UDC 620.178.311.4+620.178.311.62

振動吸收物質の彈性率及び減衰率測定の一方法

光 石 知 國* 河 合 鱗 次 郎**

A Method of Determining the Modulus of Elasticity and Loss Factor of Damper Materials

By Tomokuni Mitsuishi, Rinjirō Kawai
Central Laboratory, Hitachi, Ltd.

Abstract

Reasonance method of determining the modulus of elasticity and damping coefficient is failed when it is applied to rubber or others which posses large damping coefficient, because the resonance curves are too dull and specimens are too small in length. To avoid these difficulties we attempted a modified method and analysed a vibrating system composed of two parts, one of which is a specimen and the other is a metal lod. Some experimental results are illustrated.

〔I〕 緒 言

彈性率小さく減衰率の大きい物質の彈性率及び減衰率を求めるには、棒の縱振動の共振を利用する從來の方法はそのまゝでは用いられない。減衰が大きいと共振がはつきり現われないからである。しかし彈性率大きく減衰率の小さい物質と組合せてその連成系の共振を解析すれば目的を達することが出來る。横振動による方法としてA. Gemant のやつた例があるが[1]、取扱が簡單でない。我々は金屬棒の兩端に對稱的に試料をはりつけたものについて縱振動の共振による測定を試みた。測定裝置の大要を**第1圖**に示す[2]。發振器 O で作つた振動電流を A_p で增巾し勵振電磁石 M_e に通す。 M_e は試料の勵振端面にはりつけられた薄鐵板に對置され試料に强制振動力を及ぼす。試驗體の他端にも薄鐵板がはりつけてあり之に對置された檢振電磁石 M_d に振巾に應じた起電力を生じ、之を A_V で增巾して眞空管電壓計 $V.V.$ によつて讀む。振動數を變化させて振動數振巾の共振曲線を作り之から彈性率及び損失率(或は減衰率)を算出する。

〔II〕 内部摩擦のある丸棒の縱振動

内部摩擦力が變形速度のみの函數でしかもその一次の項で十分近似されると考えると(内部摩擦力がこの外に振巾その他に關係する場合にも一應以上のように考えて然る後に摩擦係數が振幅その他の函數であると考えることは意味があると思う)棒の太さを考えに入れた運動方程式は、[3][4]

$$\rho\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\sigma^2a^2\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial t^2}\right)=G\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+k\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial t}\quad\ldots\ldots(1)$$

ξ は軸方向の變位、ρ は密度、G は縱彈性率、σ はポアツソン比、k は内部摩擦係數、a は斷面の極慣性半徑をあらわす。

定常的解を求めるために $\xi=A\ \exp(j\omega t)$ とおけば

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}=-s^2A,\quad \frac{1}{s^2}=\frac{\omega^2}{p+j\omega Q}$$

* ** 日立製作所中央研究所

$$P=(G-\rho\sigma^2a^2\omega^2)\times 1/\rho,\quad Q=k/\rho \quad\text{............(2)}$$

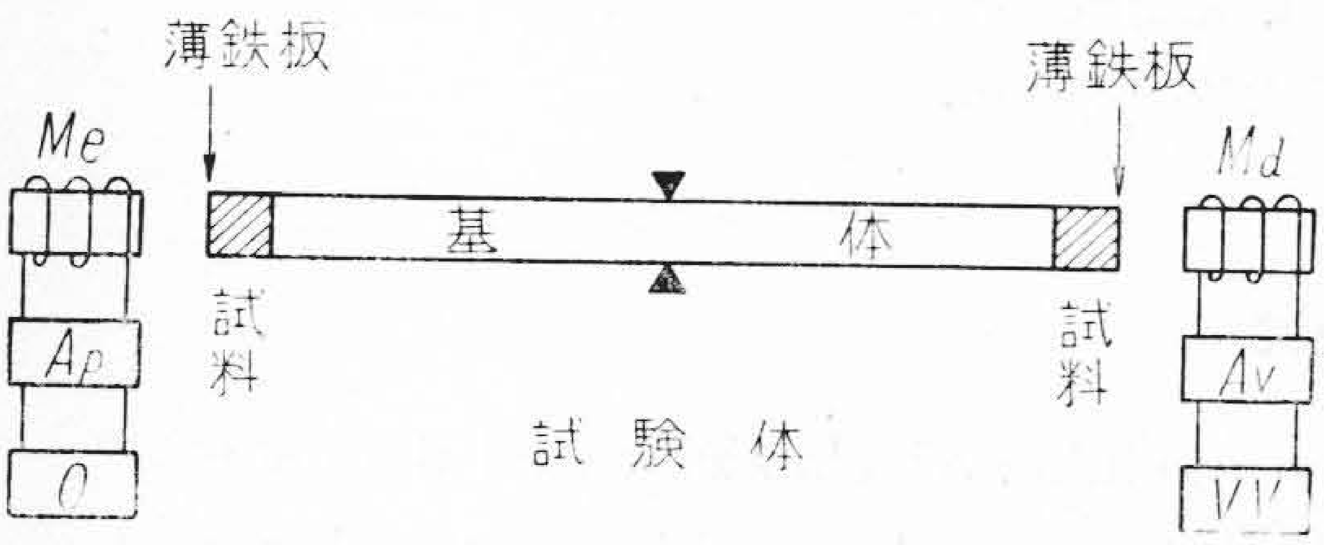
$A=f\exp(zx)$, $z=\omega/c\times(\varepsilon+j)$ とおけば ε^4 以上を省略して

$$c^2=P(1+3\varepsilon^2) \quad\text{......................(3)}$$

又 ε^3 以上を省略した近似で

$$\varepsilon=\omega Q/2c^2=\delta/2\pi \quad\text{..................(4)}$$

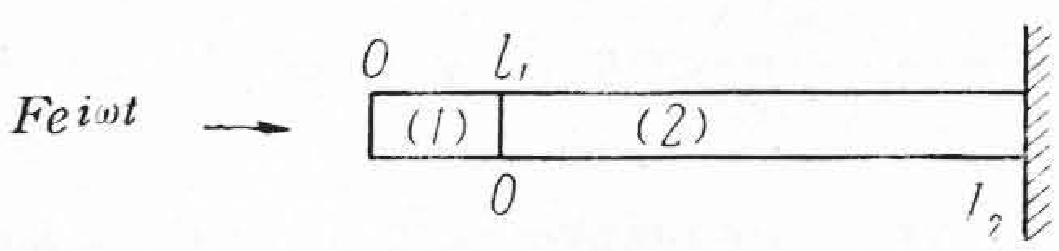
こゝに δ は棒が自由振動をするときの1周期についての對數減衰率で所謂損失率はその2倍になる。



第1圖 測定装置の概要
Fig. 1 Diagramatic Illustration of Measurement.

〔III〕 複合棒の强制振動

第2圖に示すように棒(1)棒(2)を接合し(2)の一端を固定し(1)の自由端に $F\exp(j\omega t)$ の强制振働を加えるときの定常振動を考える。



第2圖 複合棒の振動
Fig. 2 Vibration of Combined System.

共振時の歪力に比べ强制力が無視出來る時には、この振動姿態は緒言で述べた試驗體を中心で支えた時の振動姿態と同等である。夫々の棒につき左端を原點にとれば夫々の變化は

$$\xi=(f\exp(-zx)+g\exp(zx))\exp(j\omega t)$$

f, g は境界條件(5)から定まる常數である。棒の斷面積を S とすると境界條件は

$$G_1z_1(g_1-f_1)=F/S \quad\text{......................................(5a)}$$

$$f_1\exp(-z_1l_1)+g_1\exp(z_1l_1)=f_2+g_2 \quad\text{..................(5b)}$$

$$G_1z_1(g_1\exp(z_1l_1)-f_1\exp(z_1l_1))=G_2z_2(g_2-f_2)\quad\text{...(5c)}$$

$$f_2\exp(-z_2l_2)+g_2\exp(z_2l_2)=0 \quad\text{........................(5d)}$$

之等から $f_{1,2}$, $g_{1,2}$ を求めて ξ の式に入れると

$$\xi_1=(F/S)(\exp(j\omega t)/2\omega(R+jI))$$
$$[\{(1+\gamma)\exp(z_1l_1+z_2l_2)-(1-\gamma)\exp(z_1l_1-z_2l_2)\}$$
$$\times\exp(-z_1x)+\{(1-\gamma)\exp(-z_1l_1+z_2l_2)$$
$$-(1+\gamma)\exp(-z_1l_1-z_2l_2)\}\exp(z_1x)]$$

$$\xi_2=(F/S)(\exp(j\omega t)/\omega(R+jI))[\exp(z_2l_2-z_2x)$$
$$-\exp(-z_2l_2+z_2x)]$$

$$\gamma=G_2z_2/G_1z_1$$

眞空管電壓計の讀み ζ $(\infty\omega\xi)$ の極大値附近の様子を調べるには $|R+jI|$ の變化を調べればよい。以下 ζ の共振曲線について考える。測定をするのは $l_1=\text{const.}$ の條件下であるが計算を容易にするため $\omega l_1=\text{const.}$ の條件で近似する。ω の變化範圍は ω 自身にくらべ非常に小さいからこのことは許される。(5)を解いて求めた R, I の式は

$$R=a^+\cos h(+)\cos(+)-b^+\sin h(+)\sin(+)$$
$$-a^-\cos h(-)\cos(-)+b^-\sin h(-)\sin(-)$$
$$I=a^+\sin h(+)\sin(+)+b^+\cos h(+)\cos(+)$$
$$-a^-\sin h(-)\sin(-)-b^-\cos h(-)\cos(-)$$
$$a\pm=(\varepsilon_1G_1/c_1\pm\varepsilon_2G_2/c_2),\quad b\pm=(G_1/c_1\pm G_2/c_2)$$
$$\sin h(\pm)=\sin h(\varepsilon_1\alpha\pm\varepsilon_2\beta),\quad \sin(\pm)=\sin(\alpha\pm\beta)$$
$$\alpha=\omega l_1/c_1,\quad \beta=\omega l_2c_2$$

$|\varepsilon_1\alpha+\varepsilon_2\beta|\ll 1$ の場合 $\sin\alpha=a$, $\cos\alpha=b$, $\sin\beta=A$, $\cos\beta=B$, $G_1/c_1=X$, $G_2/c_2=Y$ とおいて

$$R=Y\varepsilon_2bB-X\varepsilon_1aA-(X\varepsilon_2\beta+Y\varepsilon_2\alpha)aB$$
$$-(X\varepsilon_1\alpha+Y\varepsilon_2\beta)bA \quad\text{..............................(6a)}$$
$$I=(X\beta+Y\alpha)\varepsilon_1\varepsilon_2aB+(X\varepsilon_1^2\alpha+Y\varepsilon_2)bA$$
$$+YbB-XaA \quad\text{...............(6b)}$$

以下肩符 ′ は β についての微分記號とし又變數の値は共振點におけるものとする。共振條件として

$$(R^2+I^2)'=RR'+II'=0$$
$$\therefore\quad R=I'\Delta,\quad I=-R'\Delta \quad\text{........................(7)}$$

Δ は次に定める係數である。振動エネルギーが極大値の半分になる點即ち振幅に於て $1/\sqrt{2}$ になる點の共振點からの偏移を $d\beta$ とすれば $(d\beta)^3$ 以上を省略して

$$(R^2+I^2)''(d\beta)^2=2(R^2+I^2)$$

之と(7)とから ε^2 以上を省略した近似で

$$\Delta=d\beta$$

となる。

〔IV〕 共振式及び減衰式

ε を全く省略した $YbB-XaA=0$ を第一近似共振式とする。この式を利用して $R=I'\Delta$ から減衰式を求めると

$$X\varepsilon_1(\alpha\sec^2\alpha+\tan\alpha)+Y\varepsilon_2(\beta\,\mathrm{cosec}^2\beta-\cot\beta)$$
$$=\Delta Y\,\mathrm{cosec}^2\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

共振點偏移率（基體棒のみの共振點からの試料をつけたゝめの共振點のずれを元の共振振動數で割つたもの）

$\delta\omega/\omega$ が 1 にくらべて小さい所で $I=-R'\Delta$ から主な項を拾つて $XaA=YbB+X\varepsilon_1{}^2\alpha\,bA$ を得るが、之と (3) から共振式を求めると

$$\frac{\tan\alpha}{\alpha}=-\frac{m_2(1+4\pi^2\sigma_2{}^2\,a^2/\lambda_2{}^2)}{m_1(1+4\pi^2\sigma_1{}^2\,a^2/\lambda_1{}^2)}\frac{\delta\omega}{\omega}$$
$$(1+3\varepsilon_1{}^2)+\varepsilon_1{}^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

m_1, m_2 は夫々棒(1)棒(2)の質量である。

次にエネルギー關係から別途に減衰式を導いてみる。一般に共振の鈍さ $b(=2\,d\omega/\omega)$ と系のエネルギー損失率（1 周期の間に失われるエネルギーを系の彈性エネルギーで割つたもの）θ との間には $\theta=2\pi b$ の關係があるとされている[1]。前に求めた ξ によつて θ を計算すると

$$\theta=\frac{\iint k_1\frac{\partial^3\xi_1}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial\xi_1}{\partial t}dx\,dt+\iint k_2\frac{\partial^3\xi_2}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial\xi_2}{\partial t}dxdt}{\iint G_1\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}\frac{\partial\xi_1}{\partial t}dx\,dt+\iint G_2\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x^2}\frac{\partial\xi_2}{\partial t}dxdt}$$

t についての積分は分子では 1 周期、分母では $^1/_4$ 周期にわたり行い、x については棒全體にわたり行う。そうすると (2), (4) から

$$\theta=\frac{\left(4\pi\rho_1\varepsilon_1\int|\xi_1|^2dx+4\pi\rho_2\varepsilon_2\int|\xi_2|^2dx\right)}{\left[(G_1/c_1{}^2)\int|\xi_1|^2dx+(G_2/c_2{}^2)\int|\xi_2|^2dx\right]}$$

$$\sec^2\alpha+\tan\alpha/\alpha=T_1,\quad \mathrm{cosec}^2\beta-\cot\beta/\beta=\mathrm{T}_2$$

とおけば減衰式として

$$d\omega/\omega=(\varepsilon_1 m_1T_1+\varepsilon_2 m_2T_2)/(m_1T_1+m_2T_2)\ldots\ldots(10)$$

この式は近似的に (8) に一致し $\theta=2\pi b$ の關係がこの場合にも成立つことを確證する。

〔V〕 端面に附着した集中質量の影響及び接着層の影響

測定のために端面につけた鐵片の影響は無視出來ない。

鐵片の質量を M とすれば境界條件 (5a) は次式でおきかえられる。

$$SG_1z_1(g_1-f_1)=F-M\omega^2(f_1+g_1)$$

こゝでは ε を省略して考える。そうすると R, I の中の α を $(\alpha+\psi)$ $(\psi=\mathrm{arc}\tan(M\omega/X))$ でおきかえることによつて前の議論がそのまゝ成立ち共振式は棒が十分細い時は

$$\frac{\tan(\alpha+)\psi}{\alpha+\psi}=-\frac{m_2}{m_0}\frac{\delta\omega}{\omega}(1+3\varepsilon_1{}^2)+\varepsilon_1{}^2\frac{\alpha}{\alpha+\psi}\quad\ldots\ldots(11)$$

$$\tan\psi=M\omega/X,\quad l_0=(\alpha+\psi)(c_1/\omega),\quad m_0=\rho_1 l_0$$

$M\omega\ll X$ ならば $m_0=m_1+M$, $\psi=M\omega/\rho_1c_1$ で Rayleigh が "Theory of Sound" で示したものに一致する。減衰式は變更なく (10) と同じである。

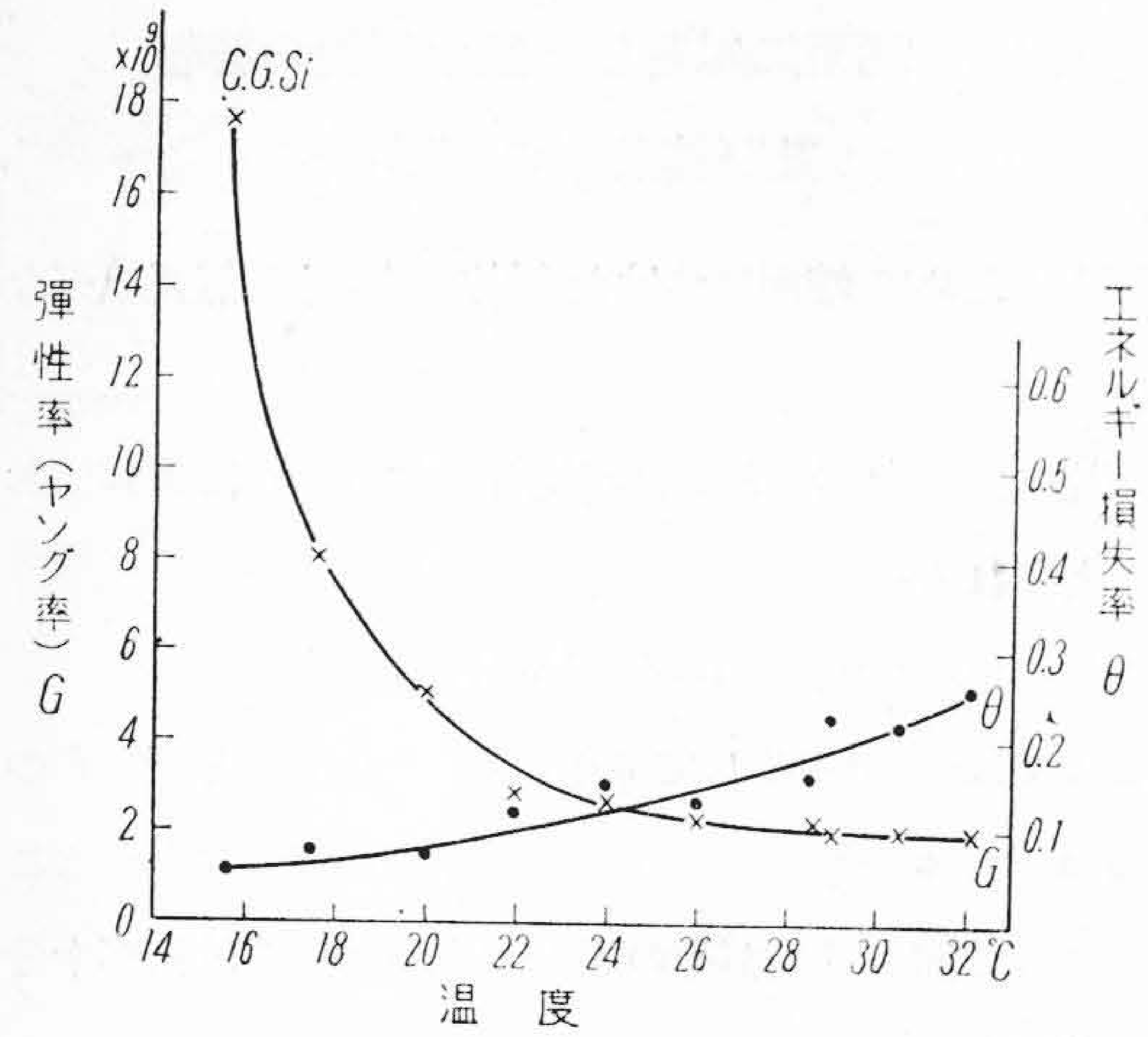
次に接着層の影響であるが、之は境界條件から容易に判るようにこの層内での彈性波の波長 λ に較べ層の厚さ d が小さければ無視して差支えなく、そのための誤差の割合は d/λ の程度である。

重要なのは接着層そのものゝ影響よりもむしろ接着したゝめに棒自身の性質が境界附近で變ることである。半徑方向の變位が一般には喰違うために見掛上彈性率が變つてくる。これはこの方法に本質的な難點であるが、棒の太さを十分細くすればその誤差は省略出來るし、又試行により試料の長さを波長の整數倍に近く選んで境界面を振動の腹に近くすることが出來ればこの影響を消去することが出來る。

〔VI〕 測 定 例

(11) 及び (10) により $\delta\omega$ 及び $d\omega$ の測定値から彈性率及び損失率の近似値を算出することが出來、必要ならば逐次近似を行うことが出來る。この際 m_2 としては實際の基體棒質量の本分をとらなければならない。

第 3 圖に測定例を示す。試料は硫黄 14% スモークド



第3圖　14%加硫ゴムの弾性的性質の温度特性
Fig. 3　Temperature Dependence of Elastic Properties of 14% Vulcanized Rubber.

シート86%の加硫ゴムで直徑8粍、長さ13.8粍、鐵片質量0.12瓦、基體棒はアルミニウムで長さ700粍、質量95.5瓦、直徑8粍で $m_2/m_0=54$ であつた。

$\delta\omega$ は小さいので發振器の周波數變動が大きな誤差の原因となるが、之を避けるために基體棒と略々同一の棒をもう一本作り之によつてその時その時の周波數を較正した。

〔VII〕結　　言

最近米國に於て種々巧妙な測定法が發表されているが[5]、前述の難點に注意さえすればこゝに述べた方法はその取扱いの簡單な點に於て有用なものであると思う。基體棒の長さを變えることによつて測定可能な振動數範圍は數百から數千サイクルに及び、試料部は簡單に恒温槽内に入れられるので任意の温度で測定することが出來る。

參 考 文 献

(1) A.Gemant: J. App. Phys. Vol. 11 (1490) 647
(2) 河合、中研研究報告、第290號
(3) W.G. Cady: Phys. Rev. Vol. 19 (1922) 1
(4) 妹澤克惟: 振動學 163
(5) A.W. Nolle: J. App. Phys. Vol. 19 (1948) 953