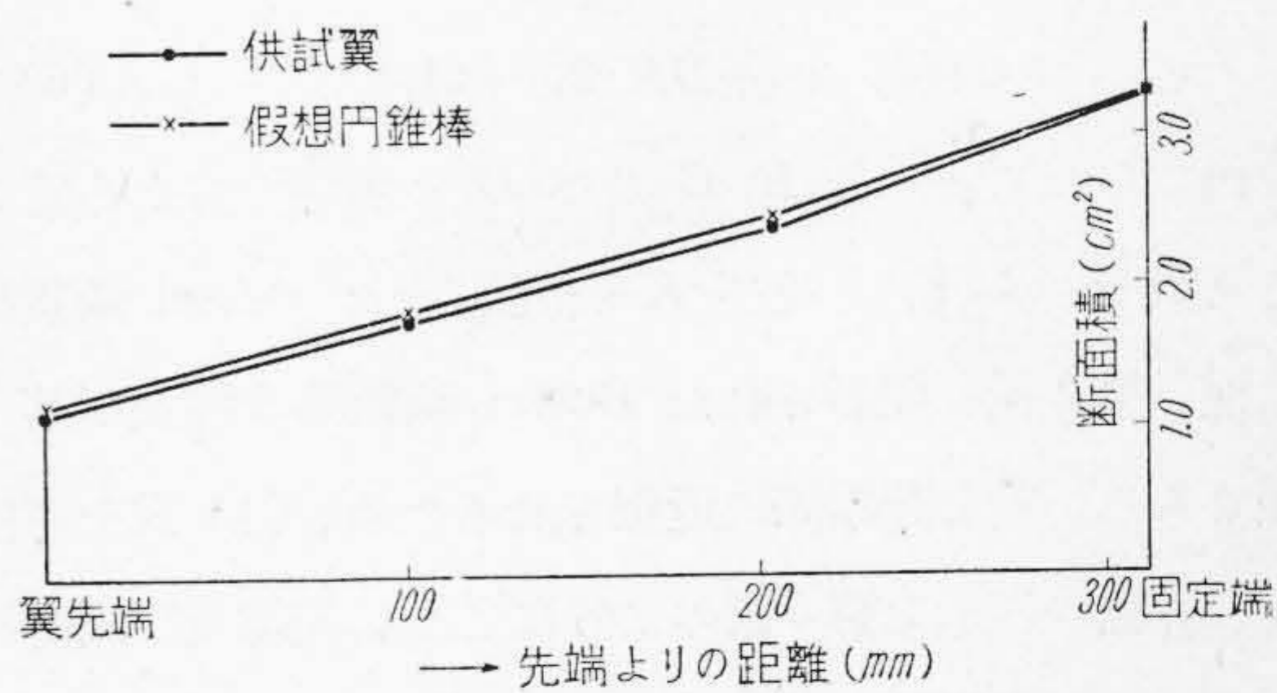
第4表 振動方程式から求めた固有振動數 (毎秒振動數)

Table 4 Natural Frequency Obtained from Equation of Vibration.

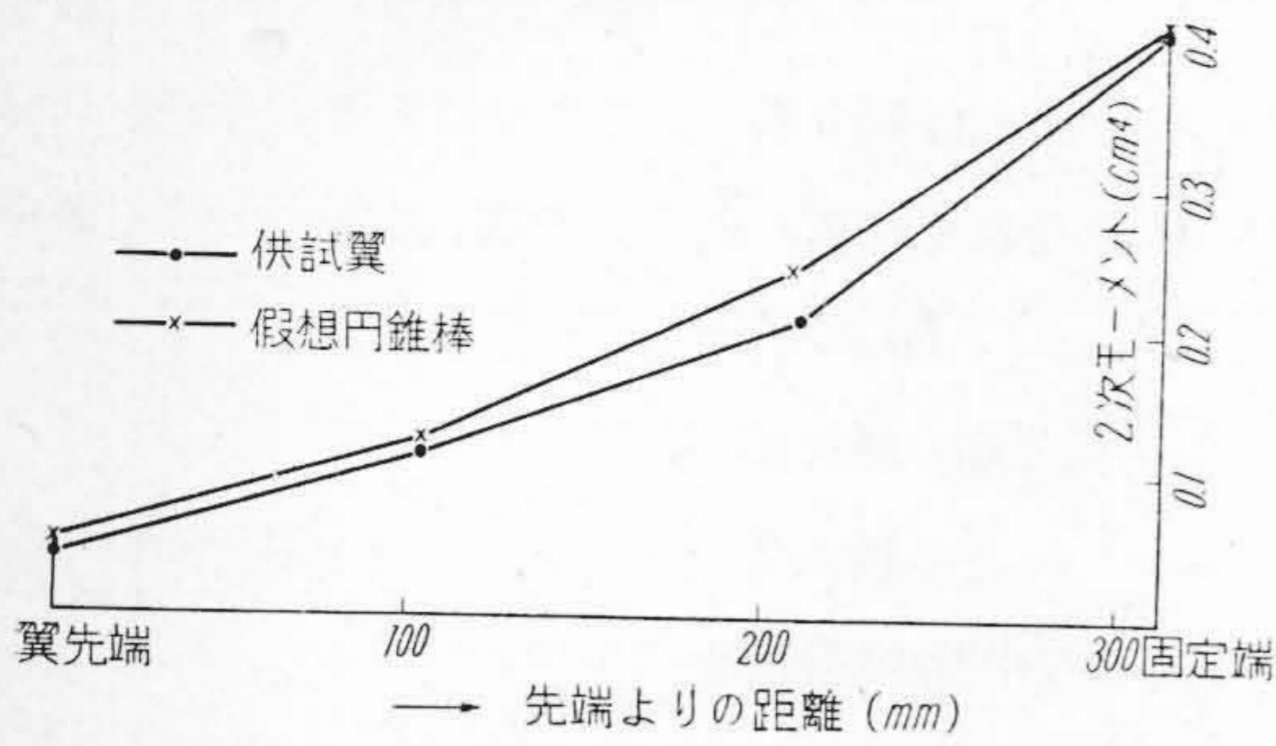
次 數	1	2
固有値	$2\sqrt{b} = 10.40,$ $2\sqrt{a} = 8.04$	$2\sqrt{b} = 22.60,$ $2\sqrt{a} = 17.48$
固有振動數	133.0	627

[註] 固有値は(8)式を完全に満足しないから、振動方程式から求めた固有振動數は第4表の如く第1表の値と少し異なる。

計算 2. 振幅分布 一端固定他端自由なる棒の横振動の振幅分布はこの棒の振動方程式を解きノーマル函數を求めればよい⁽⁴⁾が、これは從來棒の断面が簡単な場合、即ち均一断面の棒⁽⁵⁾圓錐棒及び楔狀棒⁽⁶⁾では比較的容易に得られたが、供試翼のように断面積及び断面2次モーメントが翼長の複雑な函數では求めることが困難である。しかし、供試翼は第4圖に示すように、比較的圓



第4圖 a. 翼及び圓錐棒の断面積
Fig. 4, a. Section Areas of Blade and Conical Stick.



第4圖 b. 翼及び圓錐棒の断面2次モーメント
Fig. 4, b. Geometrical Moments of Inertia of Blade and Conical Stick.

錐棒に近似している⁽⁷⁾ので、翼の横振動の振幅分布即ちノーマル函數を求める場合、翼を圓錐棒としても、結果に變りはないと考えられる。即ち振動している圓錐棒の任意の點 x の變位を y とし、この棒の斷面積、断面2次モーメント、ヤング率及び密度をそれぞれ A', I, E, ρ_0 とし、固定部分の A' 及び I を A_0, I_0 とすれば、振動方程式は

$$\rho_0 A' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

となる。こゝに

$$A' = A_0 \frac{x^2}{L^2}, \quad I = I_0 \frac{x^4}{L^4} \dots\dots\dots(4)$$

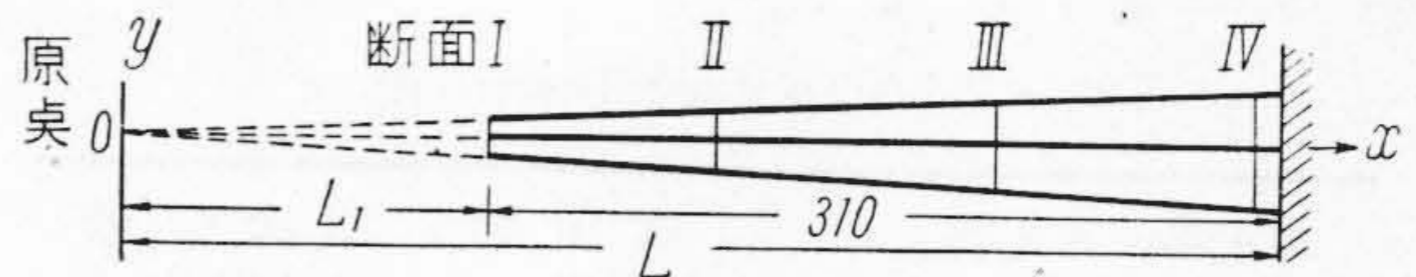
である。次に

$$\left. \begin{aligned} y &= u \cos pt, \quad p = \text{角振動數} \\ \mu &= \frac{\rho_0 A_0}{EI_0} p^2 L^2 \\ \mu x &= v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

とおけば、ノーマル函數 u , 即ち振幅分布は

$$u = -1 v \{ AJ(2\sqrt{v}) + BY(2\sqrt{v}) + CI(2\sqrt{v}) + DK(2\sqrt{v}) \} \dots\dots\dots(6)$$

で與えられる。 A, B, C 及び D は境界條件から定まる常數で、 J, Y, I 及び K はそれぞれ Bessel 函數第1種、第2種、變形された Bessel 函數第1種及び第2種である。翼を圓錐棒に近似させるため、(4) 式を考慮して、翼の座標を第5圖のようにとり、先端及び固定點における翼斷面積の値を(4)式で表わし得るとすると、原點より翼の先端までの距離 L_1 は(第5圖参照) 45.45 cm したがつて $L = 45.45 + 31.0 = 76.45$ cm となる。 $A,$



第5圖 翼上の座標
Fig. 5 Coordinate on Blade.

B, C, D は境界條件、即ち固定端で撓み及び傾斜が0、先端で剪斷應力及び曲げモーメントが0であるから

$$\left. \begin{aligned} x=L \text{ 即ち } v=\mu L=b \text{ において} \\ v=0, \quad \frac{du}{dv}=0 \\ x=L_1 \text{ 即ち } v=\mu L_1=a \text{ において} \\ \frac{d^2u}{dv^2}=0, \quad \frac{d}{dv} \left(v^4 \frac{d^2u}{dv^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

(7) 式を(6)式に代入して、(8)式を得る。

即ち次の條件式

$$\begin{vmatrix} J_2(2\sqrt{b}), Y_2(2\sqrt{b}), I_2(2\sqrt{b}), K_2(2\sqrt{b}) \\ J_3(2\sqrt{b}), Y_3(2\sqrt{b}), -I_3(2\sqrt{b}), K_3(2\sqrt{b}) \\ J_4(2\sqrt{a}), Y_4(2\sqrt{a}), I_4(2\sqrt{a}), K_4(2\sqrt{a}) \\ J_3(2\sqrt{a}), Y_3(2\sqrt{a}), I_3(2\sqrt{a}), -K_3(2\sqrt{a}) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

が成立するような $2\sqrt{b}$ なる固有値を見出せば、この固有値を(6)式に入れて翼の各次の横振動における振幅分布を求めることが出来る。 \sqrt{a} は $\sqrt{b/a} = \sqrt{L/L_1}$ より求まる。この固有値と(5)式によつて翼の固有振動數を求めると第4表のようになり實驗値と大體一致する。今第2次の固有振動の場合について、常數 A, B, C 及び D を求める、 A を任意常數とし (A は振幅の絶対値で可まる)。

$$A : B : C : D = (-1)^2 J_2(22.60)^* : (-1)^3 Y_2(22.60)^* : (-1)^4 I_2(22.60)^* : (-1)^5 K_2(22.60)^*$$

(* は(8)式における各函數の餘因數を示す)

$$\begin{aligned} \text{であつて、 } B &= 0.611 \times A, \quad C = -0.223 \times 10^{-9} A, \\ D &= 0.01527 \times 10^9 A \end{aligned}$$

となるので、翼の振幅分布は第5表のように定まる。この表を圖示すれば第6圖のようになる。但しこの場合 A は 10^9 mm とつてある。これから節點及び最大屈曲點を判定すると第6表のようになり均一斷面の片持梁の振

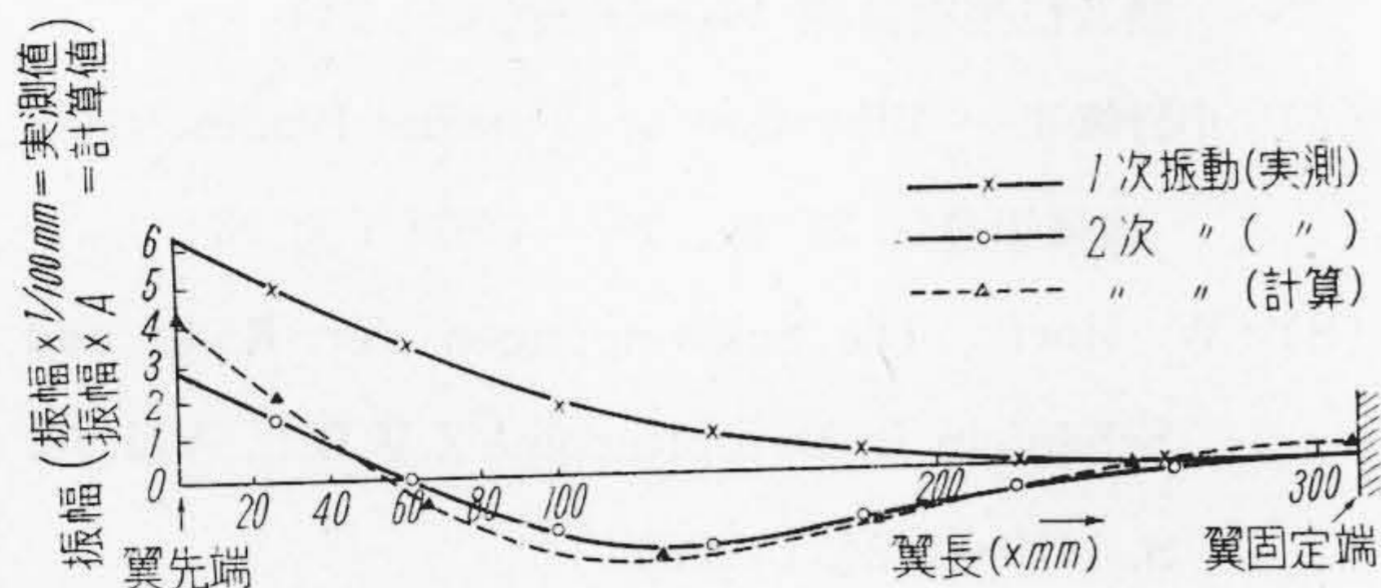
第5表 2次振動におけるノーマル函数 (振幅分布)

$$U = v^{-1}(AJ_2 + BY_2 + CI_2 + DK_2)$$

Table 5 Normal Function for 2ndary Vibration (Amplitude Distribution)

$$U = v^{-1}(AJ_2 + BY_2 + CI_2 + DK_2)$$

翼先端より (cm)	0	2.55	6.35	12.65	18.50	25.0	31.0
$U \times 10^{-2}A$	0.432	0.218	-0.0917	-0.208	-0.128	0.00182	0.0434



第6圖 振 幅 分 布
Fig. 6 Distribution of Amplitude.

動の場合に比較して、タービン翼は上記諸點が先端に近づいている。即ち振動による最大應力の點が先端に近くなっていることがわかる。

第6表 2次振動における節點及び最大屈曲點 (翼長を100とする)

Table 6 Nodal Point and Maximum Bending Point in 2ndary Vibration (assuming Length of Blade 100).

翼 種		節 點 (先端より)	最大屈曲點 (先端より)
タービン翼	實 験	約 19	約 40
"	計 算	約 18	" 40
均一断面棒	"	22.6	" 48

〔IV〕 検 討

1. 實驗 この實驗で強制力は電磁石により翼下端附近より與えたもので、波形は大體正弦波である。實際は強制力は蒸氣であり、正弦波形でなく、翼全體にわたり與えられるので條件が異なる。しかし共振時の振動における撓みの形状(振幅分布)には變りはないと考えられる。但しバインド線やシェラウドリングのある場合⁽⁸⁾は別である。振動數測定は第1表に示すように4回試みたが何れも殆んど同一値が得られた。この値は計算値より

2~3% 低い。したがって實驗値も妥當であると言える。振幅分布の測定で、振幅は H 式振動計を通じ翼の振動より生ずる交流電流を整流して電流計で讀むので、絶對値の小なる場合は整流器の特性のため誤差が大きくなる。又電流計による振幅の讀みは振動數によつて異なるが第2表の振幅はこれを較正した値である。

2. 計算 タービン翼を兩端の斷面積の等しい圓錐棒と近似させた場合、中間の斷面積は圓錐棒が少し太くなるので、固有振動數の計算値は1次2次共に實驗値より第1表に示すように一般に少し高目になるのであるが、第3表で2次の値が實驗と殆んど一致している。これは(8)式において固有値の近似度が充分でなかつたためと考えられる。しかしその誤差は極めて僅かである。故に計算による振幅分布は實驗によるそれと大差はないとみてよい。第5表に振幅分布より求めた節點と最大屈曲點が示してあるが、これらはよく一致している。均一断面棒に比較して節點や最大屈曲點が先端に近くなるのは翼が先細型で、2次振動に對し先端附近で屈曲し易くなるようである。翼の形状、斷面が變ればこれらの點は變る。現在のバインド線の2段目の位置と最大屈曲點が一致しているから2次振動の振幅抑制上効果があることは注目すべきである。

〔V〕 結 論

タービン翼の固有振動數並びに共振時における振幅分布に關し計算と實驗を行い、次の諸點を明かにした。

- (1) 従來行われて來た翼の固有振動數に關する W. Hort の計算式による値は實驗値より約 2~3% 高く、よく一致する。
- (2) 共振時の翼の振動應力の計算上重要な節點及

び最大屈曲點の位置を明かにした。

(3) 現在バインド線は翼の2次振動における最大振幅にして、且つ最大屈曲點に位置している。即ちバインド線は2次振動に對し振幅増大の防止上効果的位置にある。

(4) タービン翼の振動を解析する場合、翼を圓錐棒に近似せしめて計算する方法は有効適切である。

本研究にあたり日立研究所課長今尾隆氏より多大の援助を戴き厚く御禮申し上げる。

参考文献

(1) 安井澄夫：タービン翼の自然振動數について、日本機械學會誌、47卷、368頁(昭19)

(2) テイモシエンコ、谷下譯：工業振動學下卷、ター

ビン羽根の振動 320~324頁(昭14)

(3) 高林乍人：回轉機危險速度通過時の振動波形、日立評論論文集、第7號(1949)

(4) 田丸卓郎：彈性振動及び音響學、振動する組織の規準座標 113~119頁(昭5)

(5) 田丸卓郎：同上、棒の横振動 143~145頁(昭5)

(6) 妹澤克雄：振動學下卷、錐形及び楔狀構造物の震動及び振動觀測 494~500頁(昭24)

(7) 小野鑑正：Vibration of Turbine Blades, 日本機械學會誌 27卷、467~479頁(大13)

(8) W. Hort: Die Schwingungen der Räder und Schaufeln in Dampfturbine Z.V.D.I., Vol. 70, S. 1419~1424, (1926)

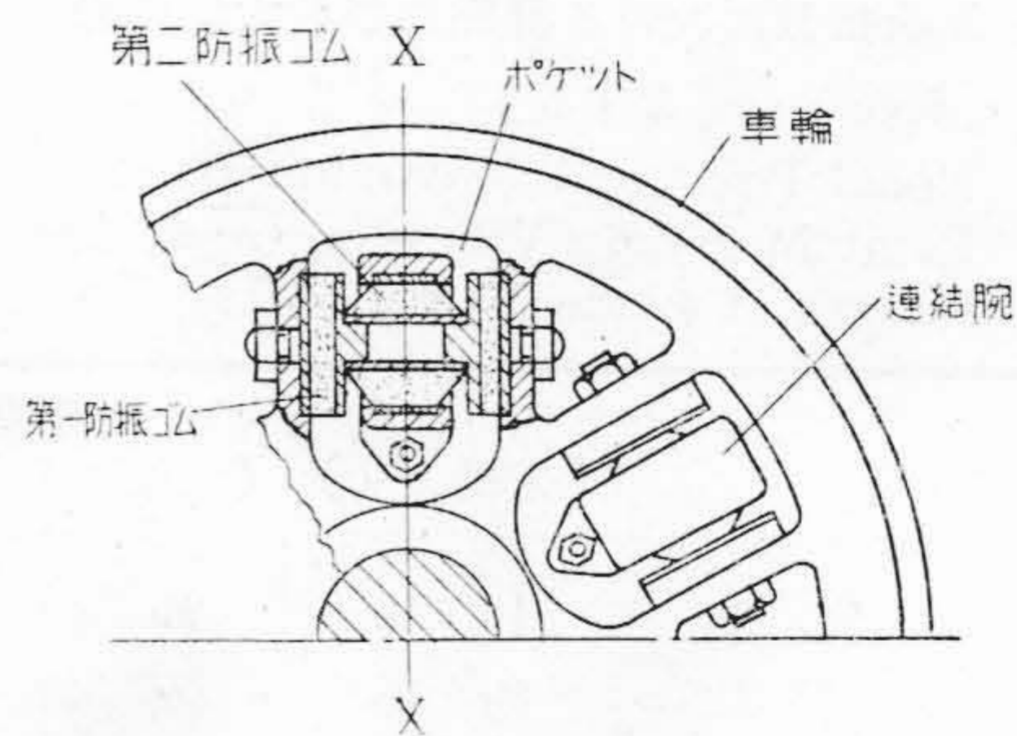
特許紹介

特許第183333號

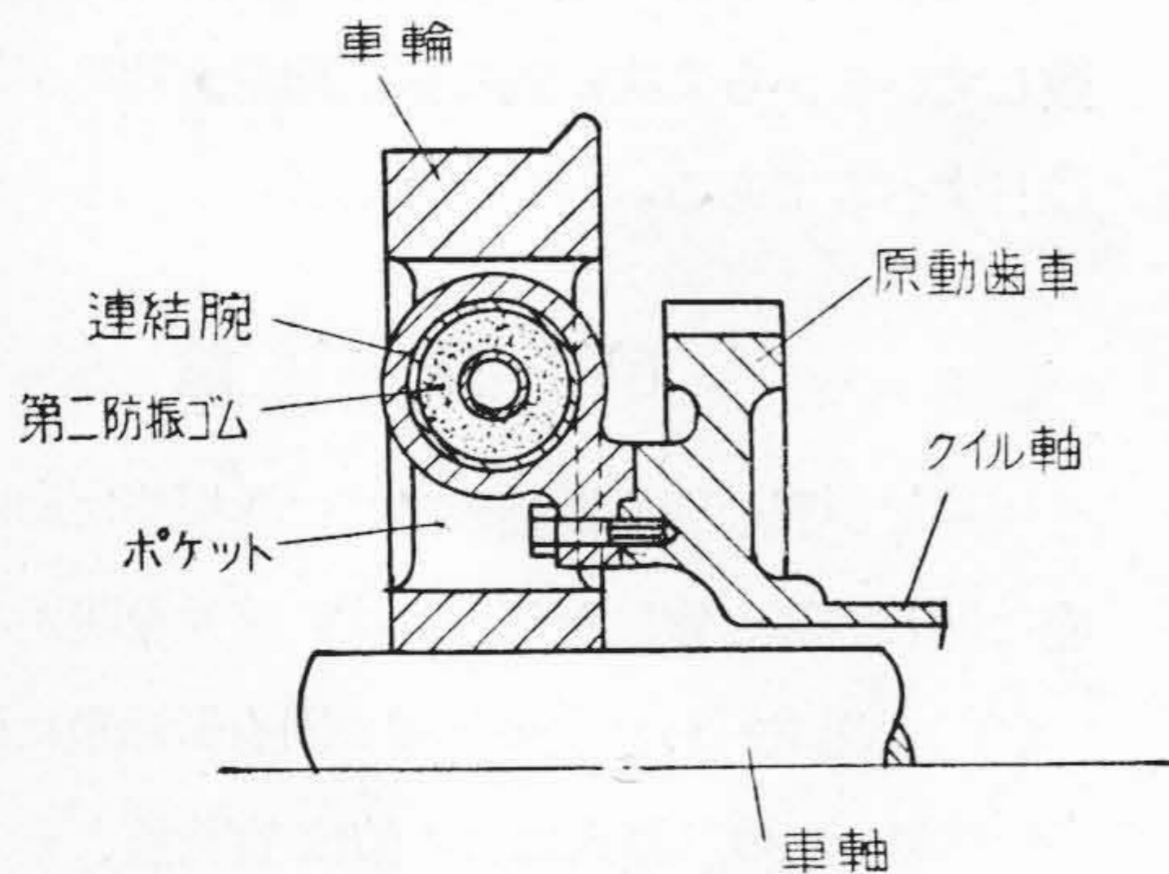
青木喜六・村田師男

可撓傳動裝置

この發明は高速度臺車に適切なクイルドライブ装置に關するもので、クイル軸と車輪との間に特殊組合せになる防振ゴムの可撓傳動接手を介装し、車體の振動及びレール道床の傷みを減少せんとするものである。第1圖はこの發明を實施した車輪の正面圖、第2圖は第1圖X-X線に沿う斷面を示すもので、車輪にはポケットを設け、ポケット内に原動齒車より突出した連結腕を嵌合し、ポケットの兩側壁に取付けた板狀の第一防振ゴムの對向突子により、管狀の第二防振ゴムを介して前記連結腕を支持した構造を要旨とするものである。



第2圖



第1圖

この構造によれば原動齒車の回轉力が車輪に傳わるとき生ずる切線方向壓力の剪斷力は第二防振ゴムに、壓縮力は第一防振ゴムに作用し、又車輪の振動及び衝撃が齒車に傳動される垂直方向壓力の壓縮力は第二防振ゴムに、剪斷力は第一防振ゴムに作用し、これら防振ゴムにより夫々吸收緩和されるから、原動齒車及び車輪相互間に振動又は衝撃の直接授受が行われぬ。従つて原動齒車及びこれを驅動する電動機、更にこの電動機を取付けた臺車枠に及ぼす振動、衝撃を顯著に緩和し、車輛の乗心地を好適ならしめ得るものである。(滑川)