

中性子の熱エネルギー化とエネルギースペクトル

A Survey of Neutron Thermalization Theory and Neutron Spectrum

長谷川 和* 川 合 敏 雄** 北 爪 光 幸**
Kazu Hasegawa Toshio Kawai Mitsuyuki Kitazume

松 岡 謙 一** 内ヶ崎 儀一郎**
Ken'ichi Matsuoka Giichiro Uchigasaki

内 容 梗 概

有限の温度をもつ減速材の熱運動を考慮した中性子の減速，熱エネルギー化および中性子スペクトルの理論を紹介し，かつ水素減速材中に Pu^{239} 原子が含まれている場合のスペクトルを， Pu^{239} の吸収断面積を正しく考慮して数値的に計算し，Maxwell 分布からの著しいずれを示した。

1. 緒 言

原子炉内において核分裂によって放出される中性子は平均 2 Mev 程度の高いエネルギーをもつが，この高速中性子は減速材との弾性散乱あるいは原子核的な非弾性散乱（たとえば燃料ウラン原子核による）により次第にエネルギーを失い，熱エネルギーにまで減速される。ところで中性子のエネルギーが減速材の原子核の熱振動のエネルギー（1 ev よりはるかに小さい）に比べて著しく大きい領域では，實際上減速材の熱運動は無視でき原子核は静止しているとして扱って良い。このような速中性子の減速過程については Placzek⁽¹⁾氏をはじめ多くの人々によって論ぜられている。ところが中性子が十分減速されて，減速材原子核の熱エネルギーと同程度のエネルギーになると，減速材との弾性衝突によってエネルギーを失うばかりでなく，さらに減速材原子核からエネルギーを得て加速される効果も無視できなくなる。また減速材が分子あるいは結晶構造をもつ場合には，分子による非弾性散乱あるいは結晶との非弾性相互作用をも考慮しなければならない。

もし熱エネルギー領域において中性子の吸収がなければ，その領域にまで減速された中性子は絶対温度 T で規定される Maxwell 分布をもつ減速材との衝突によるエネルギー受授によって熱平衡に達し，同じ温度での Maxwell 分布を示す。しかしながら低エネルギーにおける燃料および減速材の中性子吸収断面積は，共鳴吸収を別にすればほぼ中性子速度に逆比例して増大する。このエネルギーの低い領域で中性子が多く吸収される効果のため，中性子分布は減速材の Maxwell 分布よりもエネルギーの高い方にずれるが，これがいわゆるスペクトルの硬化と呼ばれる現象である。通常硬化した中性子分布を適当な Maxwell 分布で近似し，その分布に対応する温度を中性子温度と呼んでおり，中性子温度は減速材温度よりかなり高くなる。また吸収がかなり強くなると

より高い温度の Maxwell 分布で近似することすら意味がなくなり，正しく中性子スペクトルを取り扱わなければならない。このように熱中性子はある一つのエネルギーをもつわけではないから，原子炉計算に使用する熱中性子断面積としては，中性子スペクトルと断面積のエネルギー変化とを考慮した適当な平均値を使用しなければならない。中性子断面積の値の取り方によってかなり結果に影響を与えることがあり重要な問題である。

以下は分子あるいは結晶構造をもたない単体ガス減速材に対し上に述べた中性子の熱エネルギー化およびエネルギー・スペクトルについて，これまで Wigner-Wilkins 両氏⁽²⁾以来多くの人達によって行われてきた研究の総合報告であるが，さらにこの問題に関してわれわれの行った研究結果をも述べる。

2. 単体ガス減速材による熱エネルギー化⁽²⁾⁽³⁾の一般論

固体あるいは液体中の単位体積当りの原子の数が 10^{22} 個程度であるのに比べて，現在使用されている原子炉内での熱中性子束は高々 10^{15} n/cm²sec，あるいは中性子密度にして 10^{10} n/cm³ 程度であるから，中性子の熱エネルギー化の取り扱いに際しては次の仮定をすることができる。

- (1) 中性子相互の衝突を無視して良い。
- (2) 減速材のエネルギー分布は中性子との衝突によって影響を受けない。

さて中性子密度 $N(\vec{r}, \vec{v}, t)$ は最も一般的に次の方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \nabla N(\vec{r}, \vec{v}, t) = & S(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ - \gamma(\vec{r}, \vec{v}, t) N(\vec{r}, \vec{v}, t) + \int \{ G_s(\vec{r}, \vec{v}' \rightarrow & \\ \vec{v}, t) N(\vec{r}, \vec{v}', t) - G_s(\vec{r}, \vec{v} \rightarrow \vec{v}', t) N(\vec{r}, \vec{v}', t) \} d\vec{v}' & \\ \dots\dots\dots (1) & \end{aligned}$$

ここに $G_s(\vec{r}, \vec{v} \rightarrow \vec{v}', t)$: 中性子が速度 $\vec{v}$ から $\vec{v}'$ に散乱される確率

* 日立製作所中央研究所 理博

** 日立製作所中央研究所

$S(\vec{r}, \vec{v}, t)$: 外部中性子源
 $\gamma(\vec{r}, \vec{v}, t)$: 中性子が吸収される確率, 巨視的吸収断面積を $\sigma_a(v)$ とする時 $\gamma = v\sigma_a$

特に中性子密度が空間および時間に関係しない場合には, 方程式 (1) は次のように書き換えられる。

$$\int G_s(v' \rightarrow v) N(v') dv' + S(v) = \{V(v) + \gamma(v)\} N(v) \quad (2)$$

ここに $V(v) = \int G_s(v \rightarrow v') dv'$, $v = |\vec{v}|$

以下単体ガス減速材の場合に話を限り, 分子あるいは結晶構造⁽¹⁾による非弾性散乱は考えない。質量 m (ただし中性子の質量を単位にとる) なる減速材ガスは絶対温度 T に対応する Maxwell 分布 $M(v_2)$ をもつと仮定する。ただし $M_m(v_2)$ は次式で与えられる。

$$M_m(v_2) dv_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v_2^2 \exp\left(-\frac{mv_2^2}{2kT}\right) dv_2 \quad (3)$$

しかる時巨視的散乱断面積を σ_s と記せば

$$G_s(v \rightarrow v') dv' = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 v_r \sigma_s(v_r) M_m(v_2) P(v \rightarrow v', v_2) d\mu dv_2 dv' \quad (4)$$

ここで v_r は中性子と原子核との相対速度で次式で与えられる。

$$v_r = [v^2 + v_2^2 - 2vv_2\mu]^{1/2} \quad (5)$$

また^{(1),(4)}

$$P(v \rightarrow v', v_2) dv' = 0 \quad v' < v_m$$

$$= \frac{2v'dv'}{v_M^2 - v_m^2} \quad v_m < v' < v_M \quad (6)$$

$$= 0 \quad v_M < v'$$

ここで v_m および v_M は速度 v の中性子が速度 v_2 の減速材原子核と入射角 $\cos^{-1}\mu$ をもって衝突して得られる最低および最高の速度を表わし, それぞれ次式で与えられる。

$$v_m = \left| v_C - \frac{mv_r}{m+1} \right|$$

$$v_M = v_C + \frac{mv_r}{m+1} \quad (7)$$

また $v_C = [v^2 + 2mvv_2\mu + m^2v_2^2]^{1/2} / (m+1)$ は重心速度である。

低エネルギーにおける散乱断面積 σ_s は通常エネルギーによらず一定であるが, 軽水または重水のように分子構造をもつ場合には, かなりエネルギーによって変化する。ここでは σ_s が次の形をもつ項の和で表わされる場合について考える。

$$\sigma_i \exp(-a_i v_r^2)$$

この場合 G_s は次のようになる (途中の計算は非常に

やっかいであるので, 参考のため付録にその概略を示した)。

$$G_s(v' \rightarrow v) = \sum_i \sigma_i G(v', v; a_i) \quad (8)$$

ここで

$$G(v, v', a_i) = \frac{(m+1)^2 \tau_i^3}{4m \lambda_i} \frac{v'}{v} \{ \exp[-a_i \tau_i^2 v^2] [\operatorname{erf}(\beta \theta_i v' - \beta \xi_i v) \pm \operatorname{erf}(\beta \theta_i v' + \beta \xi_i v)] + \exp[\beta^2 (v^2 - \lambda_i v'^2)] [\operatorname{erf}(\beta \theta_i v - \beta \xi_i v') \pm \operatorname{erf}(\beta \theta_i v + \beta \xi_i v')] \} \quad (9)$$

(9) 式中上の符号は $v' < v$ なる場合を, また下の符号は $v' > v$ なる場合に対応し, かつ

$$\tau_i^2 = \frac{m\beta^2}{m\beta^2 + a_i}, \quad \beta^2 = \frac{1}{2kT}$$

$$\theta_i = \frac{m+1}{2\tau_i \sqrt{m}}, \quad \xi_i = \tau_i \sqrt{m} - \theta_i \quad (10)$$

$$\lambda_i = 1 + m(1 - \tau_i^2),$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

また函数 $V(v)$ は $\int P(v \rightarrow v'; v_2) dv' = 1$ を考慮すると

$$V(v) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 v_r \sigma_s(v_r) M(v_2) d\mu dv_2 = \sum \sigma_i W_i(v) \quad (11)$$

ここで

$$W_i(v) = \tau_i^3 \left\{ \tau_i^2 v + \frac{1}{2m\beta^2 v} \right\} \operatorname{erf}(\sqrt{m}\beta\tau_i v) \exp[-a_i \tau_i^2 v^2] + \frac{\tau_i}{\beta \sqrt{\pi m}} e^{-m\beta^2 v^2} \quad (12)$$

積分核 $G_s(v, v'; a_i)$ は v, v' に関して対称的ではないが, 適当な変換を施すと対称化することができる。すなわち $\lambda_i \beta^2 = a_i \tau_i^2 + \beta^2$ を考慮すると次の関係が得られる。

$$M(v) G_s(v \rightarrow v'; a_i) = M(v') G_s(v' \rightarrow v; a_i) \quad (12)$$

これは detailed balance および Maxwell 分布が平衡分布であることから出てくる。ここで $M(v)$ は温度 T における中性子の Maxwell 分布を表わし次式でえられる。

$$M(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \beta^3 v^2 \exp(-\beta^2 v^2) dv \quad (13)$$

したがって次の方程式で定義される函数 $S(v, v')$ は対称的となる。

$$S(v, v') = \sqrt{M(v)} G_s(v \rightarrow v') \frac{1}{\sqrt{M(v')}} = S(v', v) \quad (14)$$

さらに変数変換

$$\nu(v) = N(v) / \sqrt{M(v)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

を行うと方程式 (2) は次のように書き換えられる。

$$\int_0^\infty S(v, v') \nu(v') dv' = \{V(v) + \gamma(v)\} \nu(v) \quad \dots\dots (16)$$

ただし中性子源はないものとした。

3. 水素による減速⁽²⁾

前章で述べた中性子密度に対する方程式 (16) は、一般の場合には解析的に扱えないが、水素ガス減速材に対して特に σ_s が速度に依存せず、かつ σ_a が $1/v$ 法則に従う場合、Wigner-Wilkins 両氏によって解かれた。まずその取り扱いを説明しよう。

以下 v の代りに新変数 $x = \beta v$ を用いる。この場合 $\alpha_i = 0$, $m = 1$ であるから (9), (11) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_s} G_s(x \rightarrow x') &= 2 \frac{x'}{x} \operatorname{erf}(x') & x' < x \\ &= 2 \frac{x'}{x} \exp(x^2 - x'^2) \operatorname{erf}(x) & x < x' \dots (17) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma_s} V(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x} \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \dots\dots\dots (18)$$

さらに対称核 $S(x, x')$ は (14) 式より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_s} S(x, x') &= 2 \exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^2 - x^2)\right\} \operatorname{erf}(x) & x < x' \\ &= 2 \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 - x'^2)\right\} \operatorname{erf}(x') & x' < x \\ &\dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

以下次の略号を用いる。

$$\begin{aligned} \bar{S}(x, x') &= \frac{1}{\sigma_s} S(x, x'), \quad \bar{V}(x) = \frac{1}{\sigma_s} V(x), \\ \bar{\gamma} &= \frac{1}{\sigma_s} \gamma \equiv v \frac{\sigma_a}{\sigma_s} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

しかる時方程式 (16) は次のようになる。

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^x \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}u^2} \operatorname{erf}(u) \nu(u) du \\ &+ e^{\frac{1}{2}x^2} \operatorname{erf} \int_x^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}u^2} \nu(u) du \\ &= \frac{1}{2} [\bar{V}(x) + \beta \bar{\gamma}] \nu(x) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

積分核 $\bar{S}(x, x')$ は 2 階の常微分方程式の Green 関数の形をもち、積分方程式 (21) は容易に 2 階常微分方程式に変換することができる。すなわち

$$\frac{1}{p(x)} = e^{-x^2} + \sqrt{\pi} x \operatorname{erf}(x) \dots\dots\dots (22)$$

$$q(x) = p(x) [P(x) e^{-x^2} - x^2] \dots\dots\dots (23)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} (\bar{V} + \beta \bar{\gamma}) \nu(x) \right] \\ &+ [q(x) (\bar{V} + \beta \bar{\gamma}) + \frac{4}{\sqrt{\pi}}] \nu(x) = 0 \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

さらに変換

$$\begin{aligned} \mu(x) &= [\bar{V}(x) + \beta \bar{\gamma}] \nu(x), \\ y(x) &= p(x) \mu'(x) / \mu(x) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

を行うと、方程式 (24) は次のようになる。

$$p y' = -y^2 - p \left\{ q(x) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} [\bar{V}(x) + \beta \bar{\gamma}]^{-1} \right\} \dots\dots (26)$$

ところで境界条件 $\mu(0) = 0$ および $\mu(x) \neq 0$ を用いると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{y(x) - \frac{1}{x}\} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

であるから、 $y(x)$ の解が求まれば (25) 式から $\mu(x)$ は次式を用いて計算できる。

$$\mu(x) = \mu'(0) x \exp \int_0^x [p(t) y(t) - t^{-1}] dt \dots\dots (28)$$

また規格条件 $N''(0) = 2$ を用いると常数 $\mu'(0)$ は次のようになる。

$$\mu'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \beta \bar{\gamma} \dots\dots\dots (29)$$

特に x が小さい時の $y(x)$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x} - \frac{4(1+\delta)x}{3(1+2\delta)} + \frac{(103+380\delta+364\delta^2)}{90(1+2\delta)^2} x^3 \\ &\dots\dots\dots (30) \\ &- \frac{(1163+6666\delta+132000\delta^2+8864\delta^3)x^5}{945(1+2\delta)^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad \delta = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \bar{\gamma}$$

(30) の展開式は $x = 0.5$ 程度まで用いることができる。

さらに x が十分大きい時 ($x > 5$) の $y(x)$ の漸近形は x の降幅級数として求められるが、結果だけを記すと

$$N(x) \approx \frac{1}{x^2} \frac{\exp(-2\bar{\gamma}/x)}{1 + \bar{\gamma}/x} \dots\dots\dots (31)$$

$0.5 < x < 5$ に対しては (26) 式を数値積分して $y(x)$ を求め、さらに $\mu(x)$ は次の公式から計算する

$$\mu(x) = \mu(1/2) \exp \int_{1/2}^x p(t) y(t) dt \dots\dots\dots (32)$$

μ がわかれば $\nu(x)$ および $N(x)$ が求まる。さらに x が十分大きいとして近似をすると、(31) 式は次のように書き換えられる。

$$N(x) dx \approx \frac{C x dx}{(x + \beta \bar{\gamma})^3} \dots\dots\dots (33)$$

また減速密度 $q(x)$ は中性子保存の条件から次のように求まる。

$$q(x) = \beta \bar{\gamma} \int_0^x N(u) du \approx \frac{1}{2} x^2 N(x) \dots\dots\dots (34)$$

Wigner および Wilkins 氏は $\delta = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \beta \bar{\gamma} = 0.1, 0.2$ および 1 の場合について計算した。

4. 重い減速材による減速⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾

Wilkins 氏は減速材の質量が非常に重い極限 ($m \gg 1$) に対して、積分方程式を $1/m$ の程度まで正確な 2 階の微分方程式に変換した。一定の散乱断面積に対する対称積分核は (9), (10) および (14) 式から次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_s} S(x, y) = & \theta^2 \left[e^{\frac{1}{2}(x^2 - y^2)} \{ \operatorname{erf}(\theta x - \xi y) \right. \\ & \left. \pm \operatorname{erf}(\theta x + \xi y) \} + e^{\frac{1}{2}(y^2 - x^2)} \{ \operatorname{erf}(\theta y - \xi x) \right. \\ & \left. \pm \operatorname{erf}(\theta y + \xi x) \} \right] \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

ここで $2\sqrt{m}\theta = m+1$, $2\sqrt{m}\xi = m-1$,

また上の記号は $x < y$, 下の記号は $x > y$ なる場合に
対応する。 m が十分大きな極限では⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S(x, y) \nu(y) dy = & x \nu(x) + \frac{1}{2m} [(4-x^2) x \nu(x) \\ & + \nu'(x) + x \nu''(x)] + \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_s} V(x) = & \left(x + \frac{1}{2mx} \right) \operatorname{erf}(\sqrt{m}x) + \frac{e^{-mx^2}}{\sqrt{\pi m}} \\ \approx & x + \frac{1}{2mx} + O\left(\frac{1}{m}\right) \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

したがって積分方程式 (16) は次のようになる。

$$x \nu'' + \nu' + (4x - x^3 - \frac{1}{x} - 2m\beta \bar{\gamma}) \nu = 0 \dots (38)$$

あるいはふたたび $N(x) = \sqrt{M(x)} \nu(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2} \nu(x)$ で
表わすと

$$x N'' + (2x^2 - 1) N' + (4x - \Delta) N = 0 \dots\dots\dots (39)$$

ただし $\Delta = 2m\beta \bar{\gamma}$

さらに中性子密度 $N(x)$ を中性子束 $\phi(E)$ で表わし、
独立変数を x から中性子のエネルギー E に変換すれば次
式が得られる。

$$EkT\phi'' + (2kT - E)\phi' - \frac{m\sigma_a(E)}{2\sigma_s(E)}\phi = 0 \dots\dots (40)$$

この式は Hurwitz⁽⁶⁾, Nelkin および Habetler 氏ら
が散乱マトリックスの理論を用いて導き出した。

さて $\Delta = 0$ (すなわち $\sigma_a = 0$) なる時 (39) 式の解は
Maxwell 分布 $N(x) = x^2 e^{-x^2}$ を与える。 $\Delta \neq 0$ なる場
合には積分方程式の形に書くと都合が良い。すなわち
(39) 式を積分すると

$$x N' + 2(x^2 - 1) N(x) = \Delta \int_0^x N(t) dt \dots\dots\dots (41)$$

さらにこの方程式を形式的に積分すると次式が得られ

る。

$$N(x) = x^2 e^{-x^2} \left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} + \Delta \int_0^x \frac{1}{u^3} e^{u^2} \int_0^u N(t) dt du \right] \dots\dots\dots (42)$$

Δ が小さい場合この積分方程式はくり返し法で解くこと
ができ次のようになる。

$$N(x) = x^2 e^{-x^2} [\mu_0(x) + \Delta \mu_1(x) + \Delta^2 \mu_2(x) + \dots] \dots\dots\dots (43)$$

ここに

$$\mu_{r+1}(x) = \int_0^x \frac{e^{u^2}}{u^3} \int_0^u \mu_r(t) t^2 e^{-t^2} dt du \dots\dots (44)$$

特に

$$\begin{aligned} \mu_1(x) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \Gamma(n + \frac{5}{2})} \\ = & \frac{4x}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{2x^2}{15} + \frac{4x^4}{175} + \frac{8x^6}{2205} + \dots \right] \dots (45) \\ \mu_2(x) = & \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)!}{(2k+1) \Gamma(k + \frac{5}{2})} \right] \\ = & \frac{x^2}{6\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{19x^2}{90} + \frac{157x^4}{3780} + \frac{1263x^6}{176400} + \dots \right] \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

級数 (43) は $x \gg 1$ の時収斂が悪くなるが、 x が十分
大きい時の漸近形は方程式 (39) から次のように求める
ことができる。

$$\begin{aligned} N(x) \approx & \frac{C}{x^2} \left[1 - \frac{\Delta}{2x} + \frac{\Delta^2 + 16}{8x^2} - \frac{\Delta^3 + 76\Delta}{48x^3} \right. \\ & \left. + \frac{\Delta^4 + 220\Delta^2 + 2304}{384x^4} - \dots \right] \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

この式は近似的に次のように書ける。

$$N(x) \sim \frac{C e^{-\Delta/2x}}{x^2 - 2} \dots\dots\dots (48)$$

ところで $\xi \doteq \frac{2}{m}$ とおくと

$$\begin{aligned} e^{-\Delta/2x} = & \exp\left\{ -\frac{2\sigma_a}{\xi\sigma_s} \right\} \doteq \exp\left\{ -\int \frac{2\sigma_a}{\xi\sigma_s} \frac{dv}{v} \right\} \\ = & \exp\left\{ -\int \frac{\sigma_a}{\xi\sigma_s} \frac{dE}{E} \right\} \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

これは共鳴をのがれる確率にほかならない。

さらに減速密度 $q(x)$ は中性子保存則より次のように
与えられる。

$$q(x) = \sigma_s \beta \bar{\gamma} \int_0^x N(x') dx' \dots\dots\dots (50)$$

あるいは (39) 式を用いて積分すると $N(0) = 0$ なるこ
とを考慮し

$$q(x) = \frac{\sigma_s}{m} [(x^2 - 1)N + \frac{1}{2}xN'] \dots\dots\dots (51)$$

x が十分大きいとして (51) 式の右辺に (48) 式を代入すると,

$$q(x) = \frac{\sigma_s}{m} x^2 \left[1 - \frac{2}{x^2} + \frac{J}{4x^3} \right] \quad (52)$$

ところで吸収の無い媒質中での減速密度は, 1 衝突あたりのエネルギー対数の平均減少を ξ とすれば次式で与えられる⁽⁴⁾.

$$q(x) = \frac{1}{2} \xi \sigma_s x^2 N(x) \quad (53)$$

(52) と (53) 式を比較すると ξ は次のようになる。

$$\xi = \frac{2}{m} \left[1 - \frac{2}{x^2} + \frac{J}{4x^3} \right] \quad (54)$$

この式から減速能は減速材の温度が上ると減少し, 吸収があると増加することが結論される。

最後に中性子保存の条件を考慮した中性子束 $\phi(E)$ の近似式を述べておこう⁽⁶⁾。 $\phi(E)$ に対する方程式 (40) を, (42) 式を導いたと同様の手続きを行って積分方程式に変形すると,

$$\phi(\varepsilon) = 1 + \int_0^\varepsilon dZ Z^{-2} e^Z \int_0^Z dt t e^{-t} \left[\frac{m\sigma_a}{2\sigma_s} \right] \phi(t) \quad (55)$$

ここで $\varepsilon = E/T$ である。特に弱い $1/v$ 吸収体に対しては第 1 近似で $\phi(\varepsilon)$ は次のように与えられる ($\sigma_0 \sqrt{\varepsilon} = \text{const}$ なることに注意)。

$$\varepsilon \phi(\varepsilon) = \varepsilon^2 e^{-\varepsilon} [1 + \bar{J} Q(\varepsilon)] \quad (56)$$

ここで $\bar{J} = 2 m \sigma_a x / \sigma_s$,

$$4Q(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon dZ Z^{-2} e^Z \int_0^Z dt t^{1/2} e^{-t} = \varepsilon^{-2} e^\varepsilon H(\varepsilon) \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \varepsilon \rightarrow \infty, H(\varepsilon) &\rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + 2!\varepsilon^{-1} + 3!\varepsilon^{-2} + \dots] \\ &+ O(e^{-\varepsilon}) \quad (58) \end{aligned}$$

ところが中性子保存の微分形式

$$\frac{\partial q(E)}{\partial E} = \sigma_a(E) \phi(E) \quad (59)$$

を用いると, $E \gg T$ なる場合

$$q(E) \rightarrow \frac{2}{m} \sigma_s E \phi(E) \quad (60)$$

が導かれる。さらに中性子保存の積分形式は次式で与えられる。

$$q(E) = \int_0^E dE' \sigma_a(E') \phi(E') \quad (61)$$

(60) と (61) 式から

$$\begin{aligned} E \rightarrow \infty, E \phi(E) &\rightarrow C = \int_0^\infty dE' [m \sigma_a(E') / 2\sigma_s] \phi(E') \\ &\dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

特に $1/v$ 吸収体に対しては

$$\varepsilon \phi(\varepsilon) \rightarrow C = \frac{\bar{J}}{2} \int_0^\infty dx \phi(\varepsilon)$$

$$= -\frac{\bar{J}}{4} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{-1/2} \phi(\varepsilon) \quad (63)$$

吸収が弱い場合には, (56) 式で与えられる $\phi(\varepsilon)$ を (63) 式の右辺に代入し C が次のように求まる。

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \bar{J} + \frac{W}{16} \bar{J}^2 \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad W &= \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{-3/2} H(\varepsilon) = 1 + 2 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (2n+1)^{-2} \\ &= 2.831930 \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

以上の中性子保存則を満足するような $\phi(\varepsilon)$ の第 2 近似を求めるため

$$\varepsilon \phi(\varepsilon) = \varepsilon^2 e^{-\varepsilon} + \frac{A}{4} \bar{J} H(\varepsilon) \quad (66)$$

とおくと, (63) 式に代入することにより A は次のように求まる。

$$A = [1 - \frac{W}{2\sqrt{\pi}} \bar{J}]^{-1} = [1 - 0.79887 \bar{J}]^{-1} \dots (67)$$

5. 数値計算による取り扱い

前の章まで述べてきた解析的な取り扱いにおいては, 吸収断面積 σ_a が $1/v$ 法則に従うなどの制限があった。しかし任意の吸収特性をもつ系における中性子エネルギースペクトルを求めることは, 熱エネルギー領域について平均した有効熱中性子断面積などを評価する際非常に重要になる。このような場合数値計算によらねばならない。スペクトルの計算方法には代表的なものが二つあり, いずれも基礎方程式 (2) に立戻って, 中性子の運動を追跡しようとするものである。

その第一はモンテカルロ法であり, これは中性子が生まれ, 減速され, 熱運動している原子核と衝突してエネルギーを受授し, ついには吸収されて消滅するまでの歴史を一つ一つ追跡し, 数多くの歴史から統計的に中性子スペクトルを求めようとするものである。このモンテカルロ法の思想はスペクトルの問題のみならず, ほかの問題へも応用が広く数値計算方法において重要な地位を占めつつあるが, 高速度の電子計算機を必要とする。第二の方法は連続的な量である速度をいくつかの不連続的な組に分け, 積分方程式を (2) 代数方程式に変換し, くり返し法によって解く方法である。以下この第二の方法による取り扱いを述べる⁽³⁾⁽⁷⁾。

まず (2) 式を数値計算に都合の良いように, 散乱の積分を有限の速度 v^* まですで打ち切る。 v^* が十分大きく $v' > v > v^*$ に対して $G_s(v \rightarrow v') \approx 0$ であれば, すなわち v^* 以上の速さでは, 中性子はほとんど減速されるばかりで減速材からエネルギーを受取ることがまれであれば, $v > v^*$ に対する $N(v)$ として通常の減速理論の解を用いて良い。そこで (2) 式を次のように変形する。

$$S^*(v) + \int_0^{v^*} G_s(v' \rightarrow v) N(v') dv' = [V(v) + \gamma] N(v) \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$\text{ここで } S^*(v) = S(v) + \int_{v^*}^{\infty} G_s(v' \rightarrow v) N(v') dv' \quad \dots (69)$$

$v' > v^*$ に対しては減速材原子核の熱運動を無視して良く次のようにとる。

$$\begin{aligned} G_s(v' \rightarrow v) dv &= 0 & 0 < \alpha v' \\ &= \frac{2\sigma_s(v') v dv}{(1-\alpha^2) v'} & \alpha v' < v < v' \\ &= 0 & \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

ここで $\alpha = (m-1)/(m+1)$

さらに $N(v) = A/[\sigma_s(v) v^2]$ (A は常数) とおいて良いから、 v^* 以下で真の中性子源がない場合には

$$\begin{aligned} S^*(v) &= \frac{Av}{1-\alpha^2} \left[\frac{1}{v^{*2}} - \frac{\alpha^2}{v^2} \right] & \alpha v^* \leq v \leq v^* \\ &= 0 & v \leq \alpha v^* \dots\dots\dots (71) \end{aligned}$$

S の規格化常数 A は単に解の絶対値を決定するだけであるから適当に選んで良い。

以上の近似を行い積分方程式 (68) を次のような定差方程式に書き換える。

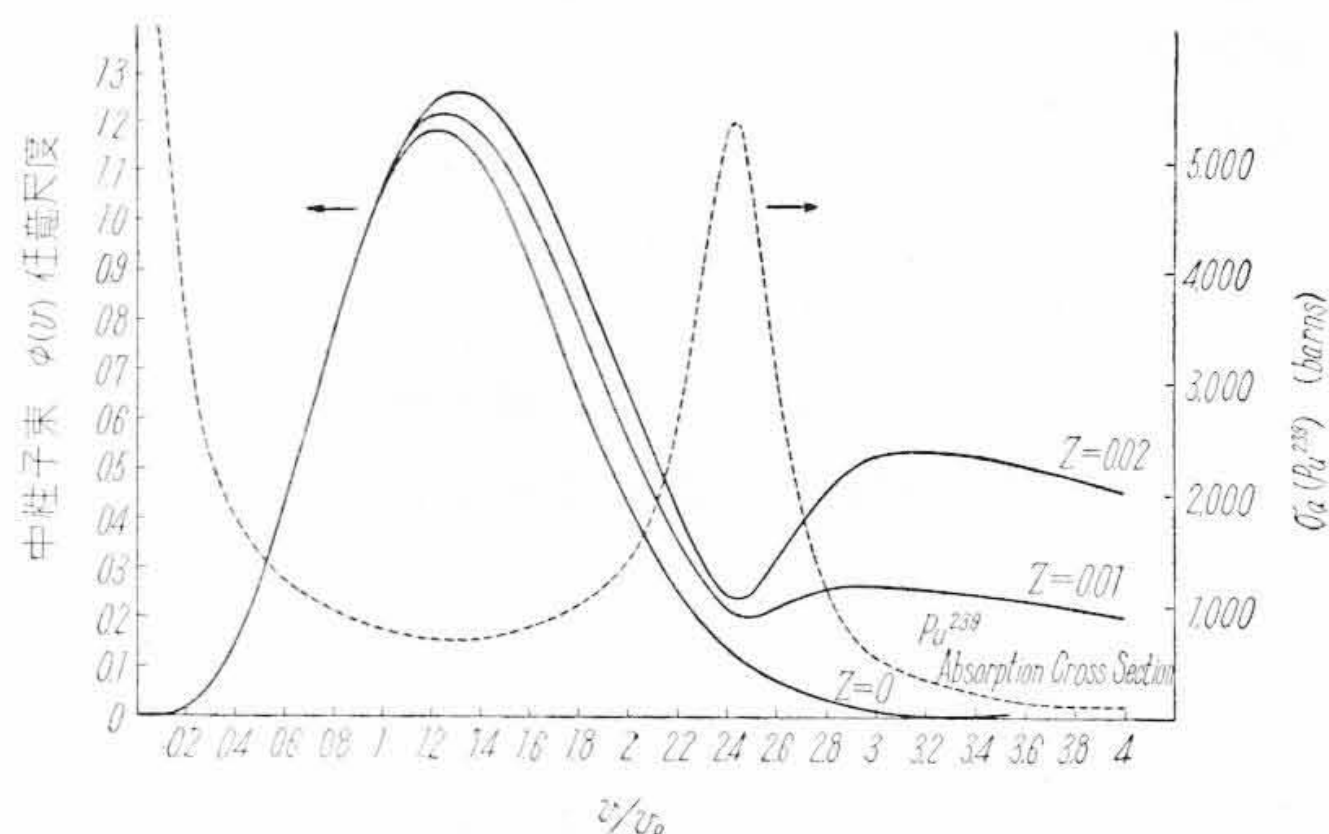
$$\begin{aligned} (V_k + \gamma_i) N_k \Delta v_i &= \sum_{j=1}^L \Delta v_i G_{ij} \Delta v_j N_j + S_i^* \Delta v_i \\ i &= 1, 2, \dots, L \dots\dots\dots (72) \end{aligned}$$

ここで $v^* = v_L$ である。この方程式は $N.S.C.$ に関する L 次元連立方程式であり、電子計算機により直接行列式を解くか、繰返し法によって解くことができる。以下述べる数値解法は吸収断面積がエネルギーとともに著しく変化する場合に対して用いることができる。

原子炉の核計算に際しては原子核特に核分列性原子核の熱中性子に対する平均の吸収断面積およびその温度変化を正確に計算することが必要である。特に Pu^{239} は 0.3 ev で幅が広くかつ強い共鳴吸収を示し $1/v$ 法則から著しくはずれる。このためスペクトルはこの共鳴領域でかなり低下し、熱中性子スペクトルは著しく影響を受けるであろう。したがって Pu^{239} を含む媒質中での中性子束 $\phi(E)$ を σ_a が $1/v$ 法則に従うとして計算し、平均熱中性子断面積 $\bar{\sigma}_a$ ($\bar{\sigma}_a = \int \sigma_a \phi dE / \int \phi dE$) を求めると過大評価になることは明らかである。

この事情を明らかにするため、われわれは水素および Pu^{239} の混合物のスペクトルを、 Pu^{239} の吸収断面積のエネルギー変化を正しく考慮し⁽⁸⁾、 G_s および V として (17) および (18) 式を用いて繰返し数値計算法により求めた。その際用いた仮定は次のとおりである。

- (i) 水素原子核の σ_s はエネルギーによらず、 $\sigma_s = 50 \text{ barns}$
- (ii) 水素の σ_a は $1/v$ 法則に従い、 $v = 2,200 \text{ m/s}$ に



第 1 図 Pu^{239} 原子が水素原子減速材中に存在する場合の中性子スペクトル

ただし $Z = \left(\frac{Pu^{239} \text{ の原子の数}}{H \text{ の原子の数}} \right)$, 温度 $T = 581^\circ \text{K}$ (308°C), $V_0 = 3,091 \times 10^3 \text{ m/s}$, 水素 1 個の散乱断面積を 50 barns , 吸収断面積は 220 m/s において 0.33 barns の値をもつ $1/v$ 法則に従うとした

て 0.33 barns の値をもつ。

(iii) 減速材水素の温度 T は 581°K (308°C)

(iv) Pu^{239} の σ_a は BNL-325 の実験値を用いる。

(Pu^{239} の 0.3 ev の共鳴吸収の Doppler 効果は無視できる⁽⁹⁾。

以上の仮定のもとに $Z (= Pu^{239} \text{ の原子数} / \text{水素の原子数})$ が $0, 0.01$ および 0.02 に対して繰返し数値計算法により中性束 $\phi(v)$ を求めた結果を第 1 図に示す。

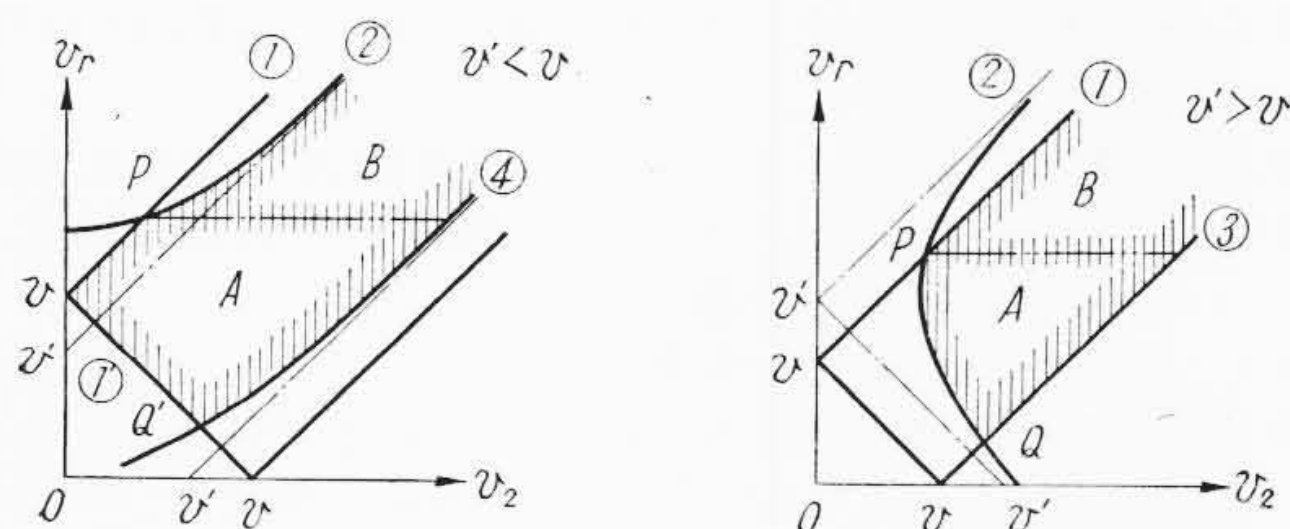
$Z=0$ すなわち Pu^{239} がまったく含まれていない場合には $\phi(v)$ はほとんど温度 T の Maxwell 分布を与えるが、 $Z=0.01$ および $Z=0.02$ に対しては $\phi(v)$ は 0.3 ev において著しい低下を示し、Maxwell 分布とまったく異なった振舞を示す。またスペクトル硬化も明らかである。さらにこのスペクトルを用いて計算した Pu^{239} の平均吸収断面積 $\bar{\sigma}_a$ は、 Pu^{239} の σ_a が $1/v$ 法則に従うとして計算したスペクトルを用いた場合よりも約 1 割小さいことが明らかとなった。

6. 結 言

この報告では水素および重い減速材による中性子の熱エネルギー化および中性子スペクトルの理論を紹介したが、中性子年令、中性子温度、分子および結晶構造の効果など触れ得なかった点も多い。また第 5 章で示したように原子炉計算に際して問題となる平均熱中性子断面積の評価についても最近問題となっている黒鉛炉の温度係数と関連して今後なお検討しなければならない問題も多く残されていると思われる。

付 録 散乱関数 G_s の導き方

本文 (4) 式に (5), (6), (7) 式などを代入すると



第2図 積分領域を示すグラフ

$$G_s(v \rightarrow v') = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{\beta^3 \sqrt{m(m+1)^2 \sigma_i v'}}{\sqrt{\pi}} \times \frac{e^{-a_i v_r^2} e^{-m \beta^2 v_2^2} v_2 d\mu dv_2}{\sqrt{v^2 + 2mvv_2\mu + m^2 v_2^2}} \quad (\text{A1})$$

ここで (5) 式を用いて変数 μ を v_r に変換する。

$$G_s(v \rightarrow v') = \frac{-\beta^3 \sqrt{m(m+1)^2 \sigma_i}}{\sqrt{\pi}} \frac{v'}{v} \int v_r e^{-a_i v_r^2} dv_r \int \frac{v_2 dv_2}{\sqrt{v^2(1+m) + v_2^2 m(1+m) - m v_r^2}} \quad (\text{A2})$$

積分の領域は (6) の不等式の範囲内でもしか

$-1 \leq \mu \leq +1$, すなわち

$$v_r \geq v - v_2 \quad \text{かつ} \quad v_2 - v \leq v_r \leq v_2 + v$$

$v' \geq v$ に場合を分け, (6) を解く際に $V_C \geq \frac{m}{m+1} v_r$,

$v \geq \frac{m}{m+1} v_r$ によって式の形が変わることに注意すると, 積分領域は第2図 (斜線部分) のようになる。図に示した曲線直線①～④の式は次のとおりである。

$$\textcircled{1} \textcircled{1}' \quad v_2 = |v_r - v| \quad \textcircled{3} \quad v_2 = v_r + v$$

$$\textcircled{2} \quad v_2^2 = (v_r - v')^2 + \frac{1}{m} (v'^2 - v^2)$$

$$\textcircled{4} \quad v_2^2 = (v_r - v')^2 + \frac{1}{m} (v'^2 - v^2)$$

$$P \text{ 点の } v_r \text{ 座標: } v_P = \frac{m+1}{2m} (v' + v)$$

$$Q \text{ 点の } v_r \text{ 座標: } v_Q = \frac{m+1}{2m} (v' - v) \quad v_{Q'} = -v_Q$$

(A2) の v_2 についての積分を I' とおき,

$$\sqrt{v^2(1+m) + v_2^2 m(1+m) - m v_r^2} = \frac{\sqrt{1+m}}{\beta} u \quad \text{なる}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \exp \left[-\frac{m a_i}{a_i + m \beta^2} \beta^2 v^2 \right] \left\{ \operatorname{erf} \left[\left\{ \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v' - \left\{ \frac{m \sqrt{m+1} \beta}{\sqrt{a_i + m \beta^2}} - \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \operatorname{erf} \left[\left\{ \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v' - \left\{ \frac{m \sqrt{m+1} \beta}{\sqrt{a_i + m \beta^2}} - \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v \right] \right\} \right. \\ & \quad \left. + \exp \left[\beta^2 \left\{ v^2 - \left(1 + \frac{m a}{a_i + m \beta^2} \right) v'^2 \right\} \right] \left\{ \operatorname{erf} \left[\left\{ \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v - \left\{ \frac{m \sqrt{m+1} \beta}{\sqrt{a_i + m \beta^2}} - \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v' \right] \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \operatorname{erf} \left[\left\{ \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v + \left\{ \frac{m \sqrt{m+1} \beta}{\sqrt{a_i + m \beta^2}} - \frac{(m+1) \sqrt{a_i + m \beta^2}}{2m} \right\} v' \right] \right\} \right\} \right] \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

変換を行えば I' はただちに求まり

$$I' = \frac{\sqrt{\pi}}{2m\beta\sqrt{m+1}} \exp[\beta^2 v^2] \exp \left[-\frac{m}{m+1} \beta^2 v_r^2 \right] \operatorname{erf} u \quad (\text{A3})$$

$$\text{ただし } \operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du$$

したがって (A2) の v_r に関する積分 I は, 定数を除いて, $v' < v$ の時

$$\begin{aligned} I &= \int_{v_Q}^\infty \exp \left[-\left(a_i + \frac{m}{m+1} \beta^2 \right) v_r^2 \right] \operatorname{erf} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{m+1}} \right. \\ & \quad \times (m v_r + (m+1) v') \left. \right] v_r dv_r - \int_{v_{Q'}}^{v_P} \exp \left[-\left(a_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{m}{m+1} \beta^2 \right) v_r^2 \right] \operatorname{erf} \left[+\frac{\beta}{\sqrt{m+1}} (m v_r - (m+1) v) \right] \\ & \quad \times v_r dv_r - \int_{v_P}^\infty \exp \left[-\left(a_i + \frac{m}{m+1} \beta^2 \right) v_r^2 \right] \\ & \quad \operatorname{erf} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{m+1}} (m v_r - (m+1) v') \right] v_r dv_r \dots (\text{A4}) \end{aligned}$$

この場合誤差関数の中にある符号は開平の際正しくとるように注意しなければならない。

ところで

$$\begin{aligned} & \int e^{-A x^2} \operatorname{erf}(B x + C) dx \\ &= -\frac{1}{2A} e^{-A x^2} \operatorname{erf}(B x + C) \\ & \quad + \frac{B}{\sqrt{\pi} A} \int e^{-A x^2} e^{-(B x + C)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2A} e^{-A x^2} \operatorname{erf}(B x + C) \\ & \quad + \frac{B}{2A \sqrt{A+B^2}} \operatorname{erf} \left[\sqrt{A+B^2} \left(x + \frac{BC}{A+B^2} \right) \right] \\ & \quad \times \exp \left[-\frac{AC^2}{A+B^2} \right] \dots (\text{A5}) \end{aligned}$$

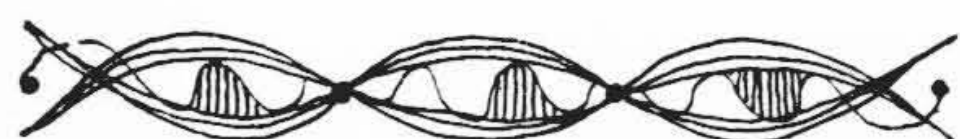
(A5) を用いて I を表わせれば, (A5) の第一項はちょうど相殺されて0となり, (A5) の第二項に相当するもののうち, $v_r = \infty$ を除いた四項だけが残る。したがって

$$I = \frac{m\beta}{2(a_i + \frac{m}{m+1} \beta^2) \sqrt{a_i + m \beta^2} \sqrt{m+1}} \cdot \exp(-\beta v^2)$$

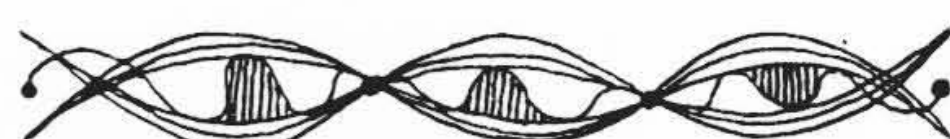
$v' > v$ の場合は (A 3) 式の誤差関数を求めてみればすぐわかるが I の式で v と v' とをとりかえた式に一致する。(A 6) で v と v' をとりかえ、整頓しなおすと、(A 6) において符号を二箇所とりかえたものに等しくなることがわかる。すなわち本文 (9) における複号である。(A 2), (A 3) に残しておいた定数を (A 6) に乗ずれば本文 (8), (9) が得られる。

参考文献

- (1) G. Placzek: Phys. Rev. 69, (1946), 423
R. E. Marshak: Rev. Mod. Phys. 19 (1947) 185
- (2) E. P. Wigner, J. E. Wilkins: AECD 2275 (1948)
- (3) E. R. Cohen: ジュネーブ会議報告 5 (1956) 405
- (4) グラストン, エドランド: 原子炉の理論, 伏見, 大塚訳 (みすず書房)
- (5) J. E. Wilkins: 未発表
- (6) H. Hurwitz, M. S. Nelkin, G. J. Habetler: Nuclear Sci. and Eng. 1 (1956) 280
- (7) J. W. Niesslie, A. J. Berman: Bull. Am. Phys. Soc. 30, No. 3 B-47 (1955)
- (8) D. J. Hughes, J. A. Harvey: BNL 325 (1955)
- (9) M. E. Rose, G. Rabinowitz, W. Miranker, V. L. Sailor, P. Leak: BNL-257 (1953)



特許と新案



最近登録された日立製作所の特許および実用新案

(その 3)

(第 14 頁より続く)

区 別	登録番号	名 称	工 場 別	氏 名	登録年月日
特 許	244780	整 磁 用 合 金	日立研究所	小 野 健 二 根 本 正 早 取 初 蔵	33. 8. 20
実用新案	481161	接 触 変 流 機 の 接 点 部 着 脱 装 置	日立工場	緑 川 勝 弥	"
"	481171	高 流 機 電 機 子	日立工場	大 井 川 一 浩	"
"	481172	回 転 電 機 用 整 流 子	日立工場	大 井 川 一 浩	"
"	481177	界 磁 接 続 線 支 持 装 置	日立工場	菅 原 忍	"
"	481178	調 速 装 置	日立工場	西 野 信 三	"
"	481181	オ イ ル カ ッ プ	日立工場	伊 藤 晃 二	"
"	481192	自 動 電 圧 調 整 装 置	日立工場	綿 引 誠 之	"
"	481197	油 ポンプ 駆 動 用 水 車 の 入 口 弁 装 置	日立工場	浜 島 甫	"
"	481160	エ レ ベータ 着 床 制 御 継 電 装 置	国分工場	紛 沢 秀 夫 逸 見 文 彦 藤 森 和 夫 酒 井 真 平 山 腰 喬 任	"
"	481179	気 体 密 封 碍 管 の 気 体 漏 洩 標 示 装 置	国分工場	天 野 保	"
"	481180	無 人 発 電 所 自 動 操 縦 装 置	国分工場	河 合 義 夫	"
"	481184	蓄 電 器 の 架 台 保 護 装 置	国分工場	落 崎 徳 太 郎 宮 崎 徳 太 郎	"
"	481187	机 型 配 電 盤	国分工場	池 田 正 一 郎	"
"	481189	配 電 盤 固 定 部 と 可 動 部 と の 渡 り 線 接 続 装 置	国分工場	沼 田 明 雄 名 久 井 徳 弥 長 谷 川 林	"
"	481196	交 流 式 電 気 車 の 制 御 装 置	国分工場	永 井 秀 夫	"
"	481182	2 台 の 原 動 機 で 駆 動 さ れ る 装 置 の 逆 転 装 置	笠戸工場	増 原 章 右	"
"	481195	窓 釣 合 装 置	笠戸工場	大 谷 敏 太 郎	"
"	481200	台 車 の 防 振 装 置	笠戸工場	村 田 師 男 山 田 一 男	"
"	481163	変 速 機 の 切 替 装 置	亀有工場	久 保 沢 稔	"
"	481170	給 油 機 構 を 備 え た シ ー プ	亀有工場	富 田 輝 男	"
"	481199	レール運搬用フックブロック	亀有工場	山 崎 勇	"
"	481165	輪 転 印 刷 機 に お け る ロ ー ラ 軸 受 調 整 装 置	川崎工場	猪 島 正 雄 鎌 田 裕 之 小 林 新 八	"
"	481167	冷 凍 装 置	川崎工場	関 川 務	"
"	481168	冷 凍 装 置	川崎工場	関 川 務	"
実用新案	481176	ラ ビ リ ン ス 型 圧 縮 機 の 水 封 装 置	川崎工場	芥 川 重 雄	33. 8. 20

(第 42 頁へ続く)