

平衡型回路網の四端子マトリックス

Four Terminal Matrix of Balanced Networks

徳 永 迪 夫*
Michio Tokunaga

内 容 梗 概

能動素子をも含む平衡型回路網の等価四端子マトリックスの簡便な算出方法について述べている。従来の方法とは異なり、既報の機械的な樹立方法から得られた節方程式を用い、これからただちに行列式の演算により各種の四端子マトリックスを求める、より簡単な方法を提案した。

さらに応用例として、トランジスタの広帯域一方向化増幅器ならびに平衡型負性インピーダンス変換器の解析法を示した。

[I] 緒 言

既報の“線型回路網の機械的節点解析法について”において回路網の節方程式、不平衡型回路の等価四端子マトリックスの機械的な算出法を述べてその応用例を示した⁽¹⁾。今回はこれを補つて平衡型回路網の等価四端子マトリックスを機械的に求める方法を述べる⁽²⁾。

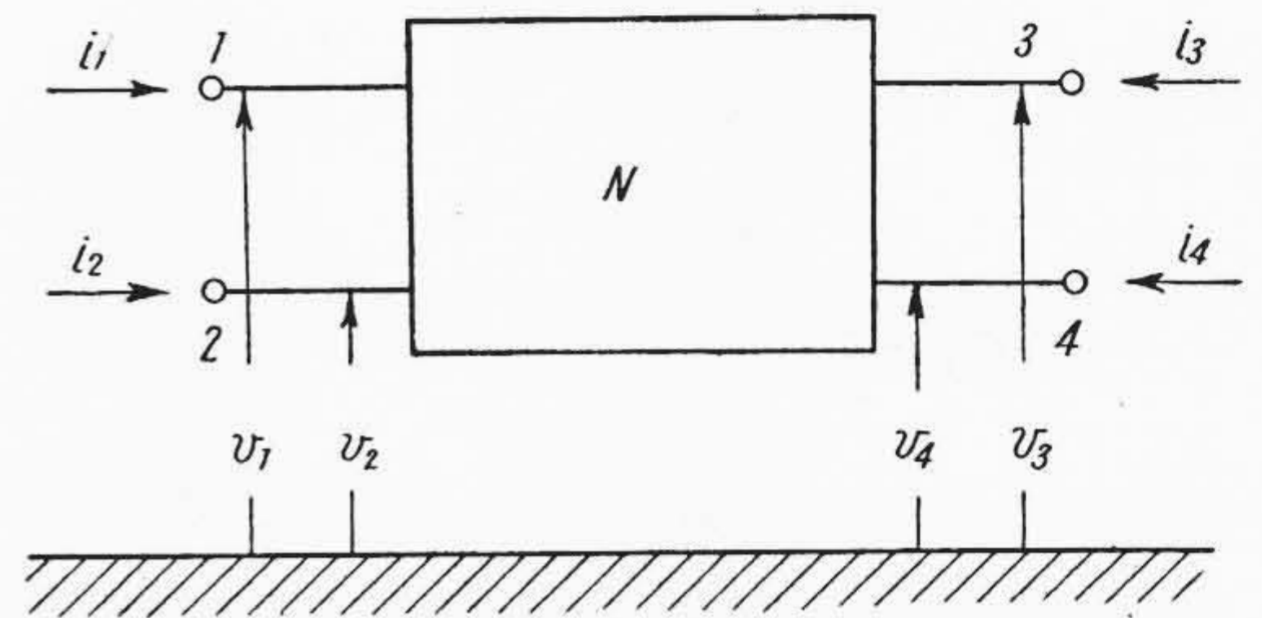
従来の方法では平衡型回路網に対する網目方程式か節方程式を適当な Submatrix に分け、そのマトリックス演算により四端子定数を二重マトリックス⁽³⁾で表現するか、この二重マトリックスの各元素を用いてさらに演算を進めて四端子定数を求めている⁽⁴⁾。したがってこれらの方法では、原方程式より最終的な四端子定数をうる一般式についてはなんら言及しておらず、個々の場合に一々マトリックス演算を施さねばならず、その計算は相当煩雑となる。

筆者は原方程式を“第一種の不定アドミタンス・マトリックス”により表わし、その不定マトリックスの性質を利用して四端子定数を得る一般式を、原方程式と簡単な関係にある行列式により求めることができたので報告する。この方法を用いれば平衡型回路網の四端子マトリックスを機械的に誤りなくより簡単に求めることができる。この応用例としてトランジスタを用いた二つの回路例に対する解析法を述べた。

[II] 節点数 4 個の場合

まず節点数が4個の場合について説明する。第1図のように回路網が孤立しているとすれば、この回路に対する節方程式は既報の樹立方法により、ただちに第1種の不定アドミタンスマトリックスにより次の形で求まる。

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \dots\dots (1)$$



第1図 節点数 4 の平衡型回路

第1図の等価四端子マトリックスを求めるためには

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = V_1 \\ v_3 - v_4 = V_2 \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = -i_2 = I_1 \\ i_3 = -i_4 = I_2 \end{cases} \dots\dots (2)$$

なる2個の電圧と2個の電流の関係を求めねばならないが、(1)式よりただちに求めることはできない。すなわち(1)式の逆変換が求めれば(2)式の関係を入れるに好都合であるが、そのマトリックスは特異マトリックスであるために逆行列が存在しないからである。

そこで1, 2端子を入力端子, 3, 4端子を出力端子と考えた場合の二重Fマトリックス⁽³⁾⁽⁴⁾か二重Hマトリックスなどを求めてから(2)式を代入すれば求めることができる。ここでは前者の方法で求めよう。今(1)式において

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (I_1'), & \begin{pmatrix} i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = (I_2') \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (V_1'), & \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = (V_2') \\ \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = (Y_1), & \begin{pmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \end{pmatrix} = (Y_2) \\ \begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{pmatrix} = (Y_3), & \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} = (Y_4) \end{cases}$$

とおけば、(1)式は良く知られているように次の形に変換できる。

$$\begin{pmatrix} (V_1') \\ (I_1') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (V_2') \\ -(I_2') \end{pmatrix}$$

* 日立製作所戸塚工場

$$= - \begin{pmatrix} (Y_3)^{-1}(Y_4) & (Y_3)^{-1} \\ (Y_1)(Y_3)^{-1}(Y_4) - (Y_2) & (Y_1)(Y_3)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (V_2') \\ -(I_2') \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

(3), (4) 式より (1) 式で表わされた節方程式の二重 F マトリックスは次式のようにになる。

$$\left\{ \begin{aligned} (A) &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_{32} & y_{33} \\ y_{42} & y_{43} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} y_{32} & y_{34} \\ y_{42} & y_{44} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} y_{31} & y_{33} \\ y_{41} & y_{43} \end{vmatrix}, & - \begin{vmatrix} y_{31} & y_{34} \\ y_{41} & y_{44} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ (B) &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -y_{42}, & y_{32} \\ y_{41}, & -y_{31} \end{pmatrix} \\ (C) &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{14} \\ y_{31} & y_{32} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{44} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{44} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ (D) &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{31} & y_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix}, & - \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (5)$$

ただし $d = \begin{vmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix}$

(A), (B), (C), (D) の元素をそれぞれ $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, \dots$ などとおけば (4) 式から次の関係式が求まる。

$$\left\{ \begin{aligned} v_1 - v_2 &= (A_{11} - A_{21})v_3 + (A_{12} - A_{22})v_4 \\ &\quad - (B_{11} - B_{21})i_3 - (B_{12} - B_{22})i_4 \\ i_1 - i_2 &= (C_{11} - C_{21})v_3 + (C_{12} - C_{22})v_4 \\ &\quad - (D_{11} - D_{21})i_3 - (D_{12} - D_{22})i_4 \end{aligned} \right. \dots (6)$$

(1) 式のアドミタンスマトリックスが第1種の不定マトリックスなることより, 上式の右辺の係数間にはさらにつぎの関係が成立する。

$$\left\{ \begin{aligned} A_{11} - A_{21} &= - (A_{12} - A_{22}) = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{vmatrix} \\ B_{11} - B_{12} - B_{21} + B_{22} &= - \frac{1}{d} (y_{31} + y_{32} + y_{41} + y_{42}) \\ C_{11} - C_{21} &= - (C_{12} - C_{22}) = - \frac{2}{d} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{vmatrix} \\ D_{11} - D_{12} - D_{21} + D_{22} &= \frac{2}{d} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (7)$$

ただし $d = \begin{vmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix}$

(2), (6), (7) 式より結局第1図の節点数4個の平衡型回路網の四端子Fマトリックスは次のようになる。

$$(F) = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{vmatrix} & & & - (y_{31} + y_{32} + y_{41} + y_{42}) \\ & & & \\ - \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} & \\ & & & \end{pmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

さらにこの式よりFマトリックスの回路行列式 ΔF は

$$\Delta F = AD - BC = \begin{vmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

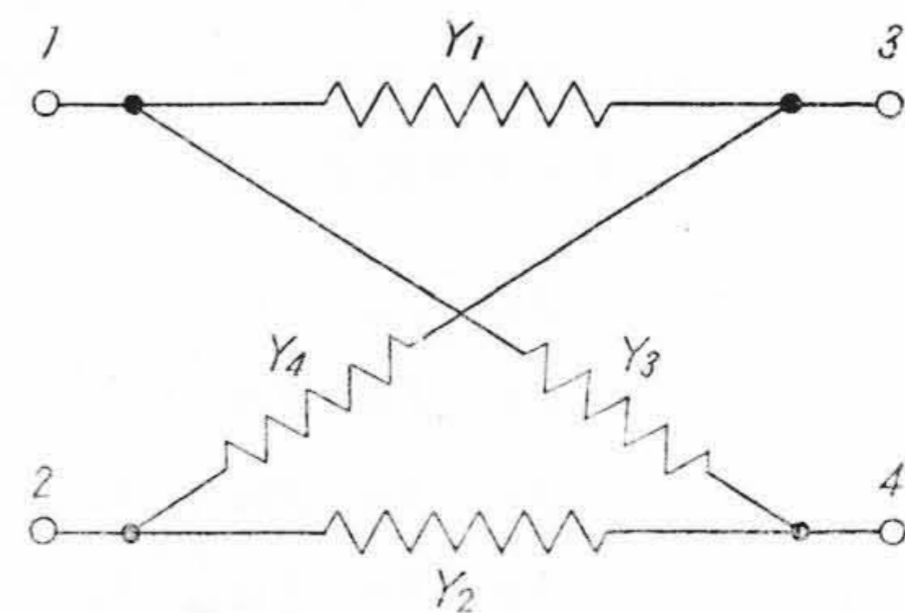
となる。(8), (9) 式よりほかのマトリックスに変換すると第1表の結果が得られる。この表より明かなとおり, やはりアドミタンスマトリックスがもつとも簡単な形で求まる。すなわち $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ 元素は (3) 式の $(Y_1), (Y_2), (Y_3), (Y_4)$ の各々の行列式を (Y_1) の各元素の和で割つたものとなり, Y_{12} と Y_{21} に負符号をつければよい。

(例)

第2図のラチス型回路の4端子アドミタンスマトリックスを求めよう。この回路に対する節方程式は

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_3 & 0 & -Y_1 & -Y_3 \\ 0 & Y_2 + Y_4 & -Y_4 & -Y_2 \\ -Y_1 & -Y_4 & Y_1 + Y_4 & 0 \\ -Y_3 & -Y_2 & 0 & Y_2 + Y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

第1表の変換表を用いれば各元素は簡単に次のように求めることができる。



第2図 ラチス型回路

第1表 平衡型回路網の四端子行列変換表 (節点数 4)

種類	変換式	式	回路行列式
(Z)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} & y_{13} & y_{14} \\ y_{43} & y_{44} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{11} & y_{12} \\ y_{41} & y_{42} & y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$	$d = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$	$\Delta Z = \frac{y_{11}+y_{12}+y_{21}+y_{22}}{d}$
(Y)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & -y_{23} & -y_{24} \\ -y_{31} & -y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ -y_{41} & -y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix}$	$d = y_{11}+y_{12}+y_{21}+y_{22}$	$\Delta Y = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$
(H)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} (y_{11}+y_{12}+y_{21}+y_{22}) & y_{13} & y_{14} \\ & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix}$	$d = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$	$\Delta H = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}$
(G)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & -y_{13} & -y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & -y_{23} & -y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & (y_{33}+y_{34}+y_{43}+y_{44}) \\ y_{41} & y_{42} & & \end{pmatrix}$	$d = \begin{vmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}$	$\Delta G = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$
(F)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} & -(y_{31}+y_{32}+y_{41}+y_{42}) \\ y_{43} & y_{44} & \\ -y_{21} & -y_{22} & -y_{23} \\ -y_{31} & -y_{32} & -y_{33} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} \end{pmatrix}$	$d = \begin{vmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix}$	$\Delta F = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \end{vmatrix}$
(K)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{13}+y_{14}+y_{23}+y_{24}) \\ y_{21} & y_{22} & \\ -y_{31} & -y_{32} & -y_{33} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} \end{pmatrix}$	$d = \begin{vmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \end{vmatrix}$	$\Delta K = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} Y_{11} = \frac{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)}{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4} \\ Y_{12} = Y_{21} = \frac{Y_3Y_4 - Y_1Y_2}{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4} \dots\dots\dots (11) \\ Y_{22} = \frac{(Y_1+Y_4)(Y_2+Y_3)}{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4} \end{cases}$$

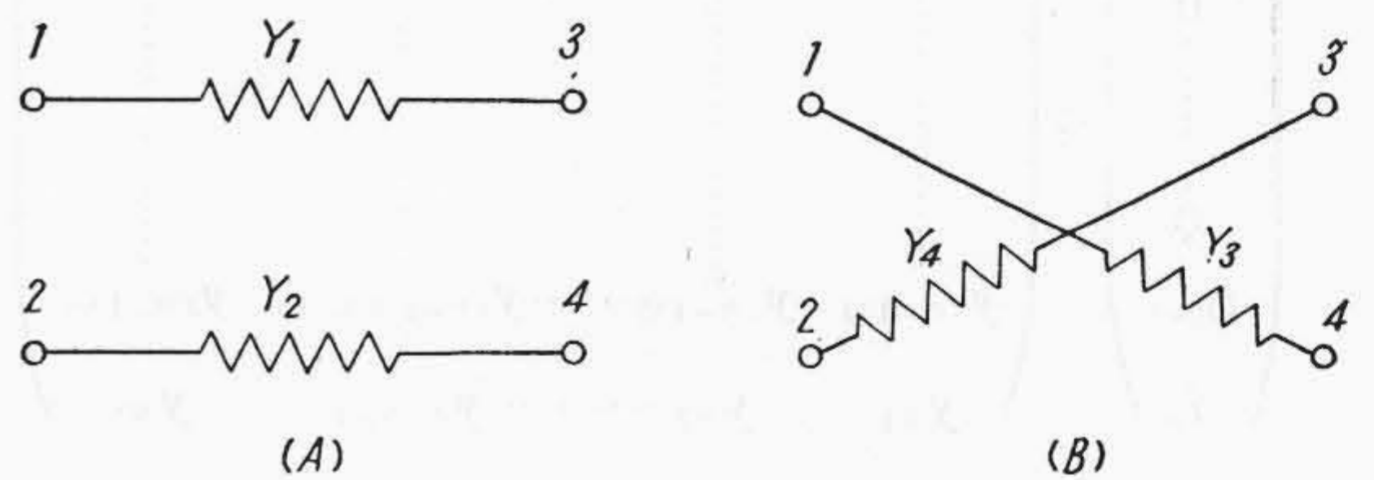
$$\Delta Y = \frac{Y_1Y_2Y_3+Y_2Y_3Y_4+Y_3Y_4Y_1+Y_4Y_1Y_2}{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4} \dots\dots\dots (12)$$

この二式を用いればほかのマトリックスにも容易に変換することができる。

第2図の回路を第3図 (A), (B) の二つの回路に分解し、各々に対する元素を計算するとそれぞれ

$$\begin{cases} Y_{11} = -Y_{12} = -Y_{21} = Y_{22} = \frac{Y_1Y_2}{Y_1+Y_2} \\ Y_{11} = Y_{12} = Y_{21} = Y_{22} = \frac{Y_3Y_4}{Y_3+Y_4} \end{cases}$$

となり、第3図 (A), (B) の元素の和は第2図に対す



第3図 ラチス型回路の分解

るものと一致しない。これは第3図において

$$i_1 \neq -i_2, i_3 \neq -i_4$$

となり (2) 式の条件が成立しないためであり、不平衡型の回路ではこのようなことは起らないことに注意しなければならない。

〔III〕 節点数 n 個の場合

節点数 n 個の孤立した回路網を考え、端子 1, 2 を入力端子、n-1 および n を出力端子とし、これらには外部より電流の流入がありほかの端子には流入電流がないとすると節方程式は次式で表わせる。

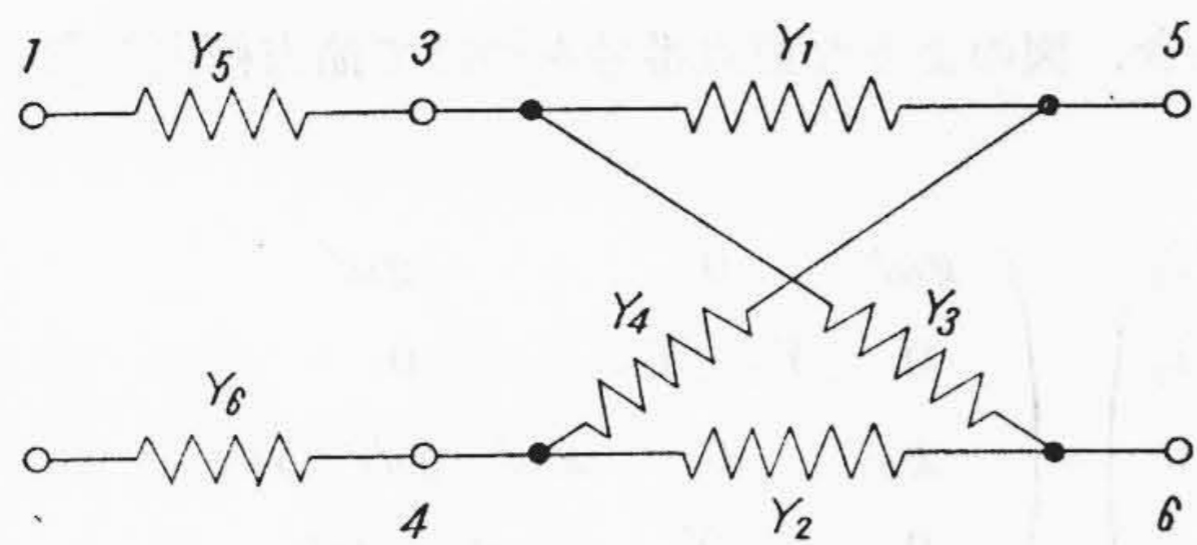
第 2 表 平衡型回路網の四端子行列変換表 (節点数 n)

種類	変換式	回路行列式
(Z)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} D(1, 2) & D(n-1, n) \\ D(n-1, n) & D(1, 2) \end{pmatrix}, \quad d = D(n)$	$\Delta Z = \frac{1}{d} \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, (n-2) \\ (1+2), 3, \dots, (n-2) \end{pmatrix}$
(Y)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} D(n-1, n) & -D(1, 2) \\ -D(1, 2) & D(n-1, n) \end{pmatrix}, \quad d = \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, (n-2) \\ (1+2), 3, \dots, (n-2) \end{pmatrix}$	$\Delta Y = \frac{1}{d} D(n)$
(H)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, (n-2) \\ (1+2), 3, \dots, (n-2) \end{pmatrix} & D(n-1, n) \\ -D(1, 2) & D(n) \end{pmatrix}, \quad d = D(n-1, n)$	$\Delta H = \frac{1}{d} D(1, 2)$
(G)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} D(n) & -D(1, 2) \\ D(1, 2) & \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, (n-2) \\ (1+2), 3, \dots, (n-2) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad d = D(1, 2)$	$\Delta G = \frac{1}{d} D(n-1, n)$
(F)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} D(1, 2) & \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, (n-2) \\ (1+2), 3, \dots, (n-2) \end{pmatrix} \\ D(n) & D(n-1, n) \end{pmatrix}, \quad d = D(n-1, n)$	$\Delta F = \frac{1}{d} D(n-1, n)$
(K)	$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} D(n-1, n) & \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, (n-2) \\ (1+2), 3, \dots, (n-2) \end{pmatrix} \\ D(n) & D(1, 2) \end{pmatrix}, \quad d = D(n-1, n)$	$\Delta K = \frac{1}{d} D(n-1, n)$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i_{n-1} \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1(n-1)} & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2(n-1)} & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{(n-1)1} & y_{(n-1)2} & \dots & y_{(n-1)(n-1)} & y_{(n-1)n} \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{n(n-1)} & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

この式より v_3, v_4, \dots, v_{n-2} を消去すれば容易に次式を得る。

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_{n-1} \\ i_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} D(2, n-1, n) & D(2, n-1, n) & (-1)^n D(2, n-1, n) & (-1)^n D(2, n-1, n) \\ D(1, n-1, n) & D(1, n-1, n) & (-1)^n D(1, n-1, n) & (-1)^n D(1, n-1, n) \\ (-1)^n D(1, 2, n) & (-1)^n D(1, 2, n) & D(1, 2, n) & D(1, 2, n) \\ (-1)^n D(1, 2, n-1) & (-1)^n D(1, 2, n-1) & D(1, 2, n-1) & D(1, 2, n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} \dots \dots \dots (14)$$



第4図 節点数6の回路例

ただし $d = D \begin{pmatrix} 1, 2, n-1, n \\ 1, 2, n-1, n \end{pmatrix}$

ここに記号

$$D \begin{pmatrix} l, m, n, \dots \\ x, y, z, \dots \end{pmatrix}$$

は (13) 式のアドミタンスマトリックスの l, m, n, \dots 行 (横) および x, y, z, \dots 列 (縦) の元素を消去したものの行列式を示す⁽⁵⁾。

(14) 式と第1表の変換表を用いてアドミタンスマトリックスを求めると次式を得る。

$$(Y) = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} D \begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} & -D \begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, 2 \end{pmatrix} \\ -D \begin{pmatrix} 1, 2 \\ n-1, n \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (15)$$

$$\Delta Y = \frac{1}{d} D \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

ここに

$$d = \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, n-2 \\ (1+2), 3, \dots, n-2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix}$$

を示し、(13)式のアドミタンスマトリックスの $1, n-1, n$ 行 $1, n-1, n$ 列を消去し、2行2列に1行1列を加えた小行列を示す。

(15), (16) 式よりほかのマトリックスを求めると第2表のような結果が得られる。いずれもまったく機械的に求められる不定アドミタンスマトリックスの小行列式で計算することができる。

(例)

節点数6個の第4図の回路に対する節方程式は

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ 0 \\ 0 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_5 & 0 & -Y_5 & 0 \\ 0 & Y_6 & 0 & -Y_6 \\ -Y_5 & 0 & Y_1+Y_3+Y_5 & 0 \\ 0 & -Y_6 & 0 & Y_2+Y_4+Y_6 \\ 0 & 0 & -Y_1 & -Y_4 \\ 0 & 0 & -Y_3 & -Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} \dots \dots (17)$$

(15) 式より

$$d = \Delta \begin{pmatrix} (1+2), 3, 4 \\ (1+2), 3, 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} Y_5+Y_6 & -Y_5 & -Y_6 \\ -Y_5 & Y_1+Y_3+Y_5 & 0 \\ -Y_6 & 0 & Y_2+Y_4+Y_6 \end{vmatrix} = (Y_5+Y_6)(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4) + Y_5Y_6 \times (Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)$$

$$dY_{11} = D \begin{pmatrix} 5, 6 \\ 5, 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} Y_5 & 0 & -Y_5 & 0 \\ 0 & Y_6 & 0 & -Y_6 \\ -Y_5 & 0 & Y_1+Y_3+Y_5 & 0 \\ 0 & -Y_6 & 0 & Y_2+Y_4+Y_6 \end{vmatrix} = Y_5Y_6(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)$$

$$dY_{12} = -D \begin{pmatrix} 5, 6 \\ 1, 2 \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_6 & 0 & 0 \\ Y_1+Y_3+Y_5 & 0 & -Y_1 & -Y_3 \\ 0 & Y_2+Y_4+Y_6 & -Y_4 & -Y_2 \end{vmatrix} = Y_5Y_6(Y_3Y_4 - Y_1Y_2)$$

$$dY_{21} = -D \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 5, 6 \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} -Y_5 & 0 & Y_1+Y_3+Y_5 & 0 \\ 0 & -Y_6 & 0 & Y_2+Y_4+Y_6 \\ 0 & 0 & -Y_1 & -Y_4 \\ 0 & 0 & -Y_3 & -Y_2 \end{vmatrix} = Y_5Y_6(Y_3Y_4 - Y_1Y_2)$$

$$dY_{22} = D \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Y_1+Y_2+Y_3 & 0 & -Y_1 & -Y_3 \\ 0 & Y_2+Y_4+Y_6 & -Y_4 & -Y_2 \\ -Y_1 & -Y_4 & Y_1+Y_4 & 0 \\ -Y_3 & -Y_2 & 0 & Y_2+Y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (Y_5+Y_6)(Y_1Y_2Y_3+Y_2Y_3Y_4+Y_3Y_4Y_1 + Y_4Y_2Y_1) + Y_5Y_6(Y_1+Y_4)(Y_2+Y_3)$$

したがってアドミタンスマトリックスの各元素は

$$Y_{11} = \frac{Y_5Y_6(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)}{Y_5Y_6(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) + (Y_5+Y_6)(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{Y_5Y_6(Y_3Y_4 - Y_1Y_2)}{Y_5Y_6(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) + (Y_5+Y_6)(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)}$$

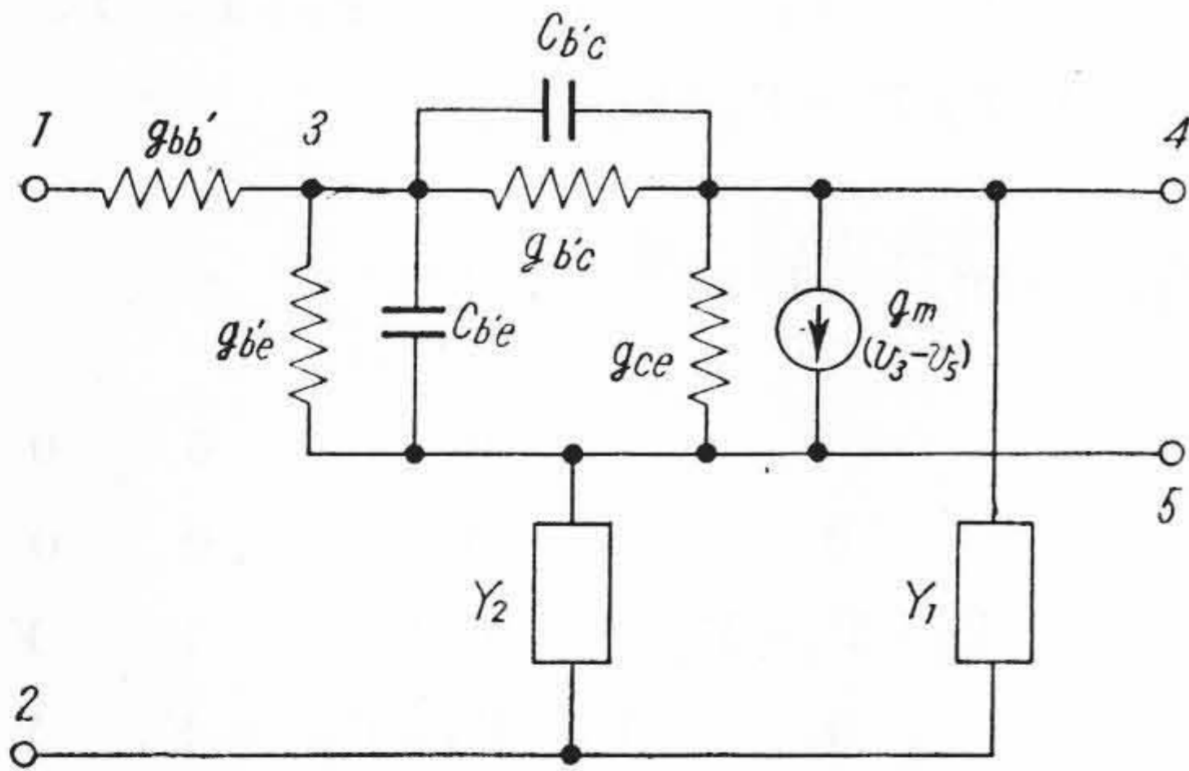
$$Y_{22} = \frac{Y_5Y_6(Y_1+Y_4)(Y_2+Y_3) + (Y_5+Y_6) \times (Y_1Y_2Y_3 + Y_2Y_3Y_4 + Y_3Y_4Y_1 + Y_4Y_2Y_1)}{Y_5Y_6(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) + (Y_5+Y_6)(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)} \dots (18)$$

[IV] 応用例

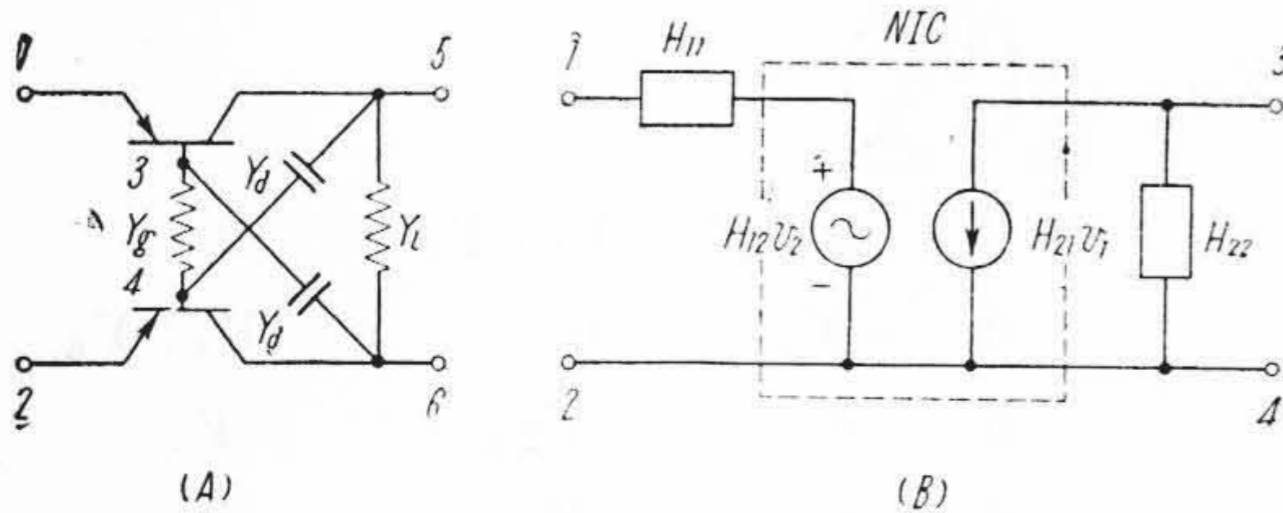
(1) トランジスタ広帯域一方向化増幅器

第5図の回路において

$$\begin{cases} y_{b'e} = g_{b'e} + j\omega C_{b'e} \\ y_{b'c} = g_{b'c} + j\omega C_{b'c} \end{cases}$$



第5図 接合型トランジスタの広帯域一方向化回路



第6図 Linvill の平衡型負性インピーダンス変換器: (A) 回路図, (B) 等価回路

とおき, 図のような節点番号をつけて節方程式を求めると

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ 0 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} \\ 0 & Y_1+Y_2 & 0 \\ -g_{bb'} & 0 & g_{bb'}+y_{b'e}+y_{b'c} \\ 0 & -Y_1 & g_m-y_{b'c} \\ 0 & -Y_2 & -(g_m+y_{b'e}) \\ 0 & 0 \\ -Y_1 & -Y_2 \\ -y_{b'c} & -Y_{b'e} \\ g_{ce}+y_{b'c}+Y_1 & -(g_m+g_{ce}) \\ -g_{ce} & g_m+y_{b'e}+y_{b'c}+g_{ce}+Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \dots (19)$$

この式より Y_{12} の分子を求めると

$$dY_{12} = - \begin{vmatrix} g_{bb'} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1 & -Y_2 \\ g_{bb'}+y_{b'e}+y_{b'c} & -y_{b'c} & -y_{b'e} \end{vmatrix}$$

したがって一方向化ならしめる条件は Y_{12} を 0 とすればよいから

$$Y_1 y_{b'e} - Y_2 y_{b'c} = 0 \dots (20)$$

となる。そこで

$$Y_1 = k y_{b'c}, Y_2 = k y_{b'e} \dots (21)$$

とおき, 第5図のアドミタンスマトリックスの各元素を求めると次の結果が得られる。

$$\begin{cases} Y_{11} = \frac{k g_{bb'}(y_{b'e}+y_{b'c})}{g_{bb'}(1+k)+k(y_{b'e}+y_{b'c})} \\ Y_{12} = 0 \\ Y_{21} = \frac{k g_{bb'} g_m}{g_{bb'}(1+k)+k(y_{b'e}+y_{b'c})} \dots (22) \\ Y_{22} = g_{ce} + \frac{y_{b'c}(g_m+y_{b'e})}{y_{b'e}+y_{b'c}} \end{cases}$$

これより第5図の増幅器の電圧, 電流, 電力利得など容易に求めることができる。なおこの回路の等価電流増幅率は

$$\alpha_{cb} = - \frac{Y_{21}}{Y_{11}} = \frac{-g_m}{y_{b'e}+y_{b'c}} \dots (23)$$

となり, トランジスタ自身の電流増幅率とほとんど変わらない。

(2) 平衡型負性インピーダンス変換器

Linville の負性インピーダンス変換器⁽⁶⁾は第6図(A)で表わされる。図のような節点番号をつけてこの回路の節方程式を求めると

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ 0 \\ 0 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & y_{13} & 0 \\ 0 & y_{11} & 0 & y_{13} \\ y_{31} & 0 & y_{33} + Y_g + Y_a & -Y_g \\ 0 & y_{31} & -Y_g & y_{33} + Y_g + Y_a \\ y_{21} & 0 & y_{23} & -Y_a \\ 0 & y_{21} & -Y_a & y_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただしトランジスタの定数はベース接地における y パラメータを y_{11} , y_{12} , y_{21} , y_{22} とし、また

$$\begin{cases} y_{13} = -(y_{11} + y_{12}), & y_{31} = -(y_{11} + y_{21}) \\ y_{23} = -(y_{21} + y_{22}), & y_{32} = -(y_{12} + y_{22}) \\ y_{33} = y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{cases}$$

とおいた。(24)式より第2表の変換表を用いて H マトリックスを求めると、その元素は次のようになる。

$$\begin{cases} H_{11} = \frac{2(y_{33} + Y_a + 2Y_g)}{\Delta y + y_{11}(2Y_g + Y_a)} \\ \quad \doteq \frac{2\{y_{11}(1-\alpha) + 2Y_g + Y_a\}}{y_{11}(2Y_g + Y_a)} \\ H_{12} = \frac{\Delta y - y_{11}Y_a - 2y_{12}(Y_g + Y_a)}{\Delta y + y_{11}(2Y_g + Y_a)} \\ \quad \doteq -\frac{Y_a}{2Y_g + Y_a} \\ H_{21} = -\frac{\Delta y - y_{11}Y_a - 2y_{21}(Y_g + Y_a)}{\Delta y + y_{11}(2Y_g + Y_a)} \\ \quad \doteq -\frac{(2\alpha - 1)Y_a + 2\alpha Y_g}{2Y_g + Y_a} \\ H_{22} = 2Y_a + Y_g + Y_l - \frac{2y_{11}(Y_g + Y_a)^2}{\Delta y + y_{11}(2Y_g + Y_a)} \\ \quad \doteq Y_l + \frac{Y_g Y_a}{2Y_g + Y_a} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

上式より第6図(A)の等価回路を求めると同図(B)のようになる。 H_{12} が負になるからこの負性インピーダンス変換器は電圧反転型なることがわかる。第6図(B)の点

線で囲まれた NIC の部分を F マトリックスで表わせば

$$NIC \text{ の } (F) \doteq \begin{pmatrix} -\frac{Y_a}{2Y_g + Y_a} & 0 \\ 0 & \frac{2Y_g + Y_a}{(2\alpha - 1)Y_a + 2\alpha Y_g} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (26)$$

今使用周波数に対して Y_a が無視できるとすれば、上の定数は次のようになる。

$$\begin{cases} H_{11} \doteq \frac{2}{y_{11}} \\ H_{22} \doteq Y_l + Y_g \\ NIC \text{ の } (F) \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha - 1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$\alpha \doteq 1$ であるから Y_a を無視できれば NIC の部分は理想負性インピーダンス変換器となり、これに直列に入る抵抗はトランジスタの出力短絡入力抵抗の2倍となり、並列に入る抵抗はエミッタ間の抵抗とコレクタ間の抵抗の並列抵抗となる。

[V] 結 言

二つの節点を入力端子、ほかの二つの節点を出力端子と考えた平衡型回路網の等価四端子マトリックスが、不平衡型回路網の時と同様に機械的に樹立された節方程式より、これと簡単な関係にある小行列式を用いて計算できることを示した。

従来の方法と異なりまったく機械的に行える利点があり、特に能動素子を含む回路網の有力な解析手段となるであろう。これらの方法が回路網の四端子網的取扱いに対し参考になれば幸である。

終りに臨み、終始御指導御鞭撻賜った東京工大川上教授ならびに日立製作所戸塚工場研究課菅田氏に厚く御礼申上げる。

参 考 文 献

- (1) 徳永：線型回路網の機械的節点解析法について、日立評論, Vol. 39, No. 7
- (2) 徳永：回路網理論専門委員会資料 (1956-10)
- (3) 早田：信学誌, 27, 31 (1943-10)
- (4) 平山, 小林：信学誌, 39, 199 (1956-3)
- (5) 藤原：行列および行列式, 岩波書店
- (6) J. G. Linville: I. R. E. (1953-6)

[附 録]

- (1) (15) 式の証明
- (14)式および第1表より Y_{11} の分子はヤコビの定理よ

り次のように変形できる。

$$D\begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} - D\begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} \\ \times D\begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, 2, n-1, n \\ 1, 2, n-1, n \end{pmatrix}$$

Y_{12} などに対しても同様な結果が得られる。

(2) (16) 式の証明

(13)式のマトリックスは不定アドミタンスマトリックスであるから、その性質より次の関係が成立する。

$$D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, 2 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \\ \times \left\{ D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 2, n \end{pmatrix} \right\} \\ D\begin{pmatrix} 1, 2 \\ n-1, n \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \\ \times \left\{ D\begin{pmatrix} 1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 2, n \\ n-1, n \end{pmatrix} \right\} \\ D\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1, n \\ 1, n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 1, n \\ 2, n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 2, n \\ 1, n \end{pmatrix} \\ + D\begin{pmatrix} 2, n \\ 2, n \end{pmatrix}$$

またヤコビの定理より次の関係式が成立する。

$$D\begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, n \\ 1, n \end{pmatrix} \\ - D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} \\ D\begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 2, n \\ 2, n \end{pmatrix} \\ - D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 2, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 2, n \\ n-1, n \end{pmatrix} \\ D\begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 2, n \\ 1, n \end{pmatrix} \\ - D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 2, n \\ n-1, n \end{pmatrix} \\ D\begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, n \\ 2, n \end{pmatrix} \\ - D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 2, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, n \\ n-1, n \end{pmatrix}$$

これらの関係式より ΔY の分子はつぎのように変形できる。

$$D\begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} - D\begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, 2 \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1, 2 \\ n-1, n \end{pmatrix} \\ = D\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \left\{ D\begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 1, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} \right. \\ \left. + D\begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 1, n-1, n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 2, n-1, n \\ 2, n-1, n \end{pmatrix} \right\} \\ = D\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix} (1+2), 3, \dots, n-2 \\ (1+2), 3, \dots, n-2 \end{pmatrix}$$

日立製作所社員社外講演一覽

第62頁より続く

(昭和32年7月受付分)

講演月日	主催	演題	所属	講演者
10. 12~15	金属学会	鉄鋼の金属化学的研究 (第13報) ニッケルおよびクロムを含む白銑のセメントタイトの挙動について	中央研究所	北川 公夫 柴田 則夫
10. 12~15	金属学会	ニッケルの機械的性質に及ぼす添加元素の影響 (第3報)	中央研究所	小林 勝
8. 1	日本機械工業連合会	NMTBA が採用の新機械による節約額簡便チェック法	本社	村川 武雄
7. 19	三共 K K	設備投資について	本社	村川 武雄