U. D. C. 532. 574. 87

大流量測定法としての塩水速度法に関する諸問題 (2)

電極に関する問題点と考察(その2)

電流時間曲線図に関連する精度上の問題と考察

Practical Problems with Regard to Salt Velocity Method for the Measurement of Large Water Discharge (Part II-2)

山 崎 卓 爾*
Takuji Yamazaki

内 容 梗 概

前号では，塩水速度法に用いる合理的な電極形状は双曲線型であることを明らかにし，また管内の水の流動状態を考慮に入れて，塩水速度法における電極に現われる電流時間曲線図を描くことを試みた。この結果は経験的にみて，きわめて実際の図形と類似したものであることを明らかにした。

本号ではこれに引き続き，上述の理論的根拠をもとにして，電流時間曲線図の重心を求めることによる平均流速の算定に際して起る誤差について理論的な検討を行った。比較の基準としての平均流速には小径管についての Kármán の指数公式を採用しているため，大径管の場合の絶対値について信頼度を保証することはできないが，各種要素すなわち電極形状の差，噴射弁ならびに電極間の距離，図形の尾の切断の影響などの具体的な問題についての傾向を知ることができた。

また流動状態に応じて，求めた平均流速の値が異なってくることを明らかにした。さらに第一，第二電極における図形の大きさの変化について，拡散などの作用を考えなくとも，当然第二電極の図形が小さくなることを知った。

最後に図形の重心間距離より平均流速を求める際に最もたしからしい値を与えると思われる電極の理論的形状を求めた。

以上本号での検討はまったく理論的な計算のみによるものであって，どの程度の真実性をもつかは不明である。しかし各項で示された数値の傾向は，ある程度実際試験に際し考慮さるべきものと考える。

1. 緒 言

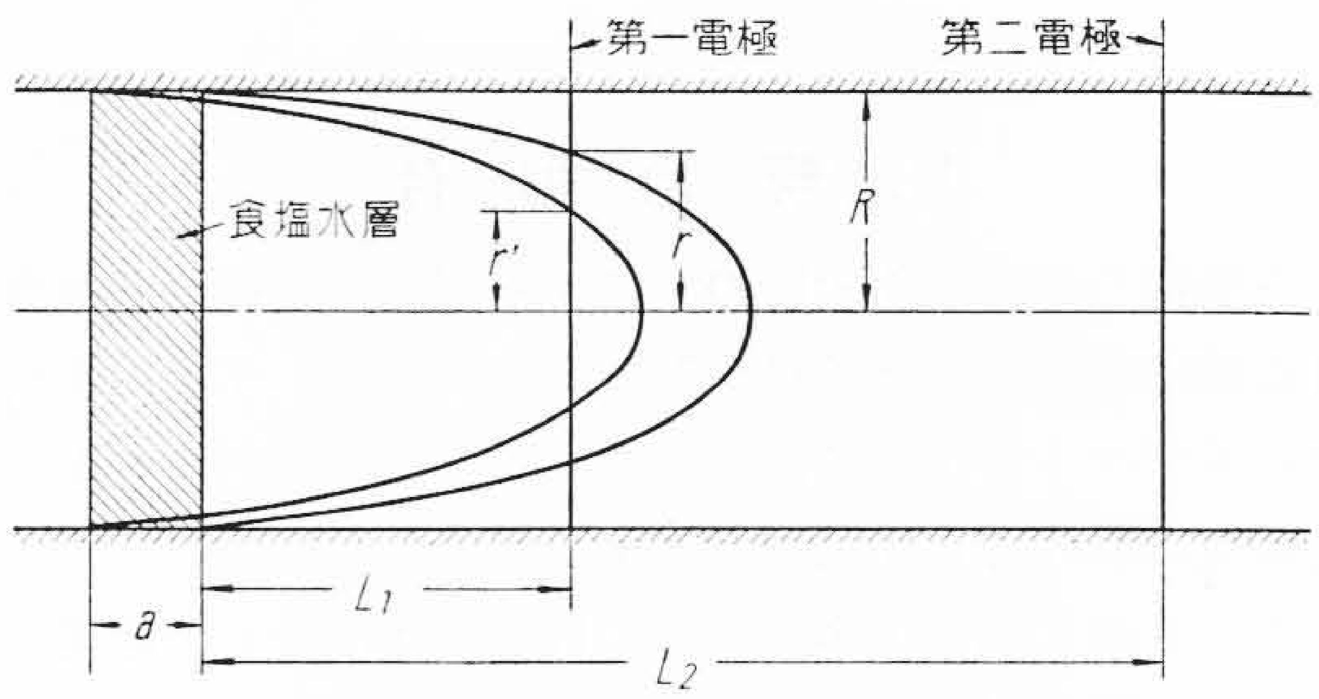
(1)部においては，塩水速度法の概観を述べ，本(2)部の前半（本誌 Vol. 40 No. 7）では，管内の流動状態に関する考察と，平行および双曲線型電極を使用した場合の電流時間曲線図の形状に関して考察を加えた。

ここでは，前号に引き続き，理論的に取り扱われた電流時間曲線図から平均流速を決定する手続きによって起る誤差，したがって塩水速度法の精度について検討する段階に至ったと考える。

周知のように，現行の塩水速度法では電流時間曲線図より平均流速を決定するには，第1および第2電極で得られた電流時間曲線図中の二つの山形曲線と底線によってかこまれた図形の重心位置を求め，二つの重心間の時間的距離Tと，両電極間の寸法距離Lより平均流速L/Tを求めている。このように重心位置を求める方法のほかに種々のやりかたが考えられているようであるが，まだ正式に採り上げるほどにいたっていない。

以上のような状況から，ここでも図形重心をとる方針にしたがうこととし，その結果得られた値に関して精度上の検討を行うこととした。

本号ではもっぱらこの検討を行うこととしているが，これらの事項は塩水速度法の実施に対して直接関係するものではないから，試験実務者のかたがたにはその結論



第1図 塩水速度法の実際における流動状態推定図

以外は特に理解を要するとは思われないが，ひととおり述べることとする。

2. 塩水速度法の精度の理論的検討

2.1 双曲線電極の場合

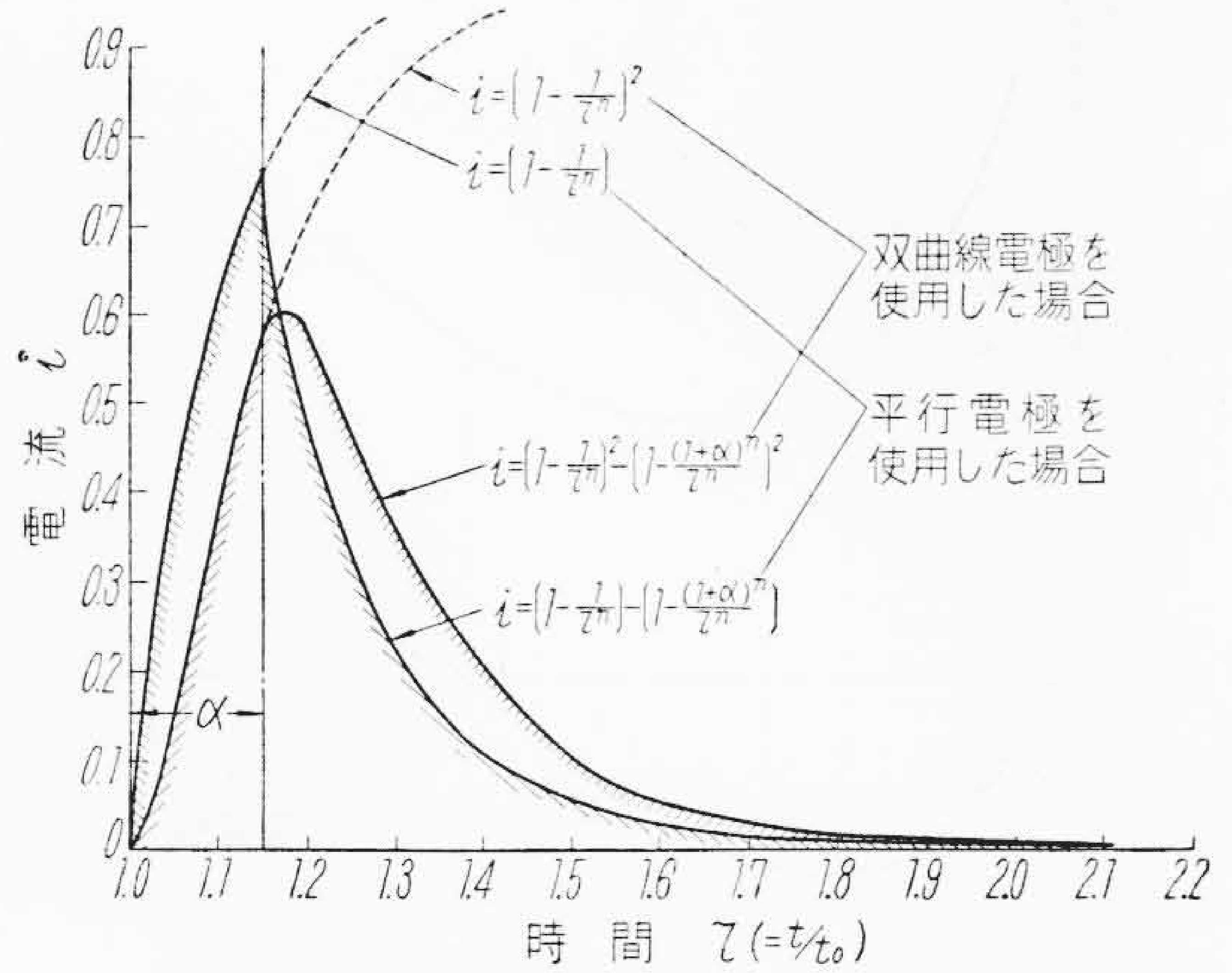
理解に便利なように前号第9図をここに第1図として示す。

さてすでに前号に述べたように，この場合流速分布を現わす式は，拡張された Kármán の指数公式と考える。

$$v = v_0(1-x)^{\frac{1}{n}} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに v は流速，v_0 は考える断面における中心の最大流速，$x=r/R$（r は考える位置の半径，R は管半径）n は流動速度によって変わる数である。

* 日立製作所日立研究所



第2図　電流時間曲線図の理論的形状

時間座標として $t/t_0=\tau$, 食塩水層の厚みを現わす方法として $a/L_1=\alpha$ とし，双曲線電極の場合の電流 i と電極間間隔 x との間の関係 $i=x^2-x'^2$, 平行電極の場合のそれとして $i=x-x'$ を使用して，両者の場合の電流時間曲線図を描くことについては，前号で述べた。ここではその詳細については省略し，これをもとにして次に進むこととする。

塩水速度法では，このような電流時間曲線図の図形重心をとって，二つの図形の重心間の時間的距離と，電極間の寸法より，流量を求めることになるので，ここでは上に述べたような理論的に求められた電流時間曲線図を使用して重心を求めることによる流量の決定値が，理論的な平均流量とどの程度に差異があるかを検討してみる。

周知のように，第2図において図形重心の時間座標上の位置 G を示す値 τ_G は，曲線と底線の包む面積 A と原点に関する図形面積のモーメント M より

$$\tau_G=\frac{M}{A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

として求められる。

面積 A は，曲線の立上り点すなわち $\tau=1$ より $\tau\to\infty$ までの電流 i の積分により

$$A=\int_1^\infty i\,d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

モーメント M は

$$M=\int_1^\infty i\tau\,d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

として求められる。

これら両者を別々に求めて，その比より τ_G が得られるが，これらの積分において，$\tau=1$ より $\tau=1+\alpha$ までは前号に述べたように，電極が食塩水に浸る面積は円形であり，その後は円環となるから，上述の積分は $1+\alpha$ の点で区分される。双曲線電極の場合は $i=x^2$ および $i=x^2-x'^2$ とおきかえられるから

$$\begin{aligned}A&=\int_1^\infty i\,d\tau=\int_1^{1+\alpha}x^2d\tau+\int_{1+\alpha}^\infty(x^2-x'^2)\,d\tau\\&=\int_1^{1+\alpha}\left\{1-\left(\frac{1}{\tau}\right)^n\right\}^2d\tau+\int_{1+\alpha}^\infty\left[\left\{1-\left(\frac{1}{\tau}\right)^n\right\}^2\right.\\&\quad\left.-\left\{1-\left(\frac{1+\alpha}{\tau}\right)^n\right\}^2\right]d\tau=\frac{2n^2}{(2n-1)\,(n-1)}\alpha\cdots(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M&=\int_1^\infty i\tau\,d\tau=\int_1^{1+\alpha}x^2\tau\,d\tau+\int_{1+\alpha}^\infty(x^2-x'^2)\,\tau\,d\tau\\&=\frac{n^2\alpha(2+\alpha)}{2(n-1)\,(n-2)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)\end{aligned}$$

したがって

$$\tau_G=\frac{M}{A}=\frac{2n-1}{2n-4}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

第1電極についてのこれらの値に側符号1を付して表わせば

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{2n^2}{(2n-1)\,(n-1)}\,\alpha\\M_1&=\frac{n^2\alpha(2+\alpha)}{2(n-1)\,(n-2)}\,\alpha\\\tau_{G1}&=\frac{2n-1}{2n-4}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

次に第2電極に関しては，前述の α のかわりに

$$\frac{a}{L_2}=\alpha'$$

として，側符号2を付して現わせば，次の式を得る。

$$\left.\begin{aligned}A_2'&=\frac{2n^2}{(2n-1)\,(n-1)}\,\alpha'\\M_2'&=\frac{n^2\alpha'(2+\alpha')}{2(n-1)\,(n-2)}\,\alpha'\\\tau'_{G2}&=\frac{2n-1}{2n-4}\left(1+\frac{\alpha'}{2}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(8), (9)式においては，第1電極は L_1, 第2電極は L_2 を基準としたものであるから，今第2電極の結果を第1電極の場合と同一の基準になおすために，次の関係を使用する。すなわち

$$\frac{L_2}{L_1}=\lambda \qquad \alpha'=\frac{\alpha}{\lambda}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

とおき，また

$$\tau'=\frac{\tau}{\lambda}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

これらの関係によって，(9)式の τ'_{G2} より τ_{G2} を求めると

$$\tau_{G2}=\lambda\tau'_{G2}=\frac{2n-1}{2n-4}\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(12)$$

したがって第1，第2電極の図形重心間の時間的距離を $\tau_{G_1G_2}$ とすれば

$$\tau_{G_1G_2}=\tau_{G2}-\tau_{G1}=\frac{2n-1}{2n-4}(\lambda-1)\cdots\cdots\cdots(13)$$

今，理論的な(1)式によって得られた平均流速 $\bar{v}$ をもって，両電極間を流れるとしたときの時間的距離を τ_m をもって示せば

$$\tau_m = \frac{L_2 - L_1}{\bar{v}} \quad \cdots\cdots (14)$$

これを書きかえて

$$\tau_m = \frac{L_2 - L_1}{L_1} \frac{L_1}{\bar{v}}$$

しかるに　$\bar{v} = (0.021n + 0.665)\,v_0$

括弧内を N とおけば

$$\bar{v} = N v_0 \quad \cdots\cdots (15)$$

ゆえに　$\tau_m = \left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right)\frac{L_1}{v_0}\frac{1}{N}$

$L_2/L_1 = \lambda,\quad L_1/v_0 = 1$

であるから，上式は

$$\tau_m = \frac{\lambda - 1}{N} = \frac{\lambda - 1}{0.021n + 0.665} \quad \cdots\cdots (16)$$

(13)式および(16)式より，$\tau_{G_1G_2}$ と τ_m との比 ρ を求めると

$$\rho = \frac{\tau_{G_1G_2}}{\tau_m} = \frac{2n-1}{2n-4}(0.021n + 0.665) \quad \cdots (17)$$

を得る。

(17)式によれば，ρ の値は食塩水層の厚み，α および電極間の時間的距離 λ には無関係で，その値はもっぱら流れの条件に関係ある係数 n によって左右されるということがわかる。

2.2　平行電極の場合

以上は双曲線電極の場合であるが，平行電極を使用した場合には，電流と電極間の寸法との関係において，双曲線電極では　$i = x^2$, $i = x^2 - x'^2$　であったものを，平行電極の場合には　$i = x$　および　$i = x - x'$　におきかえて，上記と同様な計算を行えばよい。

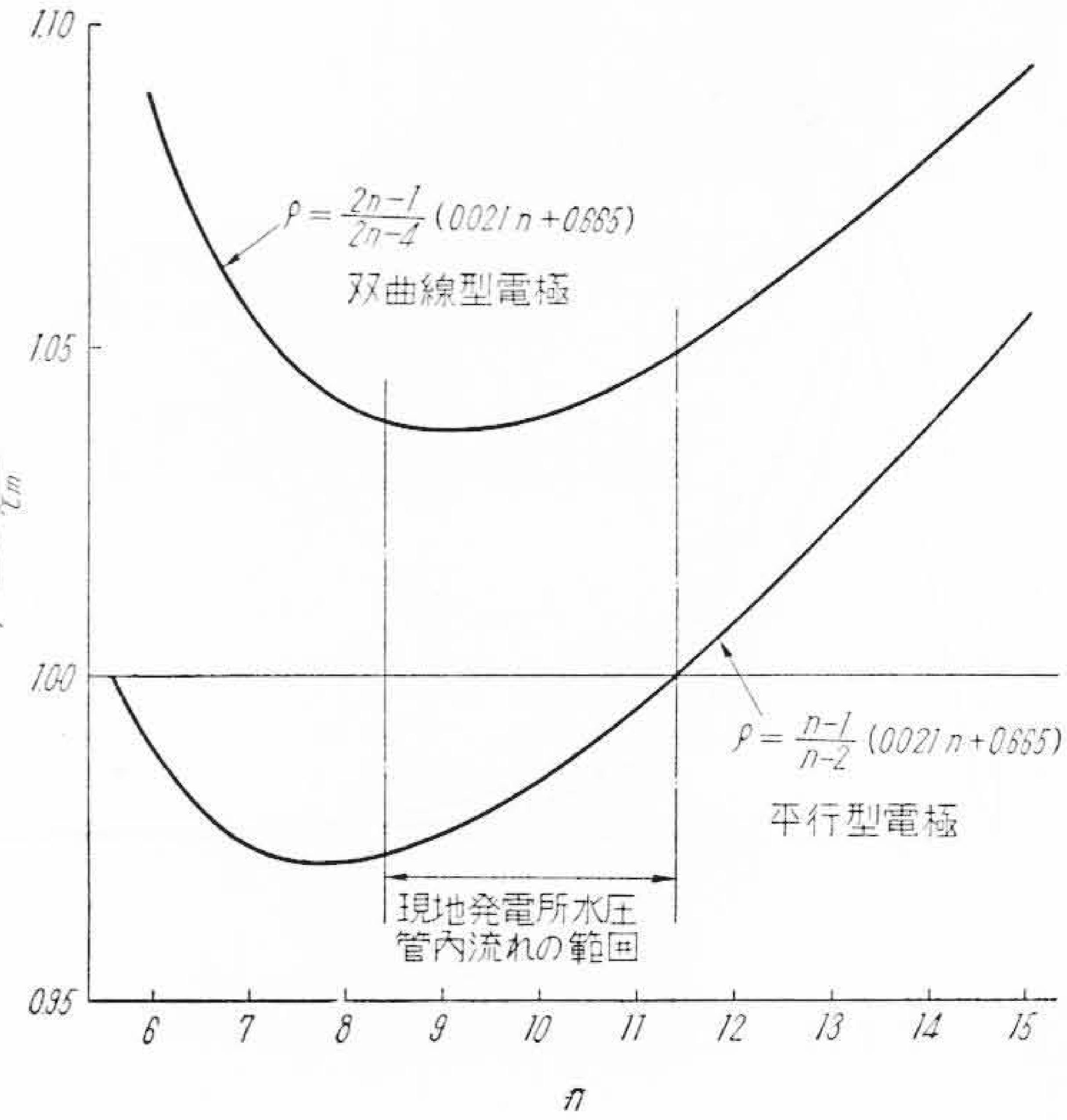
この場合には

$$A_1 = \int_1^{1+\alpha} x\,d\tau + \int_{1+\alpha}^{\infty} (x - x')\,d\tau$$
$$= \int_1^{1+\alpha}\left\{1 - \frac{1}{\tau^n}\right\}d\tau + \int_{1+\alpha}^{\infty}\left[\left\{1 - \frac{1}{\tau_n}\right\} - \left\{1 - \frac{(1+\alpha)^n}{\tau^n}\right\}\right]d\tau = \frac{n}{n-1}\alpha \quad \cdots (18)$$

$$G_1 = \int_1^{1+\alpha} x\tau\,d\tau + \int_{1+\alpha}^{\infty} (x - x')\,\tau\,d\tau$$
$$= \frac{n}{2(n-2)}\left\{(1+2)^2 - 1\right\} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\tau_{G_1} = \frac{G_1}{A_1} = \frac{n-1}{n-2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \quad \cdots\cdots (20)$$

同様に第2電極に対しても計算を行い，両者から前の場合と同様に重心間の時間的距離 $\tau_{G_1G_2}$ を求めれば



第3図　流動状態の係数 n に対する $\rho = \frac{\tau_{G_1G_2}}{\tau_m}$ の値

$$\tau_{G_1G_2} = \tau_{G_2} - \tau_{G_1} = \frac{n-1}{n-2}(\lambda - 1) \quad \cdots\cdots (21)$$

よって $\tau_{G_1G_2}$ と τ_m との比 ρ は

$$\rho = \frac{\tau_{G_1G_2}}{\tau_m} = \frac{n-1}{n-2}(0.021n + 0.665) \quad \cdots (22)$$

すなわちこの場合も ρ の値はもっぱら n の値によってのみかわることになる。

2.3　数値的検討

(17)および(22)式は双曲線および平行電極を用いた場合の精度を検討するに便利である。

今，両式の示す値を横軸に n をとって示すと，**第3図**のようになる。この結果によれば，双曲線電極の場合は ρ の値は常に1より大きく，いいかえれば理論的な流れの所要時間よりも常に長い時間を要し，さらにいいかえれば常に流量を小さく読むことになる。平行電極の場合には $n = 5.5 \sim 11.5$ 間では ρ の値が1より小さく，それ以外のところでは1より大きく，したがって $n = 5.5 \sim 11.5$ の間では流量を大きく，それ以外では小さく読むことになる。

しかしここで理論的平均流速として取り上げたものは，直径100mmの小径管での実験結果をもとにしているものであり，したがってその平均流速がどの程度大径管の場合に十分な信頼度で適用できるかは疑わしいから，上述のような結論は一般的にいえることではない。ただし双曲線電極の場合の方が平行電極の場合に比べて ρ の値が全般的に大きいものであることは認められなければならない。

さて実際に発電所において大流量と称する場合の一般的な考えかたは明確ではないが，筆者らが遭遇する多く

第1表　実発電所における管内流れのレイノルズ数の限界

$R_e = \dfrac{\bar{v}D}{\nu}$ (ν＝運動粘性係数＝$1\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$ とする)

直　径 m	流　速 m/s	R_e 数	n の 値
1	0.2	2×10^5	～ 8.4
5	5	2.5×10^7	～11.4

の場合を総合すると，小さい限界は鉄管直径1m，流速0.2m/s，大なる場合は直径5m，流速 5m/s と考えればよいであろう。これらに相当するレイノルズ数およびこれに対応した上述各式中の n の値の大略を計算すると第1表のようになる。

第3図の縦の線は第1表の値を示しているもので，大多数の発電所鉄管流量はこの間の範囲に含まれると考えてよい。この範囲内では双曲線電極の場合が平行電極の場合よりも，大小水量における差が少ないことがわかる。

しかしすでに述べたように双曲線電極は鉄管断面積を合理的に電極をもって代表せしめているにもかかわらず，その重心間距離が流動条件によってかわることはこの図より明らかである。この点重心間距離をとるという方法に理論的根拠がないといわれる非難を打ち消すことはできないように思われる。

3. 第1，第2電極における図形の差の検討

次に第1，第2 両電極における図形がどのように異なって現われるかを，今までに得られた理論的な図形について検討してみよう。

この際基準となるものは図形の山の高さであるから，ここでは双曲線電極を使用した場合の図形の山の高さを比較してみる。

双曲線電極の場合，$\tau=1\sim1+\alpha$ の間では，電流の大きさ i は $i=x^2$ で現わされるから，i の最大値は $\tau=1+\alpha$ であり，その値は

$$i_{1+\alpha}=x^2=\left\{1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}\right\}^2=\frac{\{(1+\alpha)^n-1\}^2}{(1+\alpha)^{2n}} \quad \cdots\cdots(23)$$

$\tau=(1+\alpha)\sim\infty$ の間での i の最大値を求めるに

$$i=x^2-x'^2=\left\{1-\frac{1}{\tau^n}\right\}^2-\left\{1-\frac{(1+\alpha)^n}{\tau^n}\right\}^2 \quad \cdots\cdots(24)$$

これより

$$\frac{di}{d\tau}=\frac{2n\{1-(1+\alpha)^n\}}{\tau^{n+1}}-\frac{2n\{1-(1+\alpha)^{2n}\}}{\tau^{2n-1}} \quad \cdots\cdots(25)$$

$$\frac{d^2i}{d\tau^2}=\frac{-2n\{1-(1+\alpha)^n\}(n-1)}{\tau^{n+2}}+\frac{2n\{1-(1+\alpha)^{2n}\}(2n+1)}{\tau^{2n+2}} \quad \cdots\cdots(26)$$

(25)式より $\dfrac{di}{d\tau}=0$ とおけば

$$\tau=\{1+(1+\alpha)^n\}^{\frac{1}{n}} \quad \cdots\cdots(27)$$

τ のこの値に対し $\dfrac{d^2i}{d\tau^2}<0$ となる

よって $\tau=\{1+(1+\alpha)^n\}^{\frac{1}{n}}$ は曲線の極大値の位置を示し，その極大値は

$$i_{\max1}=\frac{(1+\alpha)^n-1}{(1+\alpha)^n+1} \quad \cdots\cdots(28)$$

となる。

(28)式の値は(23)式よりも大きいことが明らかであるから，(28)式の値は全曲線中の極大値であり，その座標 τ の位置は(27)式で与えられる。

同様に第2電極での図形の極大点は，上記同様の計算の後　$\alpha'=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ であることを考慮すれば

$$i_{\max2}=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^n-1}{\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^n+1} \quad \cdots\cdots(29)$$

両者の比を求めると

$$\frac{i_{\max2}}{i_{\max1}}=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^n-1}{\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^n+1}\times\frac{(1+\alpha)^n+1}{(1+\alpha)^n-1} \cdots(30)$$

特に α が小さい（塩水層が噴射弁や電極の配置距離に比して小さい，いわゆる大径管のような場合や，長い測定距離をもった場合など）場合には

$$\frac{i_{\max2}}{i_{\max1}}=\frac{2+n\alpha}{2\lambda+n\alpha} \quad \cdots\cdots(31)$$

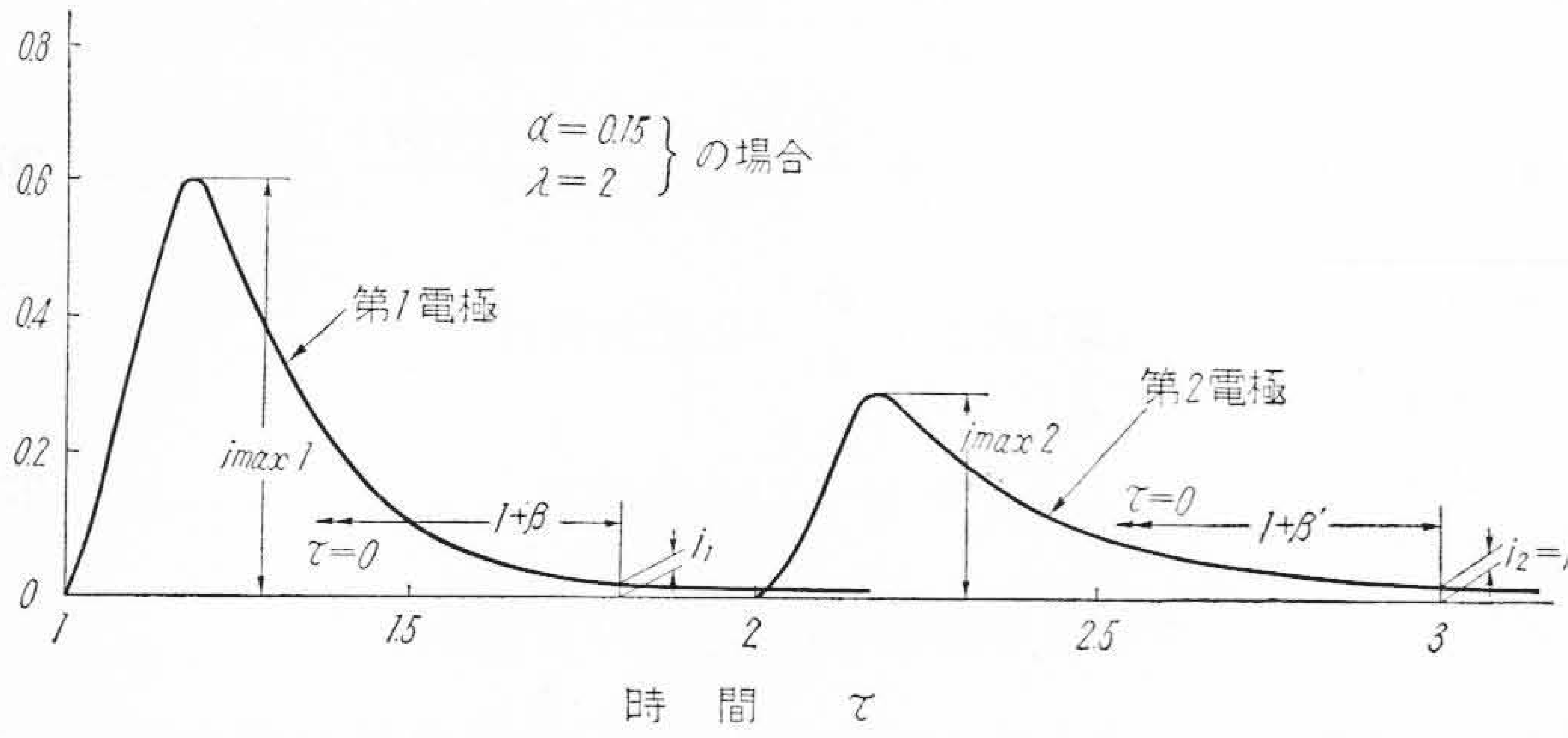
となり，α が小さいことをさらに強調できるとすれば，(31)式より $n\alpha$ を省略して

$$\frac{i_{\max2}}{i_{\max1}}=\frac{1}{\lambda} \quad \cdots\cdots(32)$$

となる。

この概略の傾向よりみると，この場合食塩水が漸次拡散によって希薄となることを考えていないにもかかわらず，第2電極の図形は上のように理論上当然低くなるはずで，その割合は λ すなわち噴射弁と電極との間の距離によって変り，山の高さは第1電極の図形の最高値の約 $\dfrac{1}{\lambda}$ となる。

以上はもちろん第1，第2電極およびその記録装置の感度を同一とした場合のことであって，実際の場合には便宜のため，両者の感度を変えることがあるので，必ず



第4図 第1および第2電極の電流時間曲線図の形状比較の一例

しも図形の大きさがこのようになるといえないのはもちろんである。

第4図は上述のような大きさの関係を図示したものである。図は $\alpha=0.15$, $\lambda=2$ の場合の一例である。

4. 塩水速度法の精度に及ぼす図型の尾の切断の影響

4.1 理論的検討

さて今までの検討はまったく理論的な立場で行ったものであるが，ここでまず気のつくことは管内の流動に関してはその管壁に接する流体は停止していると仮定しており，したがって電流時間曲線図形ではその尾を無限に長くひくことになることである。実際には管内は乱流であるため，まもなく流されてしまい，実験上の図形でも噴射前の高さまで電流曲線がもどるのが普通である。しかし前に計算上求めた**第2図**のような図形では永久に尾を引くことになり，また往々にして実際試験でも絶縁抵抗の変化その他の原因で長く尾を引くことがある。このような場合どこでその尾を切ったらよいかに迷うことがある。次にこれについて上述の理論的検討を押しひろめて考えてみる。

いま，第1，第2電極の図形として**第4図**が得られたとすると，第1電極では山の高さ $i_{\max 1}$ は高く，大きいが，第2電極では前述のように山の高さは概略 $i_{\max 1}$ の $1/\lambda$ であり，また山の傾斜もゆるやかである。実際の取り扱いの上で，図形の尾を切るのは実験者の眼の判定によるものであるから，切断する位置の図形の高さたとえば図の i_1, i_2 はほぼ同じ値であると考えてよい（図では明瞭にわかるように i_1, i_2 の値が相当大きいところでわざと切ってあるが，実際にはさらに小さいのが普通である）。この場合第1電極における i_1 と $i_{\max 1}$ の比 $i_{\max 1}/i_1$ は第2電極における $i_{\max 2}/i_2$ に対し λ 倍であることは明らかである。したがって時間座標上の積分限界も当然異なり，図形重心位置も尾の長さを無限と考えた場合と異なることになる。

いま $u=\dfrac{i_{\max 1}}{i_1}$ ....(33)

とおき，このような i_1 を示す時間座標 $\tau_1=1+\beta$ を求めると

$$i_1=\left\{1-\frac{1}{(1+\beta)^n}\right\}^2-\left\{1-\frac{(1+\alpha)^n}{(1+\beta)^n}\right\}^2=\frac{i_{\max 1}}{u}$$

しかるに(28)式により

$$i_{\max 1}=\frac{(1+\alpha)^n-1}{(1+\alpha)^n+1}$$

であるから，両式を一つにまとめれば

$$(1+\beta)^n=\{(1+\alpha)^n+1\}(u+\sqrt{u^2-u}) \quad \text{...} (34)$$

α が小さいと仮定すれば

$$(1+\beta)^n=(2+n\alpha)\left\{1+\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}u$$

u は前述のようにほかの諸量に比してはなはだ大きい値であることを考慮すれば，最終的には

$$(1+\beta)^n \fallingdotseq 2u(2+n\alpha) \quad \text{........................} (35)$$

すなわち $i_1=\dfrac{i_{\max 1}}{u}$ の値は (34) 式あるいは略して(35)式のような時間座標の位置にある。

第2電極における i_2 は，さきに述べたように同一人が尾を切る場合ほぼ i_1 と同じ高さで切られるから

$$i_2=i_1=\frac{i_{\max 1}}{u}$$

とみてよい。

(31)式より

$$i_{\max 1}=i_{\max 2}\frac{2\lambda+n\alpha}{2+n\alpha}$$

であるから，これと(29)式とより $i_{\max 1}$ を求めて上の式に代入すれば

$$i_2=\frac{n\alpha}{u(2+n\alpha)} \quad \text{..............................} (36)$$

i_2 に相当する時間座標 $\tau=1+\beta'$ を，第1電極の場合と同様にして求めると

$$(1+\beta')^n=\frac{n\alpha'}{\dfrac{n\alpha}{u(2+n\alpha)}}\left(1+\sqrt{1-\frac{\dfrac{2n\alpha}{u(2+n\alpha)}}{n\alpha'}}\right)$$

となる。このうち $\dfrac{2n\alpha}{u(2+n\alpha)}$ の値は1に比してはなはだ小さいから，根号の最後の項もまたはなはだ小さい。よって $\alpha'=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ であることと考え合せて整理すれば，第1電極に関する(35)式に相当するものとして

$$(1+\beta')^n=\frac{2u(2+n\alpha)}{\lambda}-1 \quad \text{..................} (37)$$

が得られる。

(37)式右辺の第1項は u を含む値であるから，1に比してはるかに大きく，大略の値として

$$(1+\beta')^n=\frac{2u(2+n\alpha)}{\lambda}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

と書くことができる。

しかるに $(1+\beta)$ の概略の値は(35)式で与えられているから，これと比較すれば

$$1+\beta'=\frac{1+\beta}{\sqrt[n]{\lambda}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

すなわち i_1 と i_2 を同一の値にとれば，そのときの座標は第2電極に対する $1+\beta'$ が第1電極に対する $1+\beta$ の $1\big/\sqrt[n]{\lambda}$ に短縮されることになる。

以上により求められた時間座標のとりかたによって，図形重心位置したがって両図形重心間の時間的距離およびその結果得られる流速したがって流量の値にいかなる変化が示されるかを次に検討しよう。

まず図形重心位置については，すでに無限の尾をもった場合についての計算が，第1電極について(8)式で求められており，これに対して尾を切断したことによる補正を加えればよい。この計算は(7)式を求める場合とまったく同様であるから，詳細を省略して結果のみを示せば

$$\tau_{G_1}=\frac{(2n-1)\,(1+\beta)}{2(n-2)}\times\frac{n^2\alpha(2+\alpha)(1+\beta)^{2n-2}}{2n^2\alpha(1+\beta)^{2n-1}}$$
$$\frac{-4(n-1)\{(1+\alpha)^n-1\}(1+\beta)^n+\{(1+\alpha)^{2n-1}-1\}(n-2)}{-2\{(1+\alpha)^n-1\}(2n-1)(1+\beta)^n+(1+\alpha)^{2n-1}(n-1)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

α が小さいと仮定すれば

$$\tau_{G_1}=\frac{(2n-1)\,(1+\beta)}{2(n-2)}\times$$
$$\frac{n\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\beta)^{2n-2}-2(n-1)\,(1+\beta)^n+(n-2)}{n(1+\beta)^{2n-1}-(2n-1)\,(1+\beta)^n+(n-1)}$$

このうち分母，分子の最後の項 $(n-1)$，$(n-2)$ は $(1+\beta)^{2n}$ に比較すればはなはだ小さいからこれを省略し，かつ $(1+\beta)^n$ で処理すれば

$$\tau_{G_1}=\frac{(2n-1)\,(1+\beta)}{2(n-2)}$$
$$\times\frac{n\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\beta)^{n-2}-2(n-1)}{n(1+\beta)^{n-1}-(2n-1)}\quad\cdots\cdots(41)$$

第2電極に対しても同様な結果が得られ，これに対して $(1+\beta')=(1+\beta)/\lambda^{\frac{1}{n}}$ および $\alpha'=\alpha/\lambda$ の関係を使用して整理すれば

$$\tau_{G_2}=\frac{(2n-1)\,(1+\beta)}{2(n-2)}$$
$$\times\frac{n\left(\lambda+\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\beta)^{n-2}-2(n-1)\lambda^{\frac{2n-2}{n}}}{n(1+\beta)^{n-1}-(2n-1)\lambda^{\frac{n-1}{n}}}\quad\cdots(42)$$

よって重心間距離 $\tau_{G_1G_2}$ は

$$\tau_{G_1}\tau_{G_2}=\tau_{G_2}-\tau_{G_1}=\frac{(2n-1)\,(1+\beta)}{2(n-2)}$$
$$\left\{\frac{n\left(\lambda+\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\beta)^{n-2}-2(n-1)\lambda^{\frac{2n-2}{n}}}{n(1+\beta)^{n-1}-(2n-1)\lambda^{\frac{n-1}{n}}}\right.$$
$$\left.-\frac{n\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\beta)^{n-2}-2(n-1)}{n(1+\beta)^{n-1}-(2n-1)}\right\}\cdots(43)$$

(35)式の関係を使用して $1+\beta$ の項を書きかえ，(16)式の τ_m との比を求めれば

$$\rho=\frac{\tau_{G_1G_2}}{\tau_m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

として求められる。尾を切断しない場合の ρ の値は n のみの函数であったのに対し，この場合は n，α，λ および u に関係することになる。

4.2　数値的な検討

以上のように，尾を切断した場合の平均値との比 ρ の値は，流れの条件 n のほかに，塩水層の厚みを示す α，噴射弁および電極の位置に関する係数 λ および尾を切断する箇所の尾の太さを示す係数 u によってかわる。次に数値計算例によってそのおのおのの影響をしらべる。

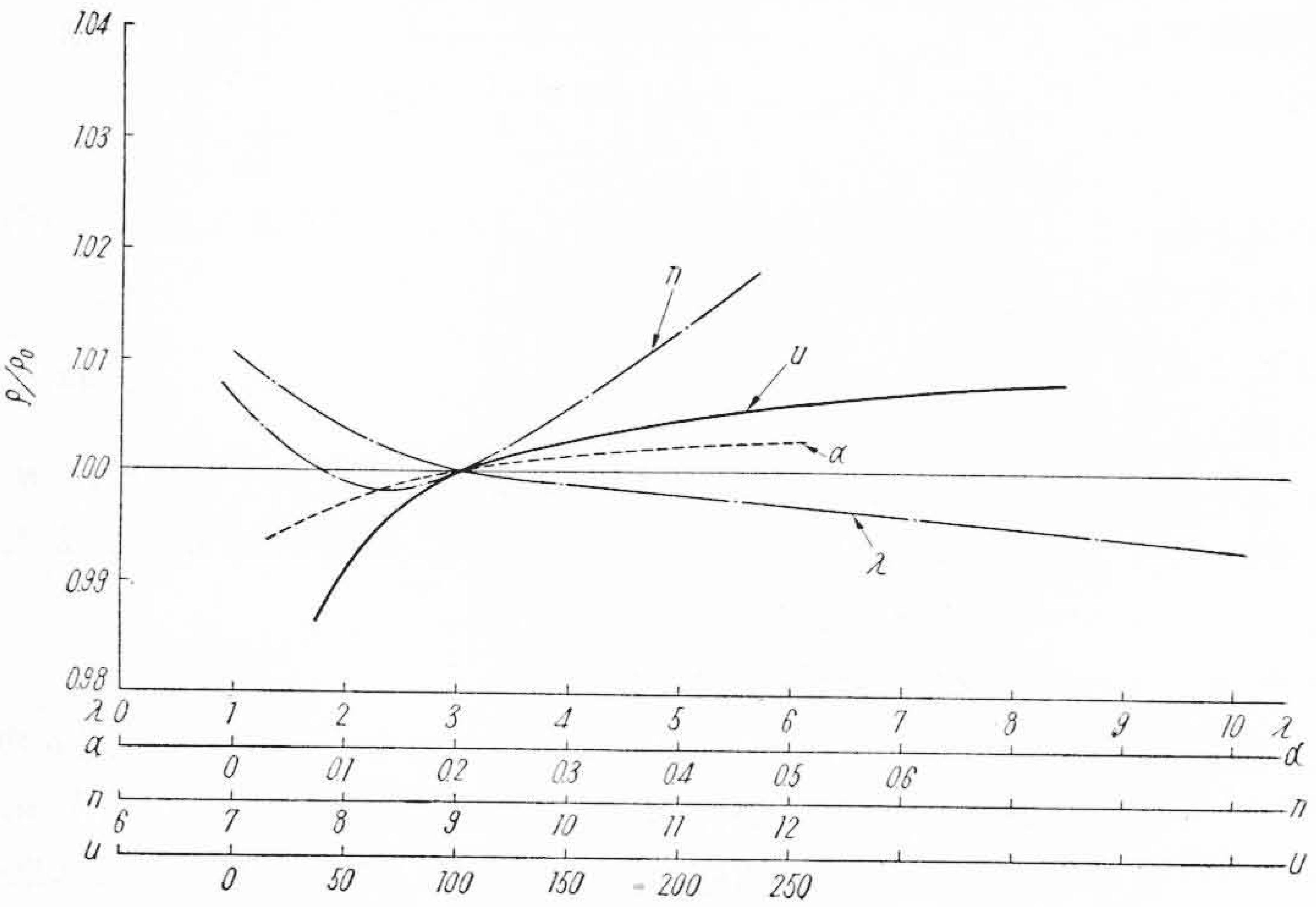
4変数を含んでいるから，ここではなるべく具体的な意味を知るために，各変数に実際の試験に採用される程度の数個の数値をとって計算した。各変数の計算に採用した数値は**第2表**に示すとおりである。

第2表　計算に採用した各変数の数値

$\alpha=\dfrac{a}{L_1}$（a は食塩水層の厚み L_1 は噴射弁と第1電極間の距離）	0.10	$\boxed{0.20}$	0.30	0.50	
n＝流れの状態を示す Kármán の指数公式の指数	7	8	$\boxed{9}$	10	11
$\lambda=\dfrac{L_2}{L_1}$（噴射弁と第2電極間の距離 L_2 と同じく第1電極までの距離 L_1 との比）	2	$\boxed{3}$	5	10	
$u=\dfrac{i_{\max 1}}{i_1}$ 第1電極の曲線の最大値 $i_{\max 1}$ と切断部の尾の太さ i_1 との比）	50	$\boxed{100}$	150	200	

第3表　図形の尾の切断による ρ および ρ/ρ_0 の値の変化
($\rho_0=1.024$ として)

$n=9$, $\lambda=3$, $u=100$ の場合	α	0.10	0.20	0.30	0.50	
	ρ	1.021	1.024	1.025	1.027	
	ρ/ρ_0	0.997	1	1.001	1.003	
$\lambda=3$, $u=100$, $\alpha=0.2$ の場合	n	7	8	9	10	11
	ρ	1.031	1.023	1.024	1.030	1.037
	ρ/ρ_0	1.007	0.999	1	1.006	1.013
$\alpha=0.2$, $n=9$, $u=100$ の場合	λ	2	3	5	10	
	ρ	1.028	1.024	1.022	1.017	
	ρ/ρ_0	1.004	1	0.998	0.993	
$\alpha=0.2$, $n=9$, $\lambda=3$ の場合	u	50	100	150	200	∞
	ρ	1.015	1.024	1.027	1.029	1.037
	ρ/ρ_0	0.991	1	1.003	1.005	1.013



第5図　ρ/ρ_0 の　値　の　変　化

第2表のうち矩形枠で画した値は，いずれか一つの値たとえば α を種々に変える計算に際し，n, λ および u の値を種々にかえることははなはだ複雑となるので，便宜上これらを一定として取り扱う場合に使用する値で，大流量測定に際しては，ほぼ実体を表わす値といえよう。

計算の結果は第3表に示すとおりであり，これを図示したのが第5図である。第5図は計算の結果を，第2表矩形枠で示した数値に相当する値 ρ_0 に対し，他の計算値 ρ の値を ρ/ρ_0 の比で示したものである。ρ の値そのものは平均流速の仮定によって異なる値をとることになるから，ρ の絶対値はこの場合問題にならないものであることはすでに述べたとおりであり，ここでは値の変動の様相を知ることが第一であるからこのようにした。

次に第5図について各要素の変化の影響の概略を説明しよう。まず食塩水層の厚みを示す α についてみるに，$\alpha=0.1\sim0.5$ という一般に実際に現われると思われる状態の間では，それによる ρ/ρ_0 の変化量は0.5%以内にとどまる。そのうちでも $\alpha=0.3$ すなわち噴射弁と第1電極間の距離の1/3程度の厚み以上の場合には，厚みによる変化はきわめて少なくなるものと考えられる。

尾の切断については，尾を山の高さの 1/100 程度で切るとすると尾が無限であると考えた場合の ρ の値（すなわち $u=\infty$ の場合)に比し，約1%程度小さくなっている。また尾の切断は山の高さの 1/100 よりも大きいところで行えば，急にその影響が大きくなることがわかる。しかし 1/100 と 1/200 ではわずかに0.5%程度しか違わない。すなわち尾はむりな切りかたをしない限り，0.5%程度の差以内で合致するということができる。

噴射弁と電極間の距離を示す λ についてみるに，λ が小さいほど，すなわち噴射弁と第1電極との距離に比し，第2電極が比較的近い位置にある場合は，位置による誤差の変動が大きいが，第1，第2電極間の距離が大きくなると，あまり影響がなくなることがうかがわれる。

5. 正しい流量を示すと思われる電極形状の理論的検討

以上の検討によりわかるように，一応合理的と思われた双曲線電極も重心間の時間的距離を求めて流量を算定する方法をとると，求められた値は理論的平均値とは数%の差異を生じ，また一般に考えられている平行電極をとっても同様に数%の差異を生ずる。しかもこれらの両結果の差は平均値に対して一は大きくほかは小さい値をとることから，これら両者の中間に，少なくとも理論的平均値に近い値を示す電極形状が存在するはずである。次にこれについて検討してみよう。

取り扱いを簡単にするため，ここでは図形の尾を切断しない場合について検討する。すでに述べたように電流 i と電極間隔 x および x' の間には

平行電極の場合は　$i=x-x'$

双曲線電極の場合は　$i=x^2-x'^2$

なる関係があるものとして検討したのであるから，もし両者の中間に求むる値があるとすれば

$$i=x^z-x'^z \quad 1<z<2 \quad \cdots\cdots(45)$$

の関係において，z の適当な値が存在するはずである。

解法は 2. の場合とまったく同様であるから，ここには結果のみを示すと

第1電極の図形の重心位置は

$$\tau_{G_1}=(\alpha+2)\frac{B}{A} \quad \cdots\cdots \quad (46)$$

第2電極のそれは

$$\tau_{G_2}=\lambda\left(2+\frac{\alpha}{\lambda}\right)=\frac{B}{A} \quad \cdots\cdots \quad (47)$$

重心間隔距離は

$$\tau_{G_1G_2}=\tau_{G_2}-\tau_{G_1}=\frac{B}{A}[2(\lambda-1)] \quad \cdots\cdots \quad (48)$$

ここに

$$A=1+\frac{z}{n-1}-\frac{z(z-1)}{2}\frac{1}{2n-1}+\frac{z(z-1)(z-2)}{6}\cdot\frac{1}{3n-1}-\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}\frac{1}{4n-1}+\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}{120}\frac{1}{5n-1} \quad \cdots\cdots (49)$$

$$B=\frac{1}{2}+\frac{z}{n-2}-\frac{z(z-1)}{n-2}\frac{1}{2n-2}+\frac{z(z-1)(z-2)}{6}\cdot\frac{1}{3n-2}-\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}\frac{1}{4n-2}+\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}{120}\frac{1}{5n-2} \quad \cdots\cdots (50)$$

平均流速は(16)より

$$\tau_m=\frac{\lambda-1}{0.021n+0.665}$$

よって

$$\rho=\frac{\tau_{G_1G_2}}{\tau_m}=\frac{2B}{A}(0.021n+0.665) \quad \cdots\cdots (51)$$

したがって $\rho=1$ となる条件は

$$2B(0.021n+0.665)=A \quad \cdots\cdots (52)$$

である。

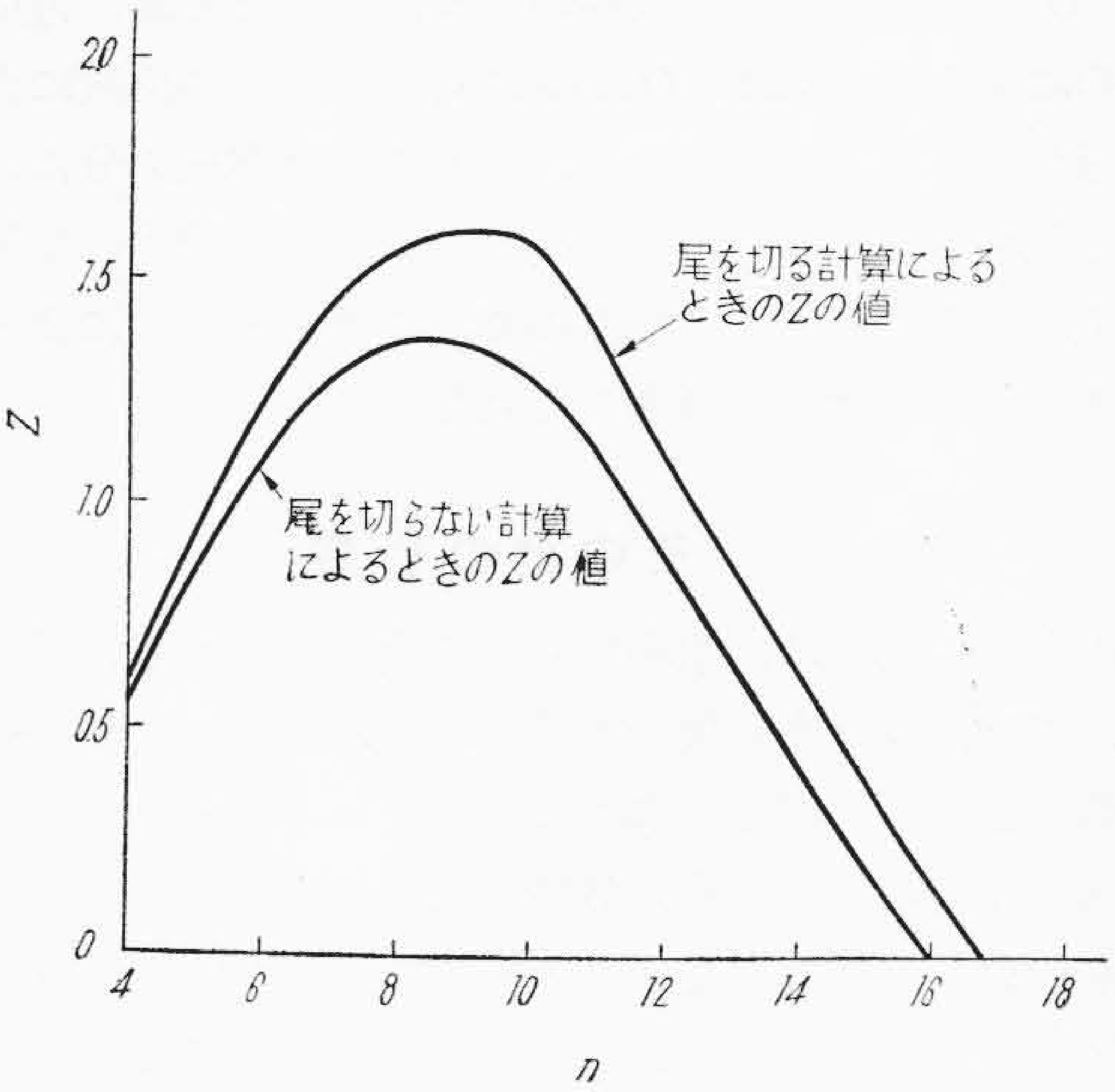
以上は図形の尾を切断しない場合であるが，尾を山の高さの $^1/_{100}$ から $^1/_{200}$ 程度のところで切るとすると，すでにしらべたように(第5図参照)，ρ の値が約1.3％小さくなる。実際の試験ではいかなる場合でもなんらかの形で，無限の尾を残すことはしないから，一応すべての場合において $^1/_{100}$ または $^1/_{200}$ 程度の高さで切っていると考えてよい。その場合には，上述の理論的な ρ の値よりも一応最大限として1.5％小さい値がはじめから得られることを予期して計算してみることも意味がある。この場合には(51)式は次のようになる。

$$1.015\rho=\frac{2B}{A}(0.021n+0.665) \quad \cdots\cdots (53)$$

したがって $\rho=1$ となる条件は

$$2B(0.021n+0.665)=1.015A \quad \cdots\cdots (54)$$

となる。



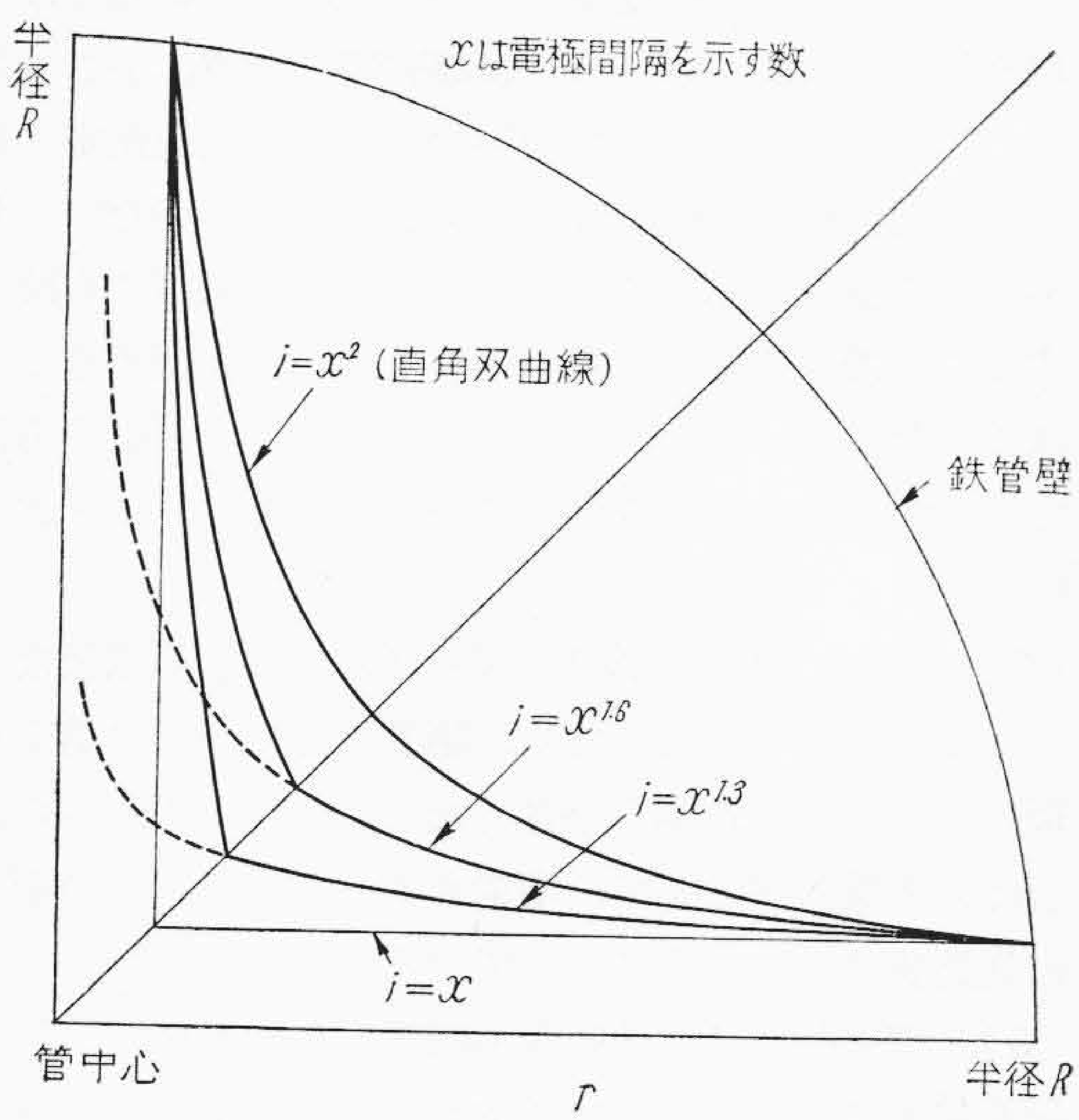
第6図　理論的に $\rho=1$ となるような $i=x^z-x'^z$ における z の値

(52)式および(54)式において，n と z との関係を示すと第6図の曲線が得られる。

われわれの遭遇する実例では $n=8.4\sim11.4$ の範囲であるから，第6図によれば尾を切断しないとしたときには z は約1.3, すなわち電極形状を $i=x^{1.3}$ となるようにえらんだ場合に理論的な流量と一致し，尾の切断を考慮したときには，z は約1.6，$i=x^{1.6}$ となることを示している。

以上の考えかたからすると，実際的に価値あるものとしては，$z=1.6$ 程度であろうと考えられる。

これらの場合の電極の形状を図示すれば，第7図のようになる。この図の $i=x^{1.6}$ および $i=x^{1.3}$ を示す曲線



第7図　3種の電極形状の比較

は OA 線より左では点線のような形となるが，電極を♯型にする場合には，OA 線に対して対称の位置に直交電極がくることになるので，点線部分は実線部分におきかえられることになる。しかしこの部分は管中心に近いわずかの部分のことになるので，このおきかえによって大きい差が生ずるとは考えられない。

6. その他の影響

以上の検討では，水中における食塩水の拡散作用の影響，異常流速分布の場合の差異，食塩水層の不整一性の影響などまだ重要な問題が残されている。

拡散作用について抜山教授[1]は計算を行い，これが重心間距離には影響しないことを報告しており，中野教授[2]はその影響により，算出した流量は実際よりも大きくなるという理論的見解を発表している。大径管，大流量の場合いずれが妥当かについては今のところわかっていない。

流速分布の異常および食塩水層の不整一については，一定の法則がないだけに，理論的および実験的検討を必要とするが，具体的にはまだどこでも検討されていない。将来当然取り上げられるべき問題であろう。

7. 結　　言

前号で論じた電流時間曲線図およびその成立の仮定の上に立って，塩水速度法の精度について，本号で検討した結果を述べると次のようになる。

（1）理論的な計算結果によれば，双曲線電極を使用した場合の第1，第2電極の電流時間曲線の図形重心位置より求められた流量は，つねに理論平均流量よりも小さく，その最も平均値に近い値でも，約3.7％小さい値となる。平行電極を用いれば，ある範囲では平均流量より大きく(その最大は約2.7％)逆に小さくなるところもある。いずれの場合も普通大流量測定として取り扱われる範囲では，平均値とはいいがたい。しかしこの結果は平均流量としての仮定の正否にも関連することであるから，数値的に上述の値を認めることはできないが，少なくとも図形重心をとるという方法では，すべての範囲において正しい値を示すことはないということができる。

（2）第1，第2電極での図形は，食塩水の拡散などによる影響を考えなくても，第2電極の図形は第1電極の図形よりも理論上小さくなり，その山の高さの割合は，大略の値として，噴射弁より各電極までの距離に逆比例するということができる。

（3）理論的には電流時間曲線の山形曲線図は，その尾を無限にひくとしているのであるが，実際には有限(最高山形の $^1/_{100}$～$^1/_{200}$ 程度)のところで尾を切ることになり，計算上からは双曲線電極の場合0.5～1.0％程度平均流量に近い値を示すことになる。

（4）食塩水層の厚みが小さいほど厚みが流量計算値に影響するが，噴射弁と第1電極の距離の $^1/_3$ 程度以上では，その影響が小さくなる。

（5）塩水速度法によって求めた流量は，水の流動状態によってその平均流量との比が異なり，一般に水力発電所で遭遇する流量範囲は，全流量範囲のうち双曲線電極，平行電極ともに流量を最も多く読む範囲である。

（6）噴射弁より第1，第2電極までの距離の割合によっても塩水速度法の精度が左右され，噴射弁と第1電極間の距離に比し，第1，第2電極間の距離が大きくなるほど，求める流量が大きく出る。ただしその差は比較的小さい。

（7）双曲線電極の場合，電極間を流れる電流の強さは $i=x^2\left(x=\dfrac{r}{R}\right.$，$r$ は考える管半径位置，R は管内径)，平行電極では $i=x$ として表わされ，この両者では前者は流量を少なく読み，後者は流量を多く読む傾向がある。このことから逆に流量をちょうど平均値に合致して読み得る電極形状の式を求めることができる。尾の切断を考慮しない理論的な流れについては，求めた式は $i=x^{1\cdot3}$ となり，尾の切断を考慮した場合には $i=x^{1\cdot6}$ となる。実際には最後の関係式の形状の程度が最もよい値を与えるものと考えてよいであろう。

以上は，まったく理論計算の結果を示したものであり，また多くの仮定のもとに行われたものであるから，数値的な結論としては必ずしも信頼すべきものとは考えられないが，その傾向は一応注目さるべきものであり，したがってまた実際の試験実施に対しても有益なよりどころと考えられる。

しかし食塩水の拡散作用，管内の異常流速分布および食塩水層の不整一性の影響などについては未検討であり，これらの点については将来の研究成果に待たなければならない。

終りにここに行われた検討の骨子の組立てに対しては兼重教授の論文[3]が非常に参考になった。ここに記して厚く謝意を表する次第である。

以上で電極に関する検討を終り，次号では食塩水の噴射に関する問題をとり上げる予定である。

参　考　文　献

（1）抜山：工業雑誌 46(昭 3-5, 6)
　　 抜山：機械および電気 1(昭 11-6, 7, 8)
（2）中野：早稲田機友会誌 32, 9(昭 15-1)
（3）兼重：機学誌 35, 289～293(昭 7-4)