U.D.C. 519.28:658

二次計画における最適解の判定基準とその数値解法について

Optimality Criterion and Computational Procedure for Quadratic Programming

萱 島 興 三* 島 田 正 三*

内 容 梗 概

数学的計画樹立の方法として，線型計画が広く行われ，その有効性を高く評価されていることは周知の通りである。しかし，線型計画はその名のしめす通り，制限式ならびに目的函数が一次式であらわされるという制約をともなう。しかし，実際には目的函数を一次式で近似させることは無謀のことが少くない。もちろん，これに対し，折線近似の手法によつてある程度カバーすることができ，実際に試みられている。

本報は，まず一般の非線型計画，すなわち $FX\leq B,\ X\geq 0$ なる制限の下に $p=g(X)$ を最大にする問題を考察した。こゝに F は n 次元から m 次元への写像をあらわす。また，$X,\ B$ は m 次のベクトル，$g(X)$ は X の汎函数である。F および p にくわえたゆるい条件の下での最適解の判定規準を論じた。

ついで $g(X)$ が二次式の場合について上の規準を適用し，最適解を求める数値計算法について論じた。方法は，シンプレックス法の拡張ともいうべきもので，ルーチンの手順に従い，表による計算を行つたのち，判定基準に照して最終解をうるというものである。

〔I〕 緒　　　言

リニヤー・プログラミングは，企業活動を分析し，行動決定の資料をうる一つの有力な手段として登場し，その有用性が高く評価されている。問題は，“いくつかの制約条件の下で，もつとも好ましい状態をさがし求める”という，経済的な要請から生じただけに，数学的理論が研究されたのは比較的新らしい。Dantzig がリニヤー・プログラミングの一般的解法 Simplex method を考案し，Neumann が，ゲームの理論との関連性をあきらかにしたのは，1940 年に入つてからである。その後 Charnes, Dorfman, Koopmans らによつて問題はほとんど解決された。より広い，一般的な数学上の問題としては，線型性の仮定をおかない場合の計画——Non-linear programming が残されている。実際問題として特に重要な意味をもつのは，目的函数が二次式であらわされるような場合——二次計画であろう。これは，リニヤー・プログラミングが複雑な現象の一次近似であるのに対し，二次までを考えた二次近似であるというに止らず，経済的模型としても Dorfman が独占企業の場合 (Monoplistic case) と呼んでいるように現実に即した問題なのである。

こゝでは計画の模型として，企業における生産計画を想定し，第2，3節では非線型計画の数学的な問題を，4，5節において二次計画の計算法そして最後に数値計算の例を述べる。

〔II〕 非 線 型 計 画

非線型計画の formulation はつぎのごとくである。

$$FX\leq B,\ X\geq 0 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

の条件の下に，目的函数

$$p=g(X) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

を最大ならしめること。

たゞし，$X,\ B$ は n 次元および m 次元ベクトル

$$X'=(x_1,\ x_2,\ldots x_n) \quad B'=(b_1,\ b_2,\ldots b_m) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

であり，F は，n 次元空間から m 次元空間への写像をあらわす。p はベクトルのスカラー函数 (functional) である。(2.3) 式の肩につけたダッシュは，転置ベクトル，大文字であらわしたベクトルはすべて列ベクトルをあらわすものとする。FX はつぎのように書きあらわされる。

$$(FX)'=(f_1(X),\ f_2(X),\ldots\ldots f_m(X)) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

こゝで X は生産計画における工程 (process) の水準，B を利用しうる資源の量をあらわすベクトルと考えれば，(2.1)，(2.2) 式は，X の水準の生産によつて消費される資源の量 FX が，B 以下に制限されているときに，利潤函数（目的函数）$g(X)$ を最大にするような生産の水準 X を求める問題と解される。こゝでつぎの二つの仮定をおこう。

(a) (2.1)式をみたす解ベクトル (feasible solution) の集合は，convex set をつくる。すなわち，$X^1,\ X^2$ をともに feasible solution とすれば，$X=\gamma X^1+(1-\gamma)X^2,\ 0\leq\gamma\leq 1$ もまた feasible solution である。

この仮定は，企業の分析の上からは，かなり妥当な仮定であるように思われる。もちろん，F が線型写像なることを必要としない。たゞ，微分可能な写像なることを仮定しておく。

* 日立製作所中央研究所

(b)　(2.2)式の目的函数は，X の下向きに凹な (concave) functional である。すなわち，$\gamma g(X^1)+(1-\gamma)g(X^2)\leq g(\gamma X^1+\{1-\gamma\}X^2)$，$0\leq\gamma\leq 1$

問題がこのような2つの性質をみたしているときには，解の最適性の判定規準が次節におけるように見出されるのであるが，その前に，この仮定から導かれる結果と，次節で用いる Weyl-Minkowski の定理を紹介しておく。まず，

(1)　問題が上の二つの仮定をみたしておれば，最適でない部分的極大は存在しない。いい換えると，X^m を一つの解とし，

$F\{X^m+dX\}\leq B$ なるあらゆる X^m+dX に対して $g(X^m+dX)\leq g(X^m)$ ならば，すべての解 X に対して $g(X^m)\geq g(X)$ である。

証明　X^m, X をそれぞれ解とし，$\delta>0$ として，$dX=\delta(X-X^m)$ とすれば，convex set の仮定 (a) により，X^m+dX は一つの解である。

仮定 (b) を用いて，

$$\begin{aligned}\delta g(X)+(1-\delta)g(X^m)&\leq g(\delta X+\{1-\delta\}X^m)\\&=g(X^m+\delta\{X-X^m\})\\&\leq g(X^m)\end{aligned}$$

これより $\delta g(X^m)\geq\delta g(X)$ となり，$\delta>0$ なるゆえ $g(X^m)\geq g(X)$.

(2)　Weyl-Minkowski の定理

$[A]X\geq 0$ なるあらゆる X に対し，$P_0'X\geq 0$ ならば，$P_0'=U'[A]$，$U\geq 0$ なるベクトル U が存在する。こゝに $[A]$ は (m, n) マトリックス，X, P_0 は n-ベクトルである。

証明　$[A]'=(P_1, P_2,\ldots P_m)$, $P_1, P_2,\ldots P_m$ の張る convex cone を C とする。C に含まれるすべての ray と鈍角ならざる ray の集合を C と共軛な convex cone といい，C^* であらわす。容易に $(C^*)^*=C$ なることがわかる。さて $P'_iX\geq 0$ $(i=1, 2,\ldots m)$ なるゆえ，$X\epsilon C^*$，さらに仮定により $P'_0X\geq 0$ であるから，P_0 は C^* と共軛な cone $(C^*)^*=C$ の要素である。

したがつて $P_1, P_2,\ldots P_m$ の非負一次結合であらわされる。

$$P_0=\sum_{i=1}^{m}u_iP_i=U'[A],\quad U'=(u_1, u_2,\ldots u_m)$$

〔III〕 最適性の判定規準

m 次のベクトル FX を，$x_1, x_2,\ldots x_n$ について微分すると，(m, n) 行列がえられる。これを，次式のように4つの部分行列にわける。

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial X_2}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

F_1 は (2.1) 式で等号の成立している部分，すなわち，$F_1X=B_1$ であり，F_2 は不等号になつている部分，$F_2X<B_2$ である。

また，X_1 は X のうちで，正の値をもつ成分のみでつくつたベクトル，X_2 は 0 の値の成分である。わかりやすく書けば，

$$\begin{cases}FX=\begin{pmatrix}F_1X\\F_2X\end{pmatrix} & \begin{matrix}F_1X=B\\F_2X<B\end{matrix}\\ X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}X_1>0\\X_2=0\end{matrix}\end{cases}\cdots\cdots\cdots(3.2)$$

ある解において，正水準の工程の数が k，尽くされる資源の数が r とすれば，$\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial X_1}\right)$, $\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}\right)$, $\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial X_1}\right)$, $\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial X_2}\right)$ はそれぞれ (r, k), $(r, n-k)$, $(m-r, k)$, $(m-r, n-k)$ 行列である。この解 $X=X^m$ が最適解なるための必要十分なる条件は，

$$X^m\geq 0\cdots\cdots\cdots(3.3)$$

$$F_1X^m=B_1,\quad F_2X^m<B_2\cdots\cdots\cdots(3.4)$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial g}{\partial X_1}\right)'\Bigg|_{X=X^m}=U_1'\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial X_1}\right)\Bigg|_{X=X^m},\\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial X_2}\right)'\Bigg|_{X=X^m}\leq U_1'\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}\right)\Bigg|_{X=X^m},\\ \quad U_1\geq 0\end{cases}\cdots(3.5)$$

なるような，ベクトル U_1 が存在することである。U_1 は，その成分が負ならざる r 次のベクトルで，(3.5) 式をみたすこのようなベクトルの存在することが，最適解なるための条件なのである。まず，(3.3)，(3.4)，(3.5) が，必要条件なることをしめす。(3.3)，(3.4) は単に解なるための条件である。

X^m が最適解なるためには

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial X_1},\ \dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}\right)\Bigg|_{X=X^m}dX\leq 0\\ ([0],\ [E])dX\geq 0\end{cases}\cdots\cdots\cdots(3.6)$$

(こゝに $[E]$ は $(n-k)$ 次の単位行列，$[0]$ は各要素が 0 の $(n-k, k)$ 行列) をみたす dX に対して，$\left(\dfrac{\partial g}{\partial X}\right)'dX\leq 0$ でなければならぬ。Weyl-Minkowski の定理によつて，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)'\Bigg|_{X=X^m}&=(U_1',\ V')\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial X_1}, & \dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}\\ [0], & -[E]\end{pmatrix}\Bigg|_{X=X^m}\\&=\left(U_1'\frac{\partial F_1}{\partial X_1},\ U_1'\frac{\partial F_1}{\alpha X_1}-V'[E]\right)\Bigg|_{X=X^m}\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

$$(U_1',\ V')\geq 0\quad U_1 \text{ は } r\text{-ベクトル},\quad V \text{ は } (n-k)\text{-ベクトル}\cdots(3.8)$$

なるを要する。これより

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)'\Bigg|_{X=X^m}=U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right)\Bigg|_{X=X^m}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)'\Big|_{X=X^m}=U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_2}\right)\Big|_{X=X^m}-V'[E]$$
$$\leq U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_2}\right)\Big|_{X=X^m}$$

(3.5)式がえられた。つぎに十分なることは，X^m の近傍のみについて考えればよく，

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)dX\Big|_{X=X^m}\leq 0\\ ([0],\ [E])\,dX\geq 0\end{cases}$$

なるあらゆる X^m+dX に対して，$g(X^m+dX)\leq g(X^m)$ なることを証明すればよい。

$$g(X^m+dX)-g(X^m)=\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)'dX\Big|_{X=X^m}$$
$$\leq U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)dX\Big|_{X=X^m}$$
$$\leq 0$$

こゝで，U_1 は，つくされる資源の種数にひとしい r 次元のベクトルであるが，これに $(m-r)$ 次の 0–ベクトルをくわえて，m 次元ベクトルをつくる。

$$U=\begin{pmatrix}U_1\\0\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(3.9)$$

資源の制限を $\varDelta B$ だけ緩和したとき，利益の増加 $\varDelta p$ は最善において

$$\varDelta \underset{\max}{p}=U'\varDelta B\qquad\cdots\cdots(3.10)$$

である。なんとなれば，$\varDelta p=\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)'\varDelta X\Big|_{X=X^m}\leq$

$$U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right)\varDelta X_1+U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_2}\right)\varDelta X_2\Big|_{X=X^m}$$

$=U_1'\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)\varDelta X\Big|_{X=X^m}\varDelta X$ は，$\varDelta B\geq\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)\varDelta X\Big|_{X=X^m}$

をみたしているから，$\varDelta p\leq U_1'\varDelta B_1=U\,\varDelta B$

上のことから，U ベクトルの意味をつぎのように解釈できる。まず U は，資源の種数とひとしい m 次元ベクトルであり，$U\geq 0$，また最適計画において余剰のある資源に対応する成分は 0 である。また，資源を $\varDelta B$ だけ増したときに，$U'\varDelta B$ の利益の増加を期待できるのである。(上式において $\varDelta X$ として $\varDelta X_2=0$，$\varDelta B=\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right)\varDelta X_1\Big|_{X=X^m}$ なるようにえらべばよい。これは，$\left(\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right)\Big|_{X=X^m}$ の rank が k 以下ならば可能である。) したがつて，U は各資源1単位にあたえる価値であると考えることにすれば，上述の事実は非常に自然である。最適計画においてあまつている資源に対しては，これをある範囲で減らしても，ふやしても利益は変化しないのであるから，この資源の価値は 0 であるし，また U の価値のある資源を $\varDelta B$ だけさらに投入すればあらたに $U'\varDelta B$ の利益が期待できるであろう。このように考えると，最適性の判定規準をあたえる (3.5) 式も意味がはつきりする。

稼働工程に対しては，水準の単位の増加による利益の増加が，これに投入する資源の価値にひとしいところでバランスし，非稼働工程にたいしては，水準の単位の増加によつて投入した価値だけのものがえられないのだから，はじめから稼働させないのだ，と理解される。

また，FX が，X の下向きに convex な functional からなるベクトルであれば，(3.5) 式でえられる X^m, U が，

$$\phi(X,\ Y)=g(X)+Y(B-FX)\qquad\cdots\cdots(3.11)$$

なる pay-off function をもつゲームの saddle-point をあたえるという興味ある事実が知られている。これは，linear programming におけるゲームの理論との関連性を，拡張したものであつて，人間対資源のゲームにおいて，ちようどバランスする saddle point を求めるということにほかならないのである。

〔IV〕 二次計画—目的函数が二次式の場合

資源による制限条件が変数 X (n 次ベクトル) の一次式，目的函数が二次式であらわされる場合を考えよう。二次形式は一般に

$$g(X)=C_1'X-X'[C_2]X\qquad\cdots\cdots(4.1)$$

の形に書ける。こゝで C_1 は n 次ベクトル，$[C_2]$ は $(n,\ n)$ 対称行列である。前節の判定規準が適用できるためには，前節の仮定 (a)，(b) が成立せねばならない。(a) は制限条件に関するものであつて，条件式が線型計画と同様一次式としているから，これをみたす X は convex set をつくり，仮定を満たしている。また，条件 (b) は (4.1) 式が下向きに concave な函数であればみたされる。このためには，どのようなことが必要であろうか。$g(X)$ が下向きに concave ならば，任意の解 X^1, X^2 について

$$g(X^2)\leq g(X^1)+\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)'_{X=X^1}(X^2-X^1)$$

なるを要するから，

$$C_1'X^2-X^{2\prime}[C_2]X^2\leq C_1'X^1-X^{1\prime}[C_2]X^1$$
$$+(C_1+2[C_2]X^1)'(X^2-X^1)$$

$[C_2]$ が対称行列なることに注意して，これを簡単にすると，

$$(X^2-X^1)'[C_2](X^2-X^1)\geq 0$$

となり，任意の X^2-X^1 にたいし，上式が成立するためには，これが non-negative definite なること，すなわち $[C_2]$ のすべての主座小行列式が負ならざることが必要である。また，仮定 (b) が成立するためには，これで十分なることが知られる。

つぎに，現実にどのような模型がこの二次計画にあてはまるかを考えてみる。m 種の資源 (resorce) n 種の

工程 (process) l 種の製品 (product) がある。資源は量に制限があり，B (m 次ベクトル) がその使える限界であるとする。n 種の工程の水準 (level) を X (n 次ベクトル) としたとき，これに要する資源の量 S との間に，

$$S=[A]X \qquad [A] \text{ は } (m, n) \text{ 行列} \quad \cdots\cdots(4.2)$$

なる一次関係があるとする。また X なる水準の工程によつて生みだされる製品の量を Y とし，Y と X との間に，

$$Y=[P]X \qquad [P] \text{ は } (l, n) \text{ 行列} \quad \cdots\cdots(4.3)$$

なるやはり線型の関係がなりたつものとする。こゝにおいて $[A]$ および $[P]$ は，Input matrix, Output matrix というべきものである。つぎに，Y なる水準の生産による利益を p，単位の製品についての利益が，Y の増加とともに直線的に減少するものと考えると，

$$p=(C_1-[C_2]Y)'Y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.4)$$

なる関係がなりたつ。こゝで C_1 は全然生産を行わないときの製品の単位当りの利益であり，$[C_2]$ は Y によつて単位当りの利益が，直線的に変化する割合いをしめす。C_1 は l 次ベクトル，$[C_2]$ は (l, l) 対角行列である。

(4.2), (4.3), (4.4) 式を綜合すると，結局問題は，

$$X\geqq 0 \quad [A]X\leqq B, \quad Y=[P]X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

の条件の下に，(4.4) 式を最大にする問題となる。条件式 (4.5) は，Y と X との関係が，等式で結ばれているが，一次の関係であるから，この解が convex set をつくることには変りない。なんとなれば，X^1, X^2 を解とし，これらに対する Y の値をそれぞれ Y^1, Y^2 とすれば，

$$[A]X^1\leqq B \quad Y^1=[P]X^1, \quad [A]X^2\leqq B \quad Y^2=[P]X^2$$

ならば，$A\{\gamma X^1+(1-\gamma)X^2\}\leqq B \quad \gamma Y^1+(1-\gamma)Y^2$

$$=[P]\{\gamma X^1+(1-\gamma)X^2\} \quad 0\leqq\gamma\leqq 1$$

をうるから，$\gamma\begin{pmatrix}X^1\\Y^1\end{pmatrix}+(1-\gamma)\begin{pmatrix}X^2\\Y^2\end{pmatrix}$ もまた解となる。

したがつて，上述の模型では，$[C_2]$ の要素 ($[C_2]$ は対角行列である) が負でなければ，前節の判定規準が用いられる訳である。遊休工程を考え，この水準を Z (m 次ベクトル) とすれば，条件式 (4.5) は，一まとめに，

$$\begin{cases} X, Y, Z\geqq 0 \\ \begin{pmatrix}[A] & [0] & [E]\\ [P] & -[E] & [0]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(4.6)$$

とあらわされる。一つの工程によつてたゞ1種の製品が生みだされる場合は，$[P]=[E]$ であつて，$X=Y$ となり，$p=C_1'X-X'[C_2]X$, $AX\leqq B$, $X\geqq 0$ となる。

〔V〕 シンプレックス表の拡張

前節に述べたような模型では一般に*，(4.6) 式を書き直して

$$[A]X=B, \quad X\geqq 0 \quad ([A] \text{ は } (m, m+n) \text{ 行列}) \quad \cdots\cdots(5.1)$$

の条件の下に

$$p=C_1'X-X'[C_2]X \quad ([C_2] \text{ は，各要素が負ならざる対角行列}) \quad \cdots\cdots(5.2)$$

を最大にする問題となる。線型計画においては，縮退の起らないかぎり m 個 (m は条件式の数) の一次独立な $[A]$ の列ベクトル P_j に対する X_j が正で，ほかが0であるような解 (これを基本解 basic solution という) において最適解がえられる。この性質をたくみに利用し，基本解から基本解へと，山の尾根を縫うごとく最適解へと到達するシンプレックス法が考察された。二次目的函数の場合にも，このような逐次計算の方法が適用できないものであろうか。以下このような考えの下に議論を進める。

線型計画の場合とことなる点は，単位の工程稼働によつて生み出される利益が，その工程の稼働の大きさによつて変化する点である。このことによつて最適解が基本解においてえられるとはかぎらず，一般に k 個 ($k\geqq m$) の稼働工程を含むことになる。

そこで，いま $k(\geqq m)$ 個の稼働工程を含む解がえられたとしよう。シンプレックス法において用いた手法にならい，この k 個の工程のうちで適当な m 個の工程をベースとし，ベース以外の工程のレベルを変化させ，これをベース工程のレベル変化で補う。便宜上，$P_1, P_2, \ldots P_k$ を稼働工程，このうちはじめの m 個 $P_1, P_2, \ldots P_m$ をベースにえらんだ工程とする。まず，P_j $(j>m)$ を，ベースであらわして，

$$P_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i \quad (j=m+1, \ m+2, \ldots m+n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.3)$$

はじめにえられている解 X^1 は，

$$X^1=(\underbrace{\underbrace{x_1^1, \ x_2^1, \ldots x_m^1}_{\text{ベース}}, \ldots x_k^1}_{>0}, \ \underbrace{x_{k+1}^1, \ldots x_{m+n}^1}_{=0}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

したがつて，

$$\sum_{i=1}^{m}P_i x_i^1+\sum_{i=m+1}^{m+n}P_i x_i^1=B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.5)$$

(5.3), (5.5) 式より，

$$\sum_{i=1}^{m}P_i(x_i^1-a_{ij}\theta_j)+\sum_{i=m+1}^{m+n}P_i x_i^1+P_j\theta_j=B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.6)$$

* 前節の終りに述べたように，一つの工程でいくつかの製品ができる場合でも，(4.6) 式のような制限条件式を用いれば，以下述べるシンプレックス表を適用できる。ここでは簡単に一つの工程でたゞ一種の製品のみをつくるとしておく。

こゝで θ_j を，

$$\begin{cases} x_i^1 - a_{ij}\theta_j \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots m) \\ x_j^1 + \theta_j \geq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(5.7)$$

なるようにえらべば，(5.6) 式の P_i $(i=1, 2, \ldots m+n)$ の係数が，新しい解 X^2 の各成分の値をあたえる。すなわち，

$$\begin{cases} x_i^2 = x_i^1 - \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij}\theta_j \quad (i=1, 2, \ldots m) \\ x_i^2 = x_i^1 + \theta_j \delta_{ij} \quad (i=m+1, \ldots m+n) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(5.8)$$

たゞし，δ_{ij} は Kronecker のデルタである。X^1 から X^2 をえたときの利益の増加 $\varDelta p$ は，

$$\varDelta p = g(X^2) - g(X^1) \quad \cdots\cdots\cdots(5.9)$$
$$= \theta_j\{(c_{1j} - 2c_{2j}x_j^1) - \sum_{i=1}^{m}(c_{1i} - 2c_{2i}x_i^1)a_{ij} - \theta_j(c_{2j} + \sum_{i=1}^{m} c_{2i}a_{ij}^2)\}$$

こゝで，$c_{1i} - 2c_{2i}x_i$ は，$g(X)$ を x_i について偏微分したものであつて，x_i なる水準で稼働しているとき，制限条件を考慮せず dx_i だけ水準を増したときにえられる利益の増加率をあらわす。これを通常限界利益 (marginal revenue) の名で呼んでいる。簡単のために，

$$c_i^*(x) \equiv c_{1i} - 2c_{2i}x_i \quad \cdots\cdots\cdots(5.10)$$

なる記号であらわすことにしよう。さらに，

$$\begin{cases} \alpha_j \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i^* a_{ij} - c_j^* \\ \beta_j \equiv \sum_{i=1}^{m} c_{2i} a_{ij}^2 + c_{2j} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(5.11)$$

で，α_j, β_j を定義すれば，(9) 式はつぎのように簡単にあらわされる。

$$\varDelta p = -\theta_j(\alpha_j + \theta_j\beta_j) \quad \cdots\cdots\cdots(5.12)$$

したがつて (5.7) 式をみたし，$\varDelta p$ をできるだけ大きくするような θ_j を求めて行けば，漸次最適解に近い解がえられて行くことになる。こゝで注意を要するのは，$j>k$ なる j に対しては，(5.7) の第2式よりわかるように，$\theta_j>0$ なるを要することである。したがつてこのような j に対し，$\alpha_j>0$ ならば，x_j を変えても目的函数を改善できない。α_j は，x_j の微小変化による p の変化の度合をあらわすものと考えられるから，この値のできるだけ大きいような j を変化の対象としてえらぶのが一応妥当である。このことは，通常の線型計画の場合と全く同じ考え方である。最適解を求めることを山登りにたとえるならば，山道のある点に立つて，いくつかの道があるとき，傾斜のもつとも急な道をえらぶことに相当する。このような道をえらべば，つぎの分岐点に行くまでに一番より高い位置まで行けるとは限らない。はじめはけわしいように見えても，だんだん平坦になり，ついには下り坂に向うかも知れぬ。この方法ではとに角，ある分岐点でもつとも傾斜の急な道をえらび，つぎの分岐点まで行くか，または平坦になればそこで立ち止まつて傾斜の急な道をさがそうとするのである。

変化の対象とする工程の番号を r とすると，

$$|\alpha_r| = \max_j\{|\alpha_j|(m<j\leq k),\ \alpha_j(k<j\leq m+n)\} \quad \cdots\cdots\cdots(5.13)$$

この α_r の値には三つの場合がある。

（1）　$\alpha_r=0$ なる場合には，X^1 が最適解である。

証明　はじめの解 X^1 からの微小変化 $dX=(dx_1, dx_2, \ldots dx_{m+n})$ は，n 個の変数から，ベースの m 個をのぞいた $(n-m)$ 個の x_i の微小変化によつて一意的にきまり，あらゆるこれらの組によつてつくされる。しかしていかなる dX なる微小変化によつても目的函数を増すことができないということがいえれば十分である。(5.6) 式に対応して

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(x_i^1 - \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij}dx_j) + \sum_{j=m+1}^{m+n}(x_j^1 + dx_j)P_j = B \quad \cdots\cdots\cdots(5.14)$$

dx による p の変化 dp は，二次の無限小を無視して，

$$dp = -\sum_{i=1}^{m} c_i^* \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij}dx_j + \sum_{j=m+1}^{m+n} c_j^* dx_j \quad \cdots\cdots\cdots(5.15)$$
$$= \sum_{j=m+1}^{m+n}\{c_j^* - \sum_{i=1}^{m} c_i^* a_{ij}\}dx_j = \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j dx_j \leq 0$$

すなわち，どのような微小変化 dX によつても p を増すことはできない。ゆえに X^1 が最適解である。

（2）　$\alpha_r<0$ のとき，θ_r の値はつぎのようにきめる。

$$\theta_r = \min\{-\frac{\alpha_r}{2\beta_r},\ \frac{x_i^1}{a_{ir}}\ (a_{ir}>0 \text{ なるすべての } i)\} \quad \cdots\cdots\cdots(5.16)$$

（3）　$\alpha_r>0$ のとき，同様に

$$\theta_r = \max\{-x_r^1,\ -\frac{\alpha_r}{2\beta_r},\ \frac{x_i^1}{a_{ir}}\ (\alpha_{ir}<0 \text{ なるすべての } i)\} \quad \cdots\cdots\cdots(5.17)$$

このようにすれば，たしかに目的函数が改善される。

これをシンプレックス表のように表にまとめたのを第1表にしめす。通常のシンプレックス表とよく似ている。横に B および $m+n$ 個のベクトルをとり，縦に k 個のベクトルをとる。このうち，上の m 個のベクトルをベースにし，$m+1$ 行以下はベースに入らない稼働工程を書いたもので，P_0 の列にその工程の稼働の大きさが記されている。さて，α_r がみつかつたとしよう。この符号に，2通りの場合があり，そのそれぞれにまた2通りの場合が生ずる。まず，

（a）　$\alpha_r<0$ のとき，

(5.16) によつてえられる θ_r の値が，$-\dfrac{\alpha_r}{2\beta_r}$ のと

第1表　拡張されたシンプレックス表
Table 1.　Table of Expanded Simplex

c_j^*	c_{1j} →			c_{11} …………	c_{1j} …………	$c_{1,m+n}$
	c_{2j} → ↓			c_{21} …………	c_{2j} …………	$c_{2,m+n}$
		Vector	P_0	P_1 …………	P_j	P_{m+n}
$c_{i_1}^*$	c_{2,i_1}	P_{i_1}	x_{i_1}	$a_{i_1,1}$ …………	$a_{i_1,j}$ …………	$a_{i_1,m+n}$
$c_{i_2}^*$	c_{2,i_2}	P_{i_2}	x_{i_2}	$a_{i_2,1}$ …………	$a_{i_2,j}$ …………	$a_{i_2,m+n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$c_{i_k}^*$	C_{2i_k}	P_{i_k}	x_{i_k}	$a_{i_k,1}$ …………	$a_{i_k,j}$ …………	$a_{i_k,m+n}$
		α_j	α_0	α_1 …………	α_j …………	α_{m+n}
		β_j	β_0		β_j	
		$-\alpha_j/2\beta_j$			$-\alpha_j/2\beta_j$	

き，m 個のベースは変らず，x_r と，m 個のベース工程のレベルが変るだけで，$x_r^1=0$ ならば，P_r の行をあらたにつけくわえる。θ_r により，ベースの工程の稼働レベルは $-a_{ir}\,\theta_r$ $(i=1,\ 2,\dots m)$ ずつ変化する。θ_r の値が $\dfrac{x_c^1}{a_{cr}}$ なるときは，通常のシンプレックス表と全く同様で，P_c をベースから追いだし，かわりに P_r をベースに入れる。

(b)　$\alpha_r>0$ のとき，

この場合は，$x_r^1>0$ でなければならない。(5.17) 式によつてえられる θ_r の値が，$-x_r^1$ または $-\dfrac{\alpha_r}{2\beta_r}$ のときはやはりベースは変らず，x_j とベースのレベルが変るだけである。ベース工程のレベルの変化は $-a_{ir}\,\theta_r$ である。θ_j が $\dfrac{x_c^1}{a_{cr}}$ なるときは，ベースの P_c を追いだし，かわりに P_r を入れる。いずれの場合にも一回手順をふむごとに新しい解——この解は常にはじめの解よりも目的函数が大きくなつている——がえられる。一回ごとに表をかきかえて行くのであるが，基本ベクトルの変化しない場合は，**第1表**において a_{ij} のかゝれている部分は書きなおす必要がなく，P_0, c_j^* の列および α_j, β_j, $-\alpha_j/2\beta_j$ の行のみを書きかえればよいのである。

さてこのようにして計算を続けて行けば，しだいに最適解に近ずくけれども，線型計画におけるごとく有限回の操作によつて最適解をうる，という訳には行かない。最適解の稼働工程の数が，$m+2$ 以上であれば，一般にこのような操作をするかぎり，無限回の計算を必要とする。そこで，この対策として，いくつかの工程のレベルを同時に変えることが必要になつてくる。

最適解の正確な値は，稼働工程と，非稼働工程との区別ができれば，(3.4)，(3.5) 式を解くことによつてえられるから，シンプレックス表によつて，稼働工程の見当がつけば，連立方程式をとく計算によつて最適解を求めうる。二次計画の場合には，(3.4)，(3.5) 式は，$i=1, 2, \dots k$ を稼働工程として，

$$\sum_{i=1}^{k} P_i\,x_i=B \quad\cdots\cdots(5.18)$$

$$c_{1j}-2[C_2]x_j=\sum_{i=1}^{m} u_i\,f_{ij}$$

$$\text{たゞし } [f_{ij}]=[A],\ (j=1, 2, \dots k) \quad\cdots(5.19)$$

をとけばよい。しかし，シンプレックス表でえられる数値を利用し，つぎのように計算した方が簡単である。シンプレックス表で，$i=1,\ 2, \dots m$ の m 個のベースのほかに $m+1,\ m+2, \dots k$ の工程を稼働させたとき最適解がえられるとすれば，x_{m+1}^1, x_{m+2}^1, ….. x_k^1 をそれぞれ θ_{m+1}, $\theta_{m+2}, \dots \theta_k$ だけ変えたとき，最適解がえられるとする。最適解なるための必要十分条件は，

$$\alpha_j=0,\ (j=1, 2, \dots k) \quad\cdots\cdots(5.20)$$

であり，$i=1, 2, \dots m$ に対しては必然的に $\alpha_j=0$ になるから，$i=m+1,\ m+2, \dots k$ について (5.11) 式を用いて書きなおすと，

$$c_j^*-P_j'\{C_1-2[C_2](X_1^1-\sum_{i=m+1}^{k} P_i\,\theta_i)\}=0$$

$$(j=m+1, \dots k) \quad\cdots\cdots(5.21)$$

X_1 は，ベースのみを取出したベクトル

$$X_1^1=(x_1^1,\ x_2^1, \dots x_m^1) \quad\cdots\cdots(5.22)$$

である。さらに (5.10) 式に注意して (5.21) 式を整理すると，

第 2 表　シンプレックス表の計算
Table 2. Calculation of Simplex Table

	c_j^*										
		c_{1j} →					5	8	15	12	8
		c_{2j} → ↓					0.01	0.02	0.20	0.08	0.01
			Vector	P_0	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
a			P_6	1,000	1		5	10	5		2
			P_7	2,000		1	8		25	20	8
			α_j				−5	−8	−15	−12	−8
			β_j						0.20		
			$-\alpha_j/2\beta_j$						37.5		
b			P_6	812.5	1		5	10	5		2
			P_7	1,062.5		1	8		25	20	8
		0.20	P_3	37.5					1		
			α_j				−5	−8		−12	−8
			β_j	281.25						0.08	
			$-\alpha_j/2\beta_j$							75	
c			P_6	812.5	1		5	10	5		2
	3.5	0.08	P_4	53.12		0.05	0.4		1.25	1	0.4
		0.20	P_3	37.5					1		
			α_j	185.94		0.175	−3.6	−8			−6.6
			β_j	507.03				0.02			
			$-\alpha_j/2\beta_j$					200			
d	4.75	0.02	P_2	81.25	0.1		0.5	1	0.5		0.2
	3.5	0.08	P_4	53.125		0.05	0.4		1.25	1	0.4
	0.0	0.20	P_3	37.5					1		
			α_j	571.88	0.475	0.175	−1.225		6.75		−5.65
			β_j	639.06					0.33		
			$-\alpha_j/2\beta_j$						−10.2		
e	4.546	0.02	P_2	86.35	0.1		0.5	1	0.5		0.2
	1.46	0.08	P_4	65.875		0.05	0.4		1.25	1	0.4
	4.08	0.20	P_3	27.3					1		
			α_j	600.11	0.4546	0.073	−2.123				−6.5068
			β_j	645.35							0.0236
			$-\alpha_j/2\beta_j$								138
f	5.65	0.02	P_2	58.75	0.1		0.5	1	0.5		0.2
	10.292	0.08	P_4	10.675		0.05	0.4		1.25	1	0.4
	4.08	0.20	P_3	27.3					1		
	5.24	0.01	P_5	138							1
			α_j	1276.31	0.565	0.5146	1.9418		11.61		
			β_j	328.30					0.33		
			$-\alpha_j/2\beta_j$						−17.6		
g	5.298	0.02	P_2	67.55	0.1		0.5	1	0.5		0.2
	6.772	0.08	P_4	32.675		0.05	0.4		1.25	1	0.4
	11.12	0.20	P_3	9.7					1		
	5.24	0.01	P_5	138							1
			α_j	1410.14	0.5298	0.3386	0.3578		−0.006		−1.4716
			β_j	214.53							0.0236
			$-\alpha_j/2\beta_j$								31.2
h	5.518	0.02	P_2	62.052	0.1		0.5	1	0.5		0.2
	8.327	0.08	P_4	22.958		0.05	0.4		1.25	1	0.4
	13.167	0.20	P_3	4.582					1		
	4.434	0.01	P_5	178.287							1
			α_j	1334.43	0.5518	0.4163	1.0898				
			β_j	431.23							
			p	1815.66							

$$c_{2j}\,\vartheta_j+P_j'\sum_{i=m+1}^{k}[C_2]P_i\,\theta_i=\tfrac{1}{2}\{c_j^*(x_j^1)$$
$$-P_j'C^*(X^1)\}=-\tfrac{1}{2}\alpha_j^1$$
$$(j=m+1,\dots k)\quad\cdots\cdots(5.23)$$

この式の右辺の α_j^1 は，最終シンプレックス表でえられた α_j の値であり，P_j は，おのおのの j に対する a_{ij} のつくるベクトルである。解くべき連立方程式は k–m 元である。この計算によつてえた X^2 が，最適性の条件 (3.5) をみたしているかをしらべ，もしみたしていなければ稼働工程の推定を誤つた訳だから，なおタブローによる計算をつゞけねばならぬ。

〔VI〕 計　算　例

最後に計算の数値例を挙げる。

$$\begin{cases}5x_1+10x_2+5x_3+2x_5\leq 1{,}000\\ 8x_1+25x_3+20x_4+8x_5\leq 2{,}000\end{cases}\quad\cdots\cdots(6.1)$$

をみたす $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geq 0$ のうちで，

$$p=x_1(5-0.01x_1)+x_2(8-0.02x_2)+x_3(15-0.20x_3)+x_4(12-0.08x_4)+x_5(8-0.01x_5)\quad\cdots\cdots(6.2)$$

を最大にするものを見出す。第 2 表にシンプレックス表の計算をしめしている。g 表で，P_2, P_4, P_3, P_5 が稼働工程であるという見当をつけた。P_2, P_4 はベースベクトルであるから，P_3, P_5 のレベルを同時に変えて正確な最適解を求める連立方程式の計算にうつる。

(5.23) 式は，

$$\left.\begin{aligned}&0.2\,\theta_3+(0.5,1.25)\begin{pmatrix}0.02&0\\0&0.08\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0.5\\1.25\end{pmatrix}\theta_3+\begin{pmatrix}0.2\\0.4\end{pmatrix}\theta_5\right\}=\frac{0.006}{2}\\&0.01\,\theta_5+(0.2,0.4)\begin{pmatrix}0.02&0\\0&0.08\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0.5\\1.25\end{pmatrix}\theta_3+\begin{pmatrix}0.2\\0.4\end{pmatrix}\theta_5\right\}=\frac{1.4716}{2}\end{aligned}\right\}(6.3)$$

これをとくと，

$$\theta_3=-5.118,\quad \theta_5=40.287\quad\cdots\cdots(6.4)$$

をうる。これより最適解を求めると，

$$x_2=62.052,\quad x_4=22.958,\quad x_3=4.582,\quad x_5=178.287\quad\cdots\cdots(6.5)$$

となり，これに対するタブローは，h 表のようになる。ゼロ・レベルの工程 P_6, P_7, P_1 に対する $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_1>0$, 正レベルの工程に対する α は 0 零になつている。よつて最適性の判定条件をみたし，最適解である。

つぎに U–ベクトルを求めるには，(3.5) のはじめの式の独立な任意の二つを解けばよい。

$$c_2^*(x_2)=5.518=(u_1,\ u_2)\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$$

$$c_4^*(x_4)=8.327=(u_1,\ u_2)\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix}$$

これより

$$u_1=0.5518,\quad u_2=0.4164\quad\cdots\cdots(6.6)$$

をうる。これが資源にあたえた価値であり，1,000 で押えられている第 1 の資源を Δb_1 だけ増せば $0.5518\,\Delta b_1$ の利益の増加がえられる。第 2 の資源についても同様である。

〔VII〕 結　　言

以上，線型計画の枠から一歩外にでた模型を，生産計画を例として考え，これに対する数学的理論と計算方法とをあきらかにした。プログラミングの問題は，平和時における作戦計画 (Operations Research 略して O.R.) の重要な分野として戦後急速に発達し，多くの理論的研究および実際問題への応用がなされたが，その対象とするところによつて適用する手法がそれぞれことなり，新しい問題には新しい手法が必要であり，多くの場合，レディメードがきかないように思われる。線型計画は応用範囲の広い融通に富んだ手法であるが，このような簡単な模型では，到底正確な判断の下せないような場合も多い。このような一つの場合として生産計画において需要が大きな要素となつている場合について考察を加えたものである。最初にこの生産計画の問題を提起され，種々御示唆，御忠言をいただいた中研菊田所長，ならびに種々御指導御鞭撻をいただいた浜田，高田両主任研究員に心から御礼申し上げます。

参　考　文　献

(1) R. Dorfman: Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, Univ. of California Press (1951)

(2) R. ドーフマン著，小宮隆太郎訳，リニヤープログラミング，その理論と企業への応用，規格協会 (1955)

(3) Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Edited by Jerzy Neyman. Univ. of California Press (1951)
H.W. Kuhn and A.W. Tucker: Non linear Programming

(4) Activity Analysis of Production and Allocation
Edited by Tjalling C. Koopmans, John Wiley Sons. (1951)
(a) David Gale: Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities
(b) Murray Gerstenhaber: Theory of Convex Polyhedral Cones

(5) 鈴木雪夫，ノン・リニヤ――プログラミング，標準化 Vol. 9 (1956.6)