

近似非線形最適制御

Modified Optimum Nonlinear Control

三 卷 達 夫* 須 藤 卓 郎*
Tatsuo Mitsumaki Takuro Sudo

内 容 梗 概

最近、非線形最適制御に関する論文がふえてきているが、これを実現するには複雑な装置が必要である。ここでは装置を簡単化することを主眼としつつ、ほぼ非線形最適制御に近い制御動作を得る理論と実際との妥協を図った制御方式（これを近似非線形最適制御方式と名付ける）を提案する。さらに、本方式とサンプリング計算制御との関連、ならびにアナログ計算機による本理論の検討結果の一部についてその概要を紹介する。

1. 緒 言

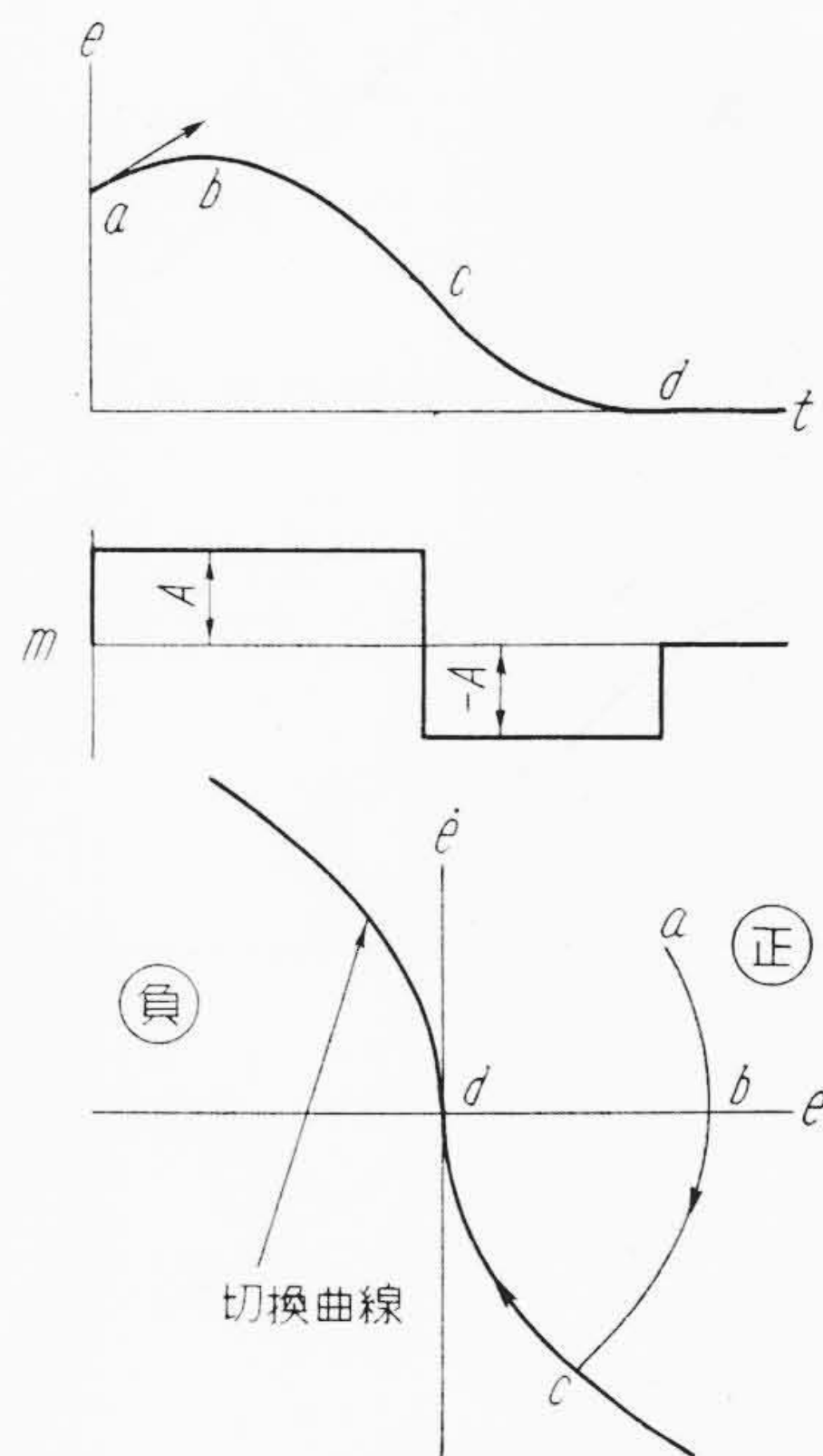
現在、自動制御における制御動作としては PID 動作（比例+積分+微分動作）が最も高級な制御動作として広く用いられている。しかし熟練した人間が対象を制御する場合を考えるとさらに高級な演算（いわゆる判断）を行っているのが普通であり、かつそれらは非線形的なものである。一般に訂正動作として制御対象に与えられる操作量は実際には必ず飽和特性を伴うものである。この量を有効に用いるいわゆる非線形最適制御といわれる制御方式が、1950年ころより提案され、その後理論的な発展を遂げていることは周知のとおりである⁽¹⁾。

しかしこのような制御方式は実際に広く適用されているわけではなく諸外国でもいまだ実験室的な段階にあるといつても過言ではない。これはこのような制御動作をさせようとする装置がややもすると複雑になることに一因があると考えられる。ここで述べる近似非線形最適制御とはこのような観点から装置を簡単化しつつ最適制御に近いものを得ようとする制御方式である。

2. 記 号

r	目標値	小文字は時間領域、'は時間に関する微分を示し、大文字は周波数領域を示す。
e	偏差	
c	制御量	
m	操作量	
A	操作量の飽和値	
$f(e, \dot{e})=0$	切換え曲線	
$e+k\dot{e}=0$	切換え直線	
s	ラプラス演算子	
z	パルス演算子	
Δ	サンプリング周期	
n	サンプリング時刻 $n=0, 1, 2, \dots$	
K	比例定数	
α	時定数の逆数	
$d=e^{-\alpha}$		

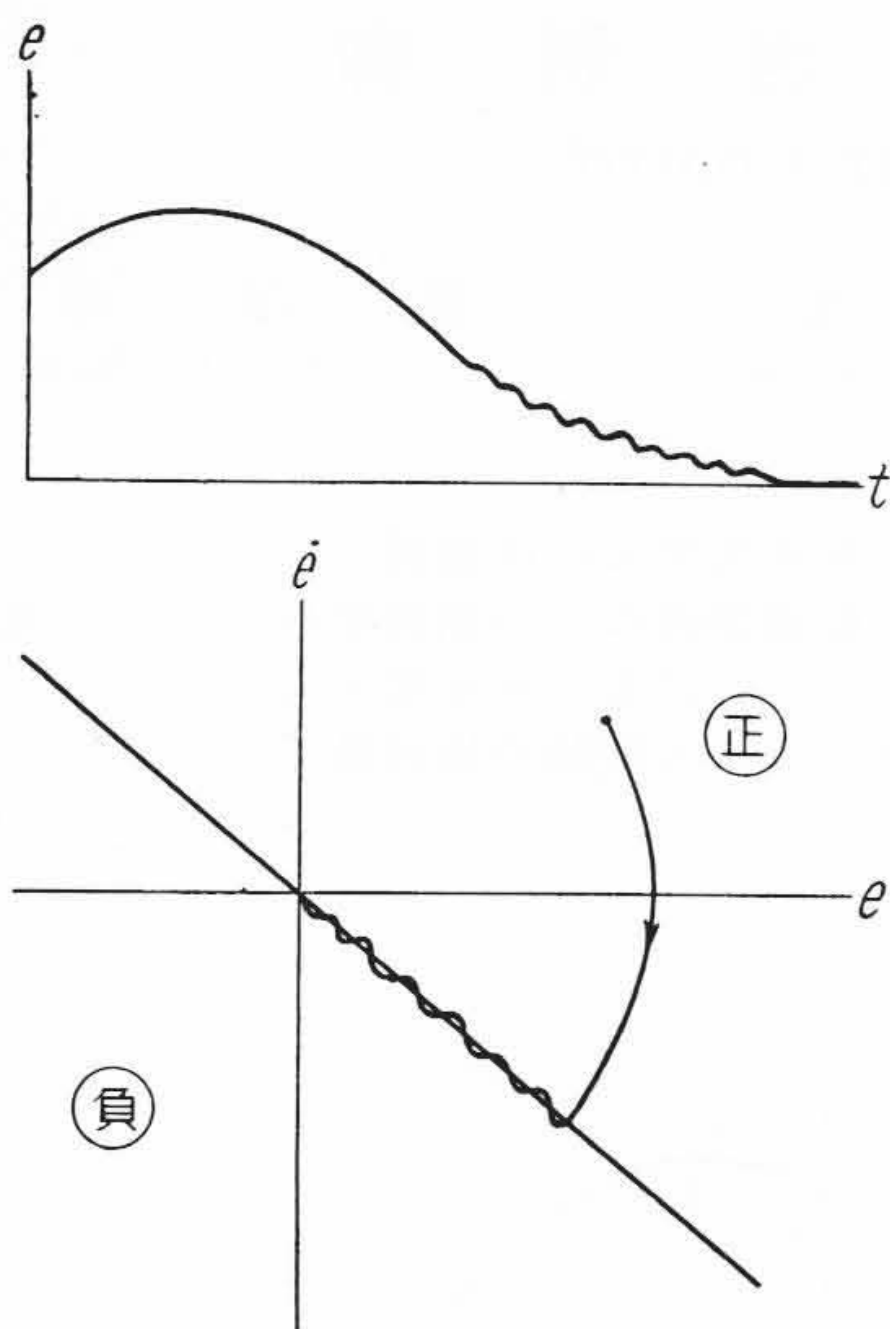
* 日立製作所中央研究所



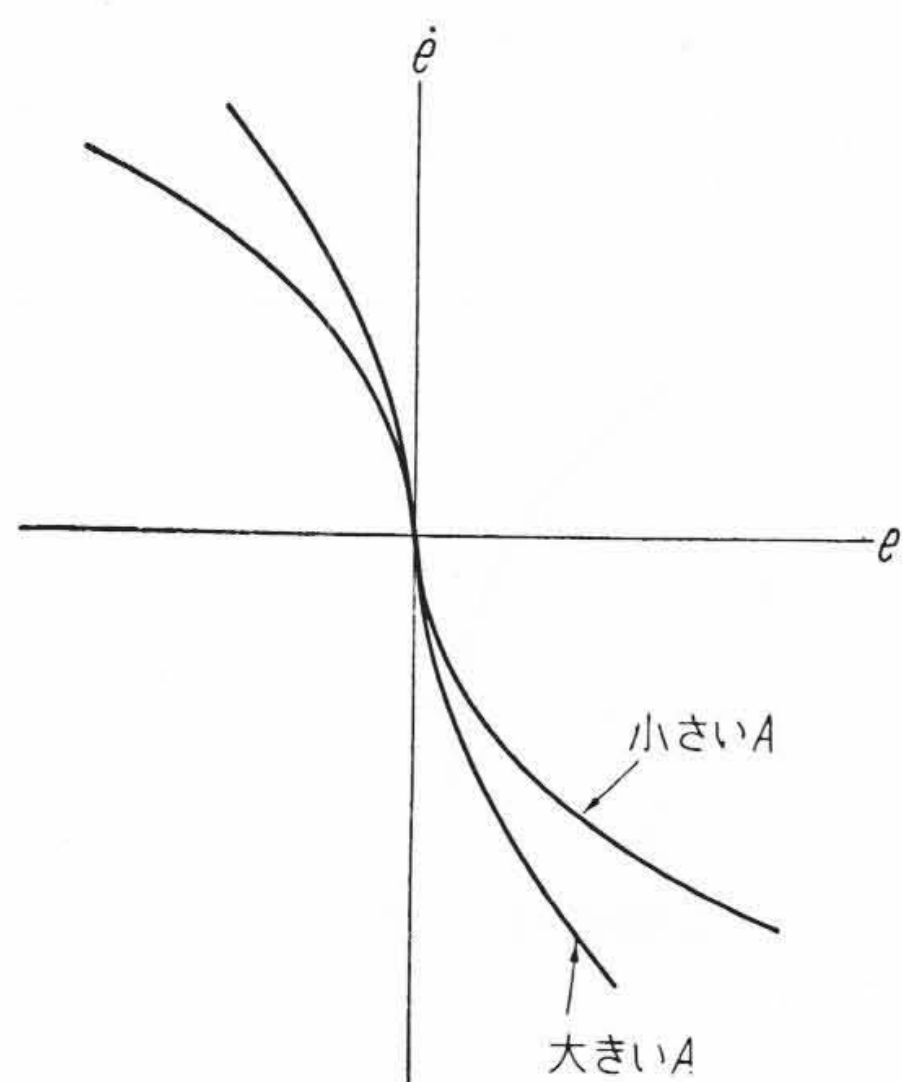
第1図 非線形最適制御の原理

3. 近似非線形最適制御の原理

まず非線形最適制御とは第1図のように偏差が正、偏差の微分値も正すなわち平衡点より離れようとしているので、この場合は当然引戻すため利用できる最大操作量 $+A$ を与える。次にある時刻に操作量を $-A$ に切換えると応答は第1図の経過をたどる。いま切換え時刻をうまく選ぶとちょうど偏差がゼロになった時刻に偏差の微分値もゼロ（水平）の状態を得ることができる。このとき操作量を平衡値に保てば制御量はその値を保ち応答は完了する。この切換えるべき時刻を考えるには位相面（偏差 e およびその微分値 $\dot{e}$ を両軸とする平面）で取り扱うのが便利である。すなわち位相面上に切換え曲線を定め、現在の偏差および微分値がこの曲線のいずれ側にあるかを判定して対応する操作量を与えればよい⁽¹⁾。これを実現するには切換え曲線の方程式を解くとか、また関数発



第2図 リレー制御の終点現象

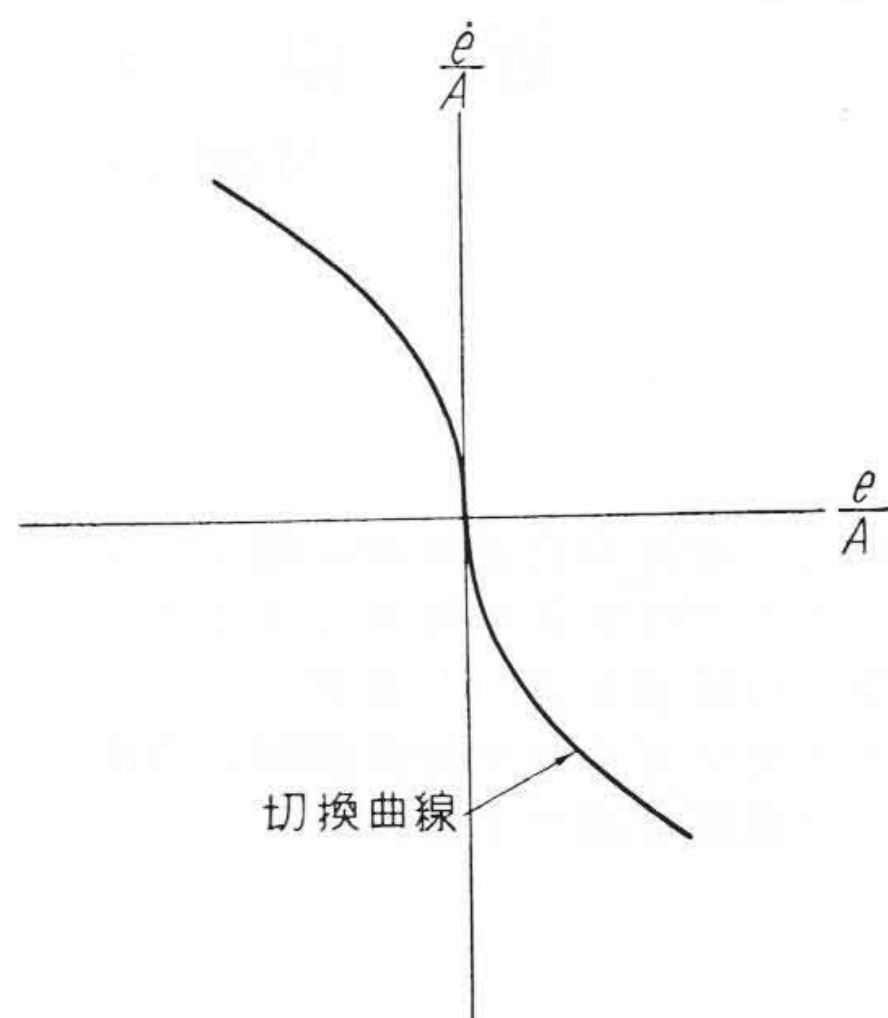


第3図 Aを変えたときの切換え曲線の変化

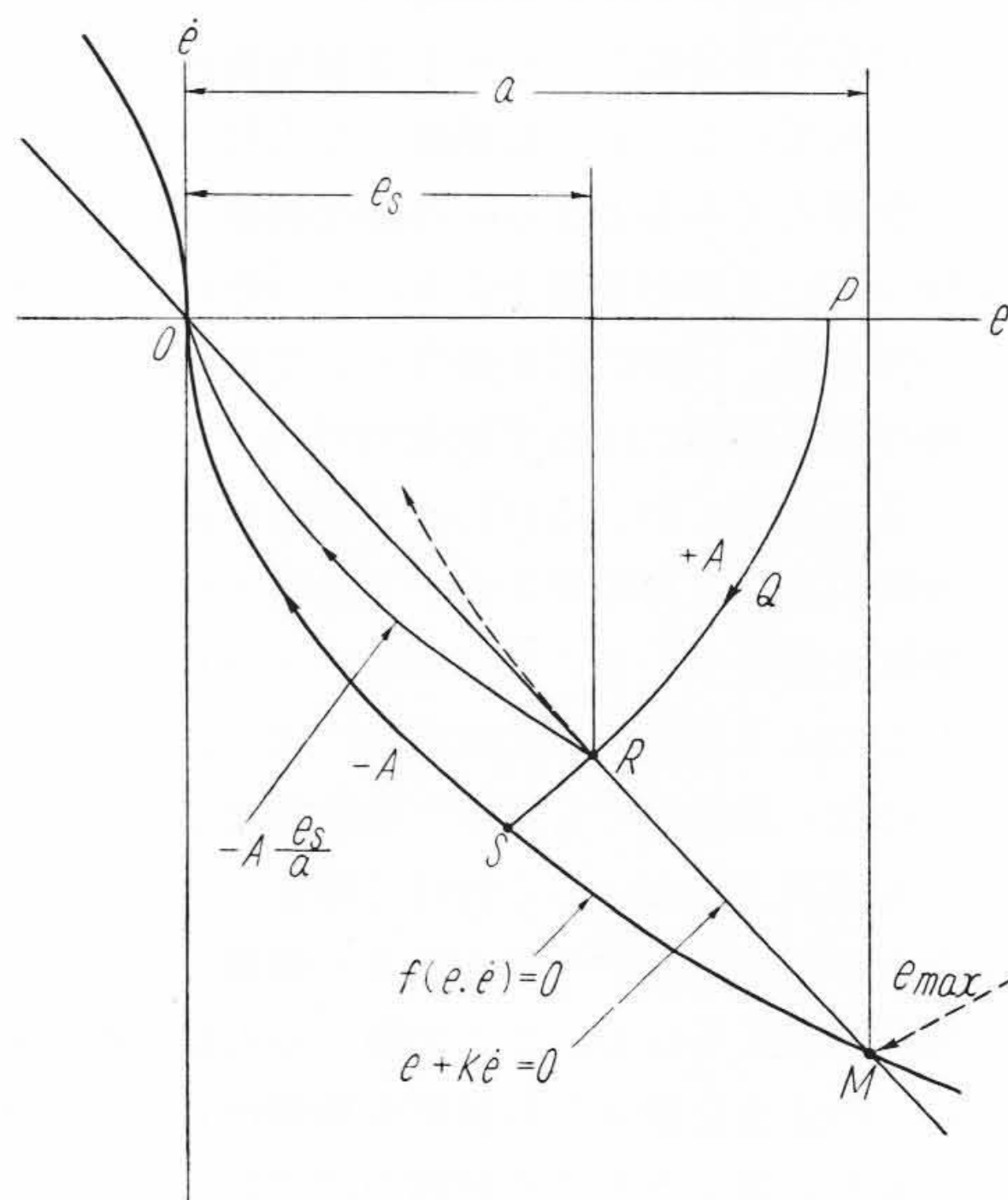
生器のような装置を必要とし、装置が複雑化することは避けられない。

一方オンオフ制御は装置の簡単のため広く用いられているが、行きすぎを少なくするとか安定化の手段として偏差の微分値も加味する安定化手段が用いられている。これは位相面では直線切換えにほかならない。この種制御については Flügge-Lotz 女史が詳しく論じ⁽²⁾、第2図のように応答が行きつまり終点現象を呈し、実際にはリレーのおくれそのほかにより切換え直線のまわりを振動しながら原点に収斂することを指摘している。

ここで述べる近似非線形最適制御とはこのような事実を念頭におきつつ装置の簡単化を図るものである。一方最適制御の切換え曲線は制御対象および最大操作量を知れば設計することができるが、最大値Aが変わると第3図のように変化する。すなわちAが大きいと平衡点に



第4図 標準化した切換え曲線



第5図 近似非線形最適制御動作

近づいてから操作量を切換えてもまに合い切換え曲線は縦軸に接近する。しかし第4図のように座標軸をAで除し標準化すればあらゆるAの場合を1本の切換え曲線で扱うことができる⁽³⁾。

装置を簡単化するため切換え曲線を直線

$$e + k\dot{e} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

に置き換える。いま第5図のPよりの応答を考える。まず+Aが与えられて応答はPQをたどる。非線形最適制御ではS点で操作量-Aが与えられて応答は原点にもどる。しかるにこの場合は応答が直線を切ったR点で操作量の符号を変えねばならない。いま-Aを与えるとすでに述べたように操作量が大きいの点線の向きに移行し終点現象を呈する。そこでR点で操作量を控えて与えてやれば応答をちょうど原点にもつていくことができる。しかるに標準化した座標軸を用いればすべてのAの場合

を1本の切換え曲線で表わせるので、 R 点で $-A$ でなく

$$-A \frac{e_s}{a} \dots\dots\dots (2)$$

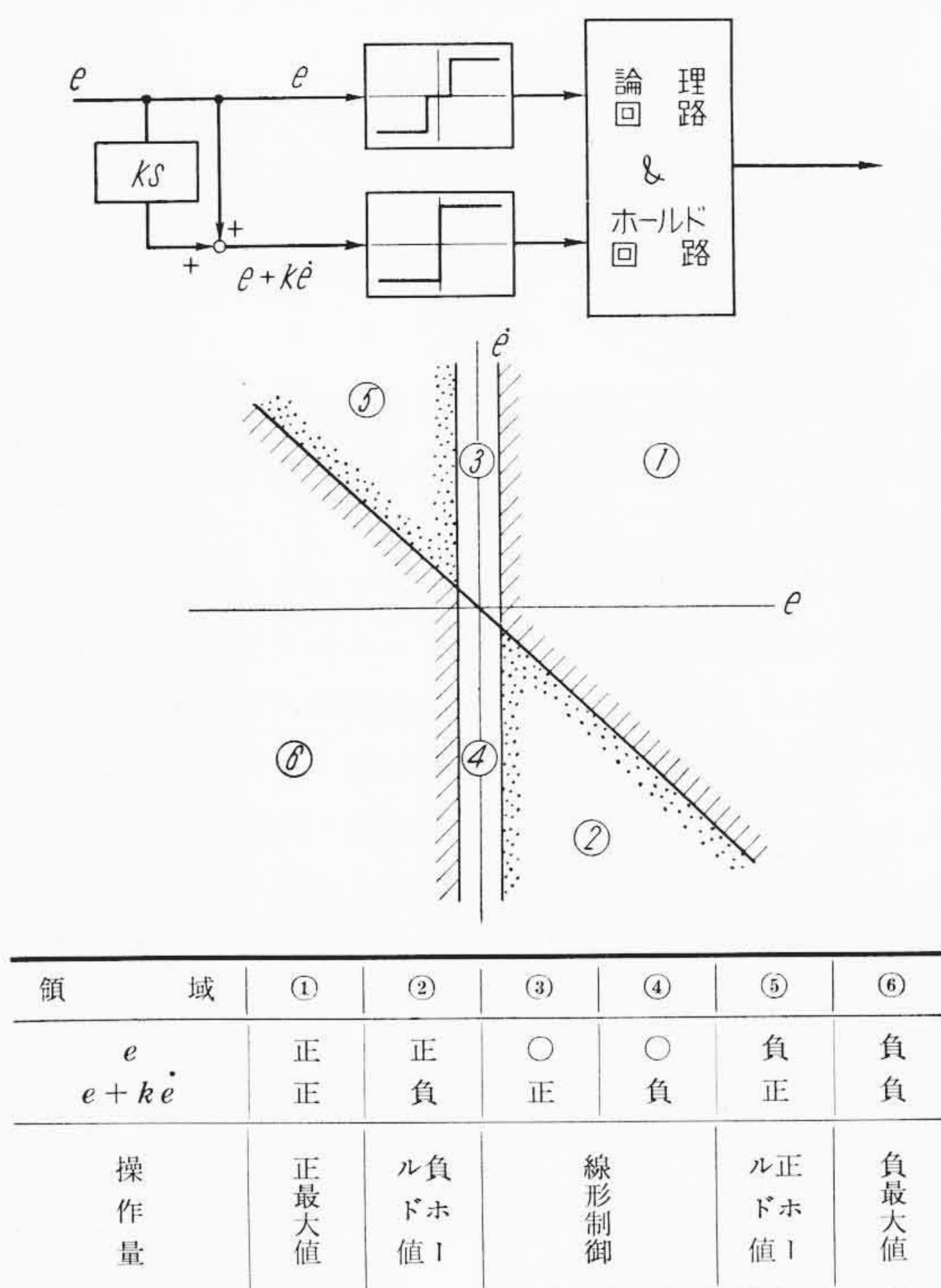
ただし a, e_s は第5図参照

を与えれば応答をちょうど原点にもつてくることができる。

すなわち応答が位相面の切換え直線を切つたとき、逆の操作量で大きさはその時の偏差(または偏差の微分値)に比例する量を与えればよい。この間の応答時間は位相面では対応する区間の応答曲線の微分値の逆数を積分したものであるので、両者を比較すると非線形最適制御の方が下部にあるので応答が早いことは否めない。しかし近似的に非線形最適制御に近いものを簡単な装置により具体化できる。このような制御方式を近似非線形最適制御 (Modified Optimum Nonlinear Control) と名付けることにする。

4. 近似非線形最適制御装置の構成

上記制御動作を実現するため第6図のような構成をとる。偏差を不感帯をもつ2位置要素により三つの領域に分け、 $e+k\dot{e}$ を2位置要素により二つの領域に分ける。これらの組み合わせにより位相面を六つの領域に分け、現在の偏差および微分値の組み合わせがどの領域にあるかを判定して対応する操作量を与えればよい。この場合



第6図 近似非線形最適制御装置

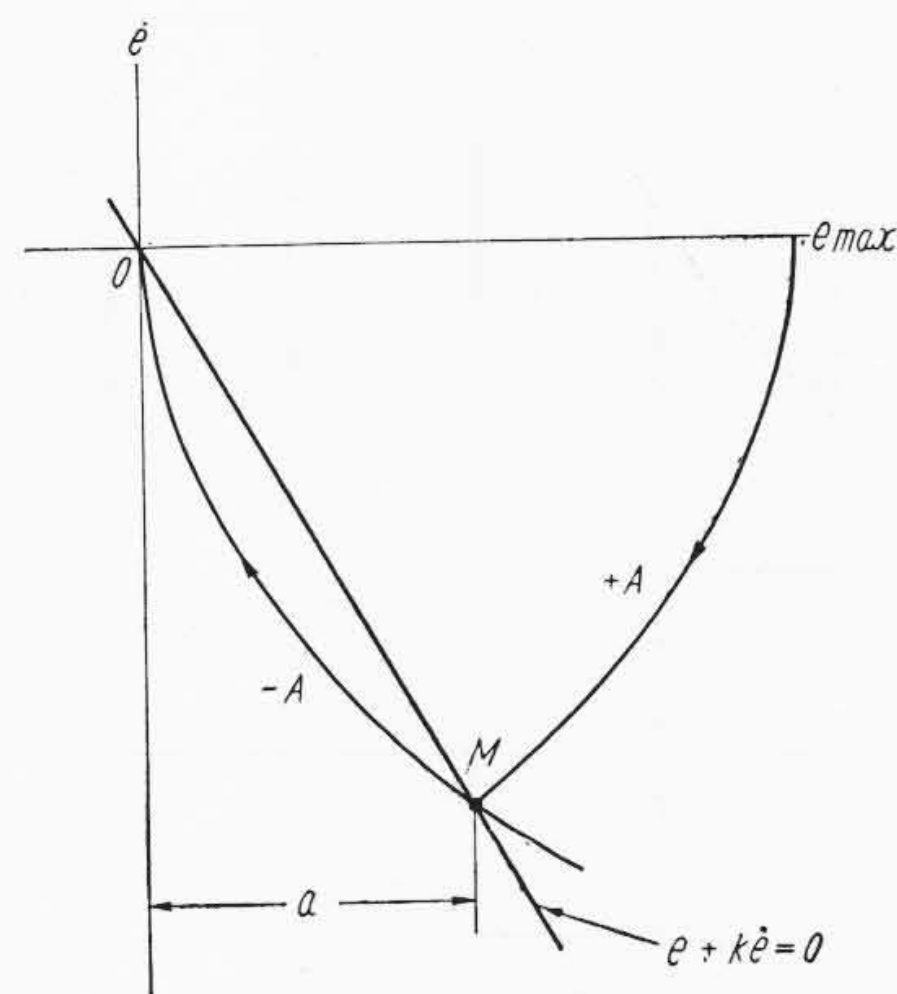
ホールド値とはすでに述べたように切換え直線を切つた時の偏差に比例して操作量を控えることを意味する。なお偏差の小さい間は最大値を与えず線形制御するのはリミットサイクルを避けるためであり、また線形領域より直接②⑤の領域に入つたときは控えないで最大値を与えるような装置を付加すれば制御動作はさらに完全なものとなる。

5. 近似非線形最適制御装置の調整

現在の PID 制御装置では制御対象により調整すべき量は比例ゲイン、積分時間および微分時間などであり、これらをいかに設定すべきかは最適調整論として多くの文献で扱われている。

非線形最適制御の場合には切換え曲線を制御対象に応じて変更せねばならず、制御装置としては折線関数発生器のように位相面上の任意の曲線を模擬する装置を含むことが必要となり装置が複雑となつてくる。

ここで述べる近似非線形最適制御装置の調整値としては、最大操作量 A 、切換え直線の勾配 k およびホールド回路の比例定数などである。最大操作量 A は一般に使用する操作部の種類、または操作量を急激に加える時の安全性の面から大体定められるものである。切換え直線の勾配 k およびホールド回路の比例定数は次の順に従つて調整する。まず予想される最大偏差 e_{max} よりの応答が最大操作量 $\pm A$ (ホールド値ではない) が与えられたときちょうど位相面の原点にもどるように切換え直線の勾配 k を調整する。これは非線形最適制御と同じ動作が得られていることになり、表現を変えると第7図で e_{max} よりの応答が切換え曲線と交わる点 M を通るように切換え直線を調整したことになる。次に同じ点よりの応答が最大操作量よりホールド値に切換わるが M 点の偏差の値 a で最大操作量 $-A$ が得られるようにホールド回路の比例定数を選定する。このようにすれば任意の入力 (e_{max}



第7図 制御装置の調整

より小さい) に対し切換え直線を切つたとき操作量が控えられ応答がちょうど原点にもどるわけである。

いま k の値を上で述べた最適値より小さくとれば $e_{\max}$ よりの応答は M 点を過ぎてから操作量の符号が変わり、一方操作量は最大値 A をこえることはできないからゆきすぎを生じてしまう。また k が大きすぎるとリレー制御における終点現象を起こし応答がおそくなることになる。しかし、制御対象の特性の変化そのほかを考慮合わせると、ゆきすぎを防ぐため k は最適値かむしろ少し大きめに選ぶべきであろう。

またこの制御装置としてはほかに二次的な調整すべき量として、線形制御を行わせる領域およびその間の制御動作などが考えられるが、実際に応じリミットサイクル、精度などの面より選定すべきであろう。

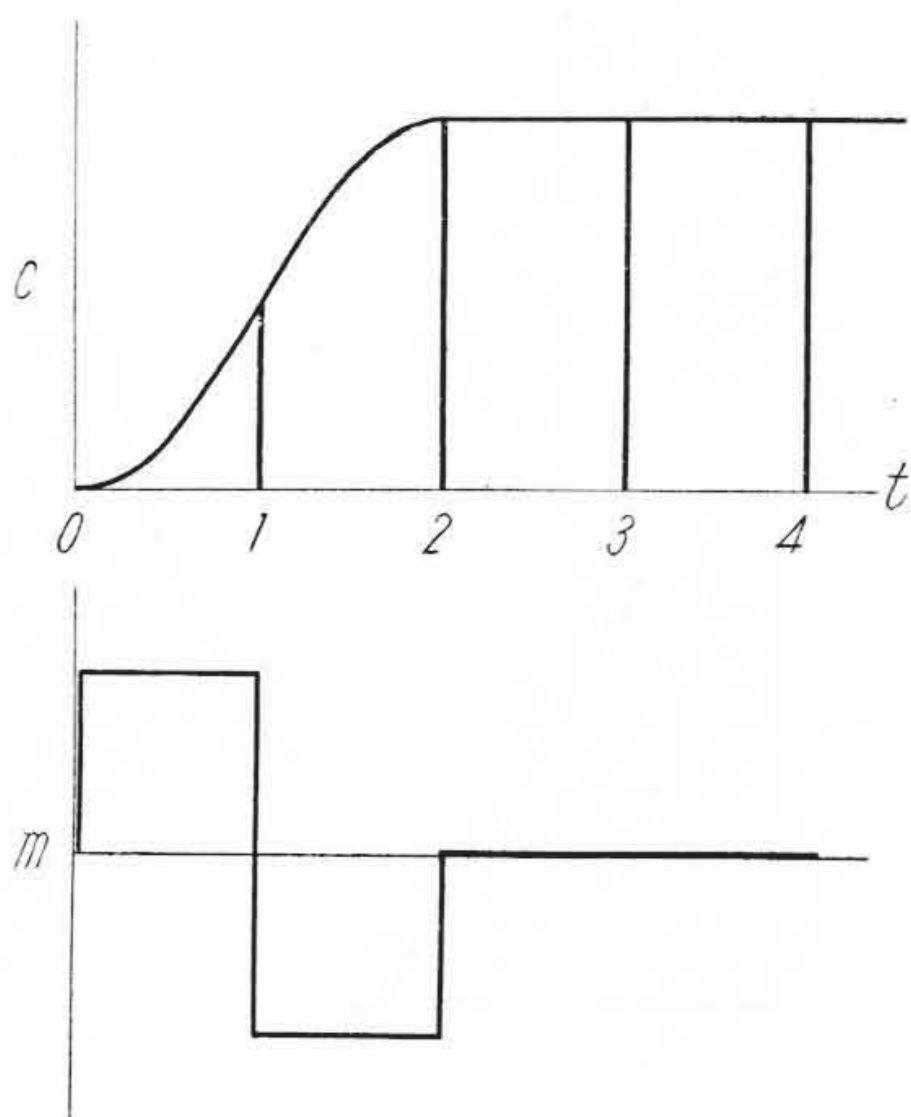
6. サンプルング計算制御動作との比較

サンプルング制御系において特別の補償回路 (Delay-Line-Synthesizer) を用いて有限整定時間応答を得ようとする手法がある⁽⁴⁾。これは時間に対しては非線形であるが空間的には線形であり、目標値が大きかつたりサンプルング周期が短い場合には実際には操作量が飽和してしまうことになる。

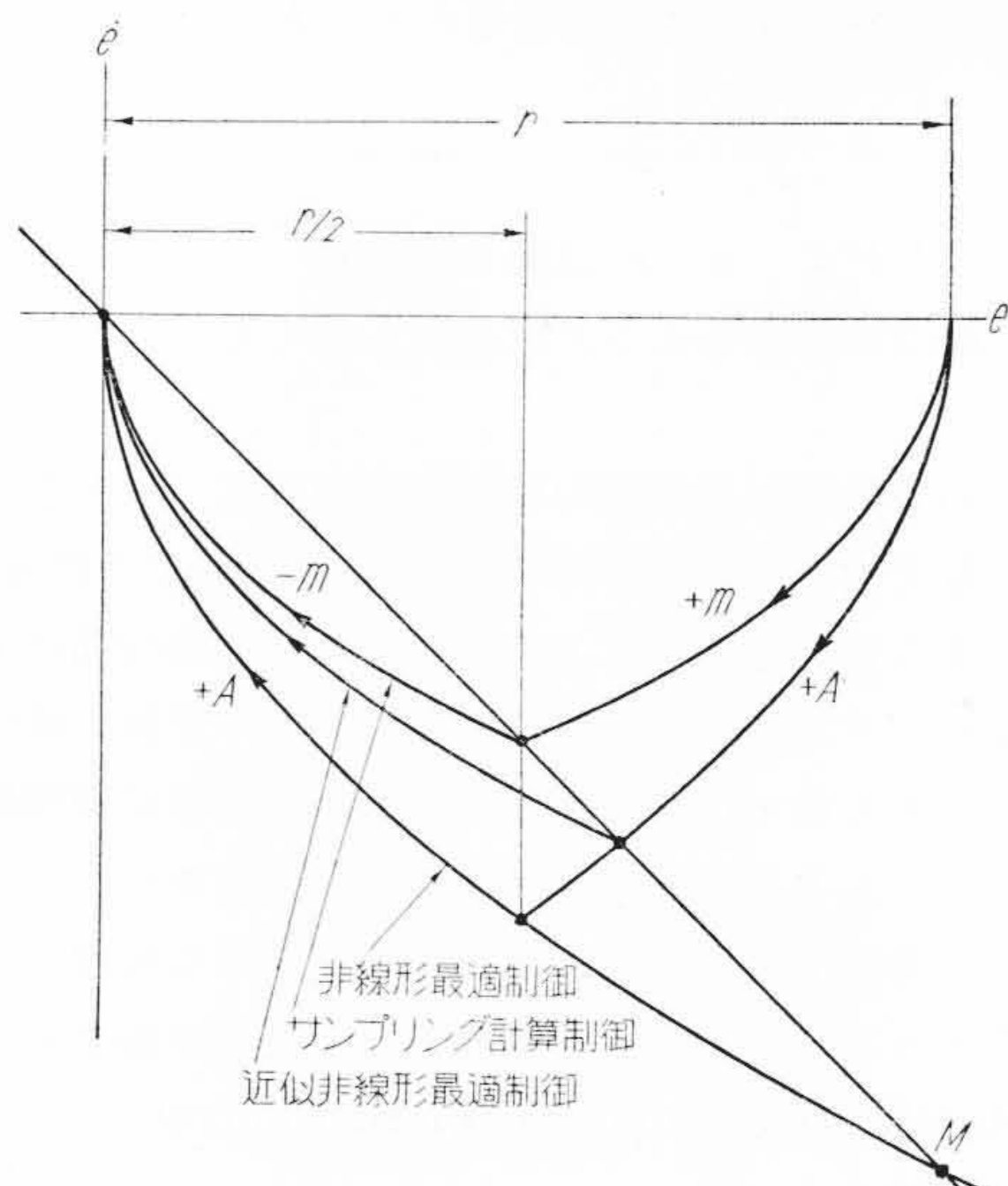
いま制御対象として二次の無定位系 $1/Ks^2$ を考える。二次系でありむだ時間がないので第 8 図のように 2 サンプルング周期間に応答を終らせることができる。いま操作量として大きさ m で 1 サンプルング区間のパルスを与えられたものとするとき制御量の出力数列は

$$c(n\Delta) = \frac{m}{2K} \Delta^2 \left[0 + 1 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 5 \cdot z^{-3} + 7 \cdot z^{-4} + \dots \right] \dots \dots \dots (3)$$

ゆえに第 8 図のように操作量が入つたものとする



第 8 図 有限 整 定 時 間 応 答



第 9 図 3 制 御 方 式 の 比 較

$$c(n\Delta) = \frac{\Delta^2}{2K} \left[\begin{array}{l} m_1 (0 + 1 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 5 \cdot z^{-3} \\ - m_2 (0 + 0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} \\ + 7 \cdot z^{-4} + \dots) \end{array} \right] \dots \dots \dots (4)$$

定常状態 ($n > 2$) で制御量が目標値を保つ条件より

$$m_1 = m_2 \dots \dots \dots (5)$$

を得る。いまステップ入力の大さを r とすれば

$$m = m_1 = m_2 = \frac{rK}{\Delta^2} \leq A$$

となり操作量が A をこえないように Δ を選定すべきである。操作量の符号を切換えるときの偏差の値は

$$e_s = r - c(\Delta) = \frac{\Delta^2}{2K} m = \frac{r}{2} \dots \dots \dots (6)$$

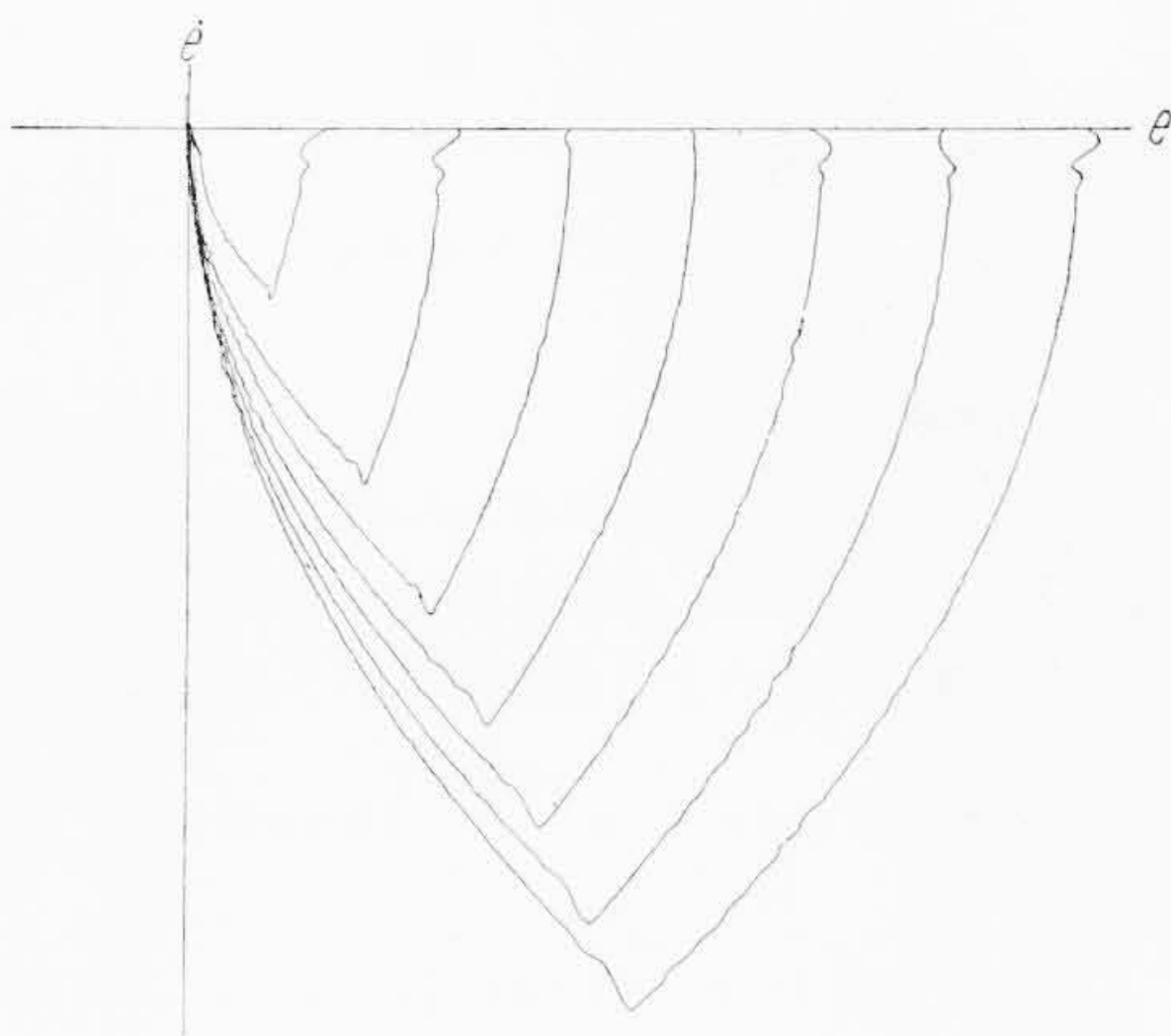
すなわち以上のことより、二次の無定位系の場合には偏差が半分になつたとき正負等しい操作量を切換える制御方式である。

要するに非線形最適制御とは $\pm A$ を与える制御方式であり、近似非線形最適制御とは $+A$ およびある計算した操作量 (A より小さい) を与える制御方式である。一方サンプリング計算制御は $\pm m$ なる等しい操作量を加えしかも $m \leq A$ なる条件より位相面では第 9 図のようになる。また操作量が飽和しない間は線形であるので位相面上で切換え曲線とも称すべきものは直線である。ゆえに整定時間で優劣を比較すると

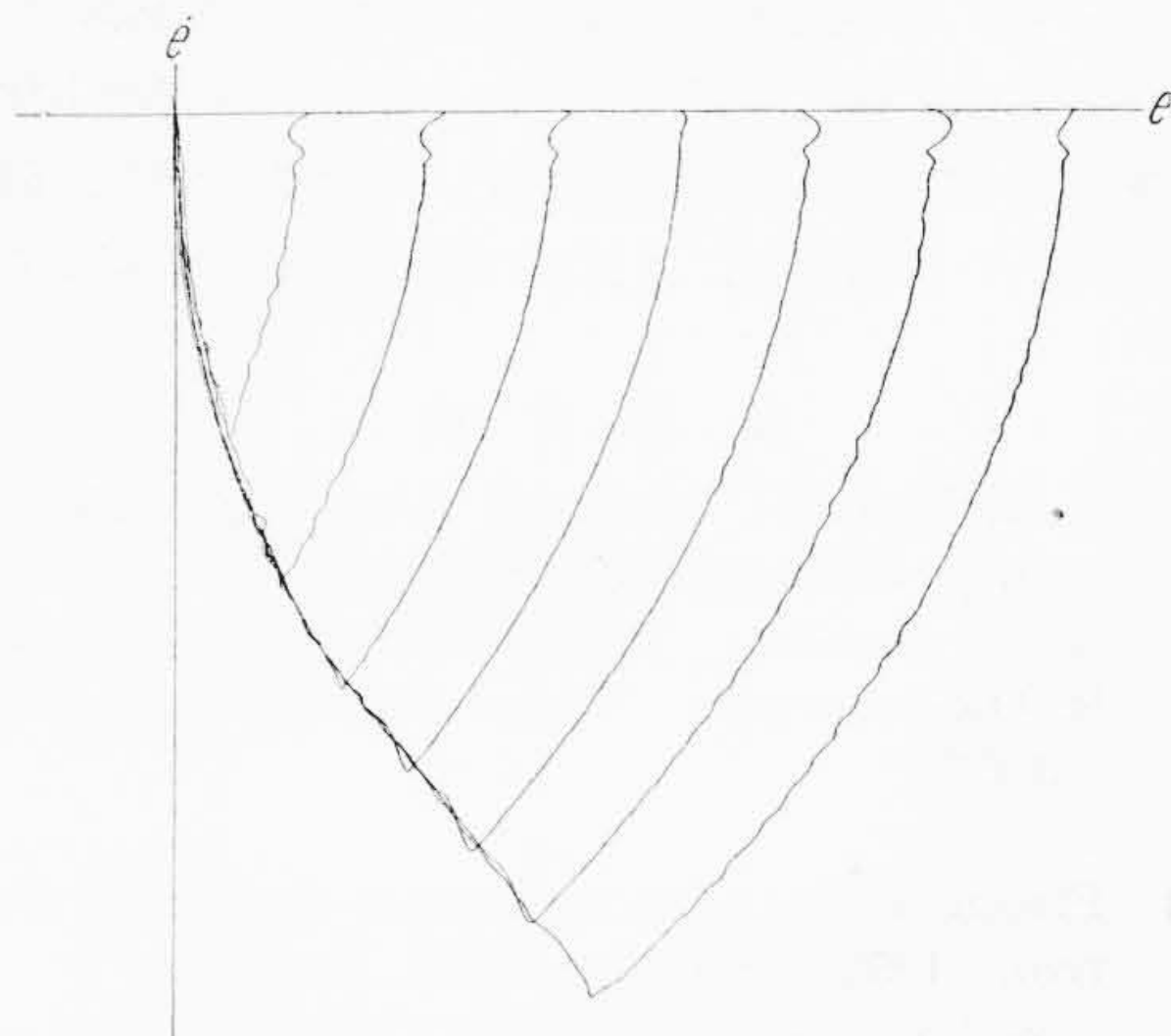
$$\begin{array}{l} \text{非線形最適制御} \geq \text{近似非線形最適制御} \\ \geq \text{サンプリング計算制御} \dots \dots \dots (7) \end{array}$$

ただし等号は M 点で操作量が切換わる最大入力が入つた場合

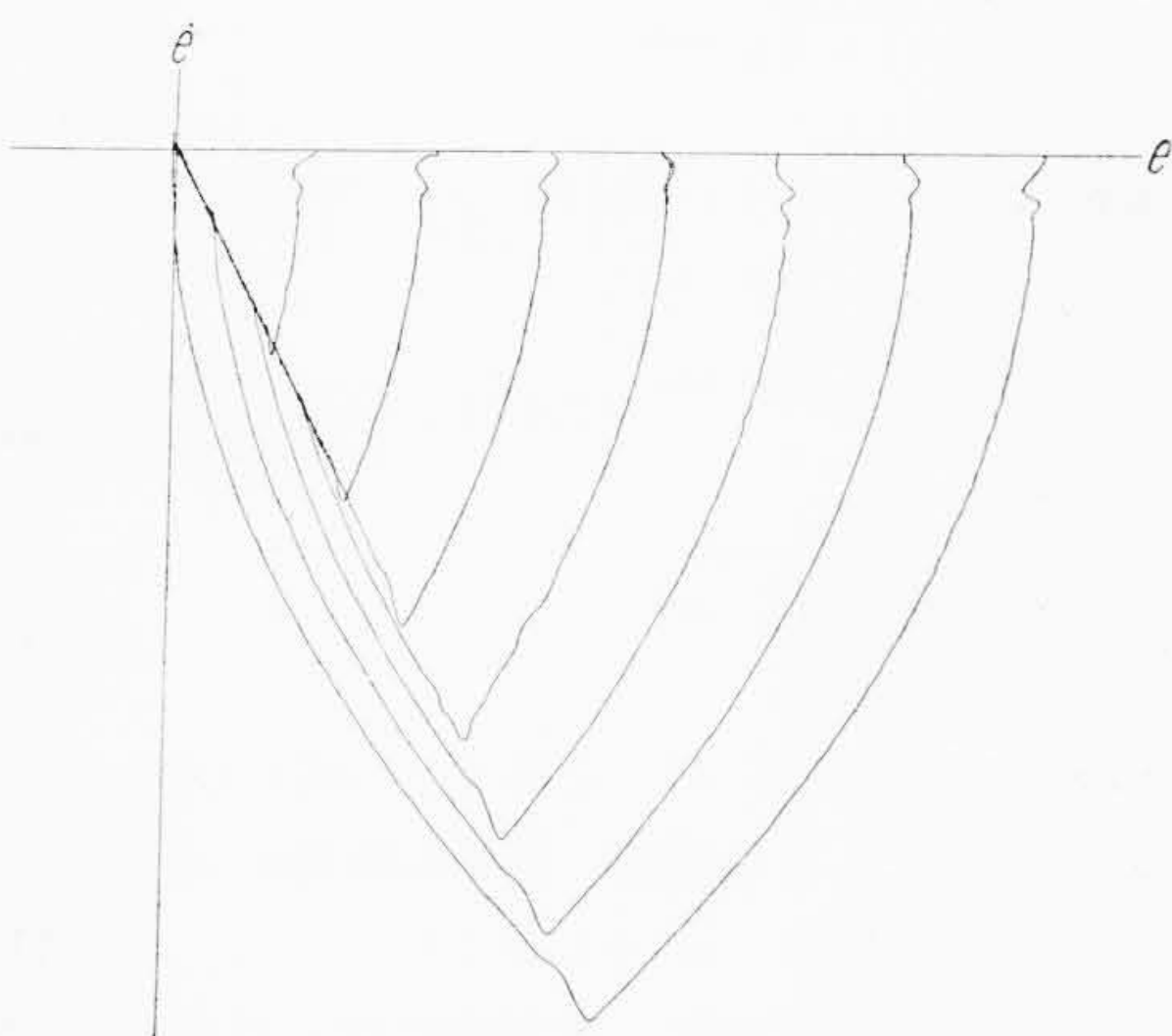
となる。



第 10 図 近似非線形最適制御の過渡応答



第 12 図 非線形最適制御の過渡応答



第 11 図 リレー制御の過渡応答

なおサンプリング区間を 2 にとつたが実際にはさらに細かくサンプリング区間をとることも可能であろう。飽和を考慮するのでこの場合は、いかなるプログラムで制御量を目標値に近づけるかが問題であり目下のところ実際にはほとんど取り扱われていない。しかしこの場合でも整定時間に関しては (7) 式はそのまま適用できるわけである。また以上のことは二次系全般にわたり成り立ち付録に示してある。

7. 実験的検証

以上の制御方式をアナログ計算機により検討を行つたものの一部を第 10～12 図に示す。詳細はいずれ発表する機会があると思われるのでここでは省略する。ここに示してある図はいずれも二次の無定位系を同じ条件で各種の非線形制御を行い 7 段階の入力ステップに対する応答の位相面記録である。第 10 図はここで述べた制御方

式であり応答が切換え直線を切つた後操作量が控えられ、すべての応答が原点にうまくもどつている。第 11 図はリレー制御の場合で操作量を控えていないので応答が切換え直線上におち、これに沿ひ復帰している。第 12 図は非線形最適制御で折線関数発生器で切換え曲線を模擬している。この 3 制御方式の整定時間の比較はここには示していないが、リレー制御のチャッターによる切換え直線に沿つて原点への復帰は予想以上に整定時間が長くかかるものである。なおこの実験には位相面 4 領域（線形動作領域を省いてある）を簡単のため用いたが、リミットサイクルを起こしたことは認められなかつたし、また周波数特性測定で実験した入力振幅、周波数範囲で不安定におちいつたこともなかつた。

8. 結 言

以上のように装置を簡単化することを主眼とし、切換え曲線を直線でおき換えそのための性能劣化を防ぐため偏差に比例して操作量を控えるという簡単な計算動作を付加することにより、ほぼ非線形最適動作に近い近似非線形最適制御を得ることができた。

またサンプリング制御系において特有の補償回路を用いる制御方式があるが、これの動作も位相面では切換えの情報直線であることを指摘し、また実際には飽和現象を考慮に入れなくてはならないこと、および整定時間よりの比較での優劣を示した。

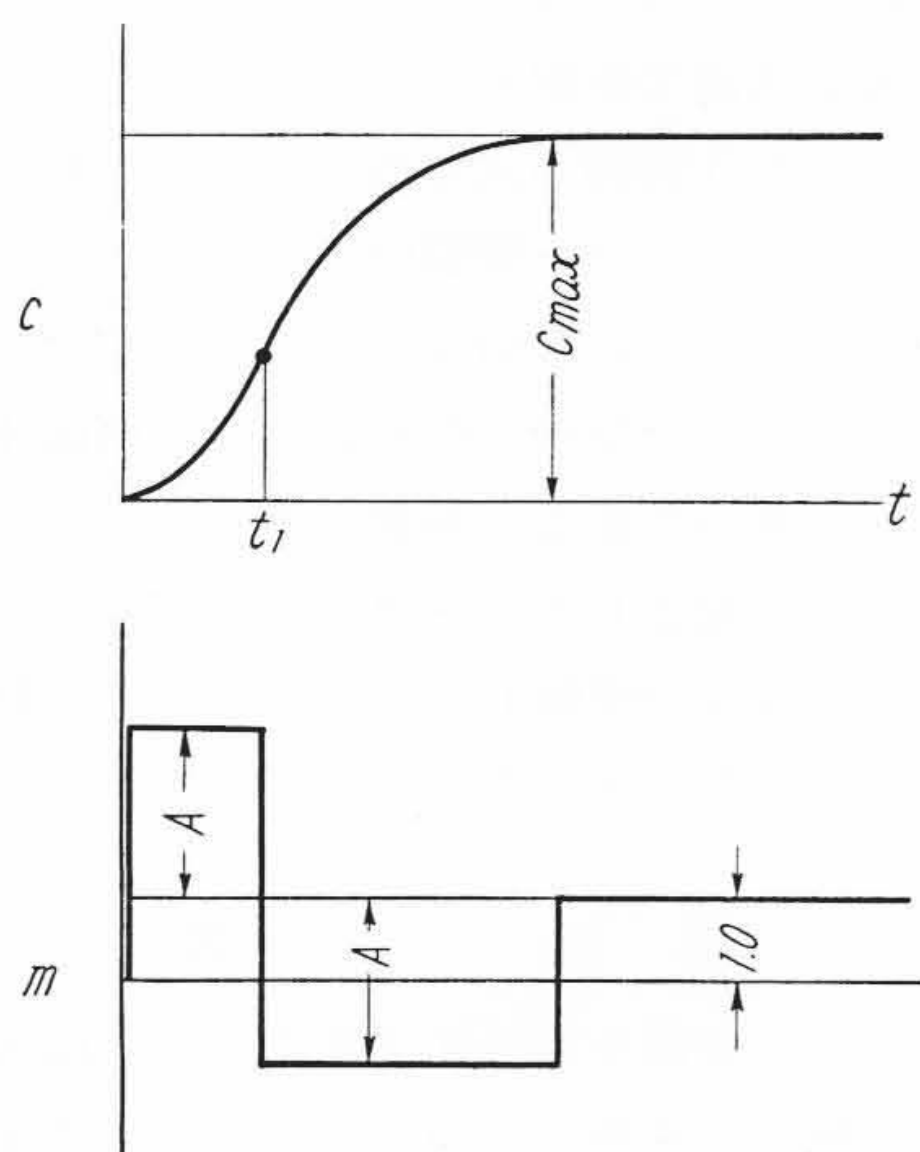
なおこの制御方式をアナログ計算機で検討を行い、以上の制御方式の正しいこと、またリレー制御の場合の終点現象よりの復帰は予想以上に整定時間が長くなるものであり、上に述べた操作量を控えることが実際にも非常に効果のあることの一端を示した。

終りにこの研究の機会を与えられた日立製作所中央研究所菊田所長、終始御懇切な御指導をいただいているカ

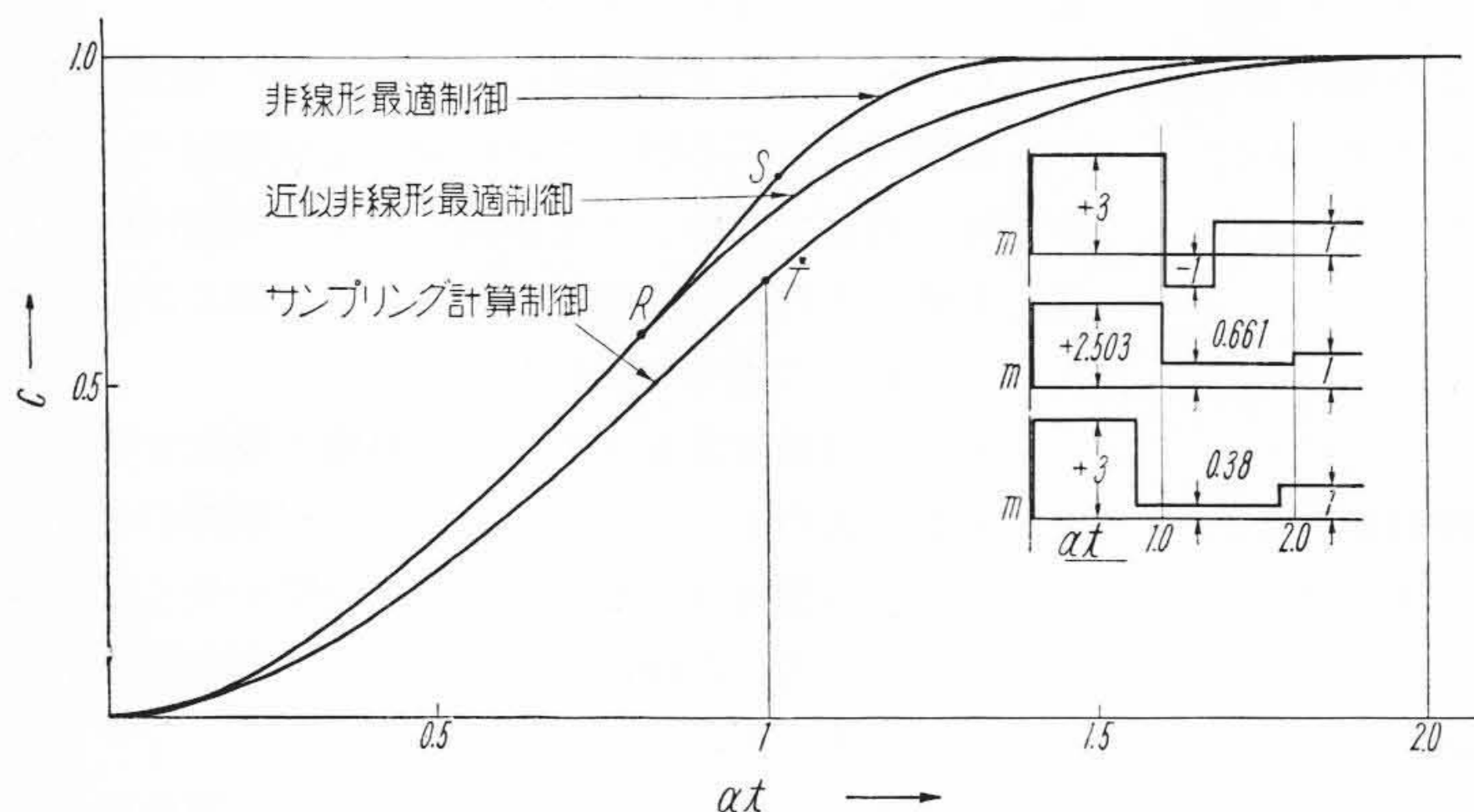
リフォルニア大学高橋安人教授、ならびに御指導いただいている明山部長、只野部長、および日立研究所小林主任研究員、また種々御討論いただいた鴨井研究員、御援助いただいた中西弘君、永田武三郎君に深く感謝する。

参考文献

- (1) D. McDonald: National Electronics Conference, Chicago, Ill., (Sep. 1950)
A. M. Hopkin: Trans AIEE., 70, 631 (1951)
R. Oldenburger: Trans ASME, 79, 527 (Apr. 1957)
ほか
- (2) Flüge-Lotz: Discontinuous Automatic Control, (1953, Princeton Univ. Press.)
- (3) 三巻達夫: 機械学会論文集, 24, (昭33-11)
- (4) A. R. Bergan & J. R. Ragazzini: Trans AIEE, 73, 236 (1954)
森政弘: 自動制御, 3, 25 (1956)
ほか



第13図 定位系の場合の操作量



第14図 二次の定位系の過渡応答

—— 付 録 ——

二次の定位性の場合の考察

制御対象として $\alpha^2/(s+\alpha)^2$ を考える。 $A=\pm 2$, $r=1$ に対する応答を比較する。

(i) 非線形最適制御

操作部を並列に用いそれぞれに最大および平衡操作量を受持たせれば同じ切換え曲線を常に用いることができる。第13図のような操作量が与えられるから

$$c(t) = (1+A) \left[1 - e^{-\alpha(t+t_1)} \{1 + \alpha(t+t_1)\} \right] - 2A \left[1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

時間原点は t_1

制御量が水平になつたときの時刻および c_{max} は

$$\alpha t = \frac{(1+A)\alpha t_1 e^{-\alpha t_1}}{2A - (1+A)e^{-\alpha t_1}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

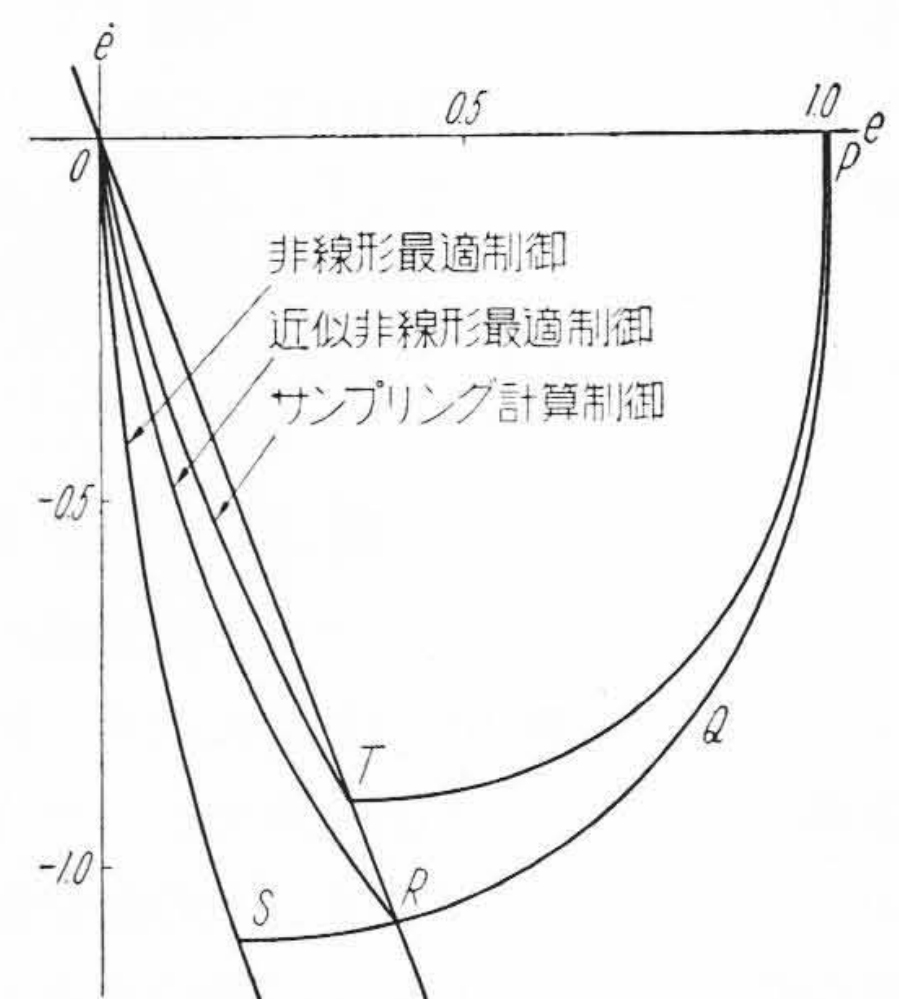
$$c_{max} = (1-A) + (1+A) \left\{ 1 + \frac{2A\alpha t_1}{2A - (1+A)e^{-\alpha t_1}} \right\} e^{-\frac{2A\alpha t_1}{2A - (1+A)e^{-\alpha t_1}}} + 2A \left\{ 1 + \frac{(1+A)\alpha t_1 e^{-\alpha t_1}}{2A - (1+A)e^{-\alpha t_1}} \right\} e^{-\frac{(1+A)\alpha t_1 e^{-\alpha t_1}}{2A - (1+A)e^{-\alpha t_1}}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$c_{max}=1$ のように αt_1 を解くと $\alpha t_1=1.02$, これを (9) 式に代入して目標値に達する時刻は $\alpha t=0.378$ ゆえに整定時間は $\alpha(t+t_1) \div 1.4 \quad \dots\dots\dots (11)$

この場合の応答は時間、位相面に対して第14, 15図に示してある。

(ii) サンプリング計算制御

二次系でむだ時間がないので第8図のような応答を考え、それぞれの操作量の大きさを m_1 , m_2 および m_3 とすると、出力数列は



第15図 二次の定位系の過渡応答

$$c(n\Delta) = \begin{pmatrix} m_1 [0, 1-d(1+\alpha), d\{(1+\alpha)-d(1+2\alpha)\}, d^2\{(1+2\alpha)-d(1+3\alpha)\}, d^3\{(1+3\alpha)-d(1+4\alpha)\}, \dots] \\ + m_2 [0, 0, 1-d(1+\alpha), d\{(1+\alpha)-d(1+2\alpha)\}, d^2\{(1+2\alpha)-d(1+3\alpha)\}, \dots] \\ + m_3 [0, 0, 0, 1-d(1+\alpha), 1-d^2(1+2\alpha), \dots] \end{pmatrix} \dots \quad (12)$$

ただし $d = e^{-\alpha\Delta}$

m_3 は定常的に与えられている。

いま $r=1$ なるゆえ $m_3=1$

$$c(2\Delta) = c(3\Delta) = \dots = c(n\Delta) = \dots = 1 \quad (13)$$

より

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{(1-d)^2} \\ m_2 &= \frac{1-2d}{(1-d)^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

一方操作量の切換えられる時の偏差の値は

$$e(\Delta) = r - c(\Delta) = \frac{d(d-1+\alpha)}{(1-d)^2} \quad (15)$$

(14)式の操作量が飽和しないという条件より

$$\alpha\Delta \geq 0.86 \quad (16)$$

時定数が与えられると Δ をある程度大きくして飽和が起らないようにする。いま $\alpha\Delta=1$ に選ぶと操作量は

$$m_1=2.503 \quad m_2=0.661 \quad m_3=1.0 \quad (17)$$

となり、整定時間は

$$2\alpha\Delta = 2.0 \quad (18)$$

切換え直線は OT である。

(iii) 近似非線形最適制御

切換え直線は OT に選んだ。第15図の $R(\alpha t_1=0.82)$ で操作量が切換わる。ここよりどれだけの操作量を与えたらよいかを決定する。(8)式と同様に

$$c(t) = 3 \left[1 - 0.44(1.82 + \alpha t)e^{-\alpha t} \right] - 2(1+x) \left[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t} \right] \quad (19)$$

ただし、 x は最大値の何割を与えるかを示す量である。

(19) 式の微分値がゼロになったときの時刻および $c_{\max}$ は

$$\alpha t = \frac{1.082}{2x + 0.68} \quad (20)$$

$$c_{\max} = (1-2x) + (2x+0.68)e^{-\frac{1.082}{2x+0.68}} \quad (21)$$

(21)式を1とおき x を解くと

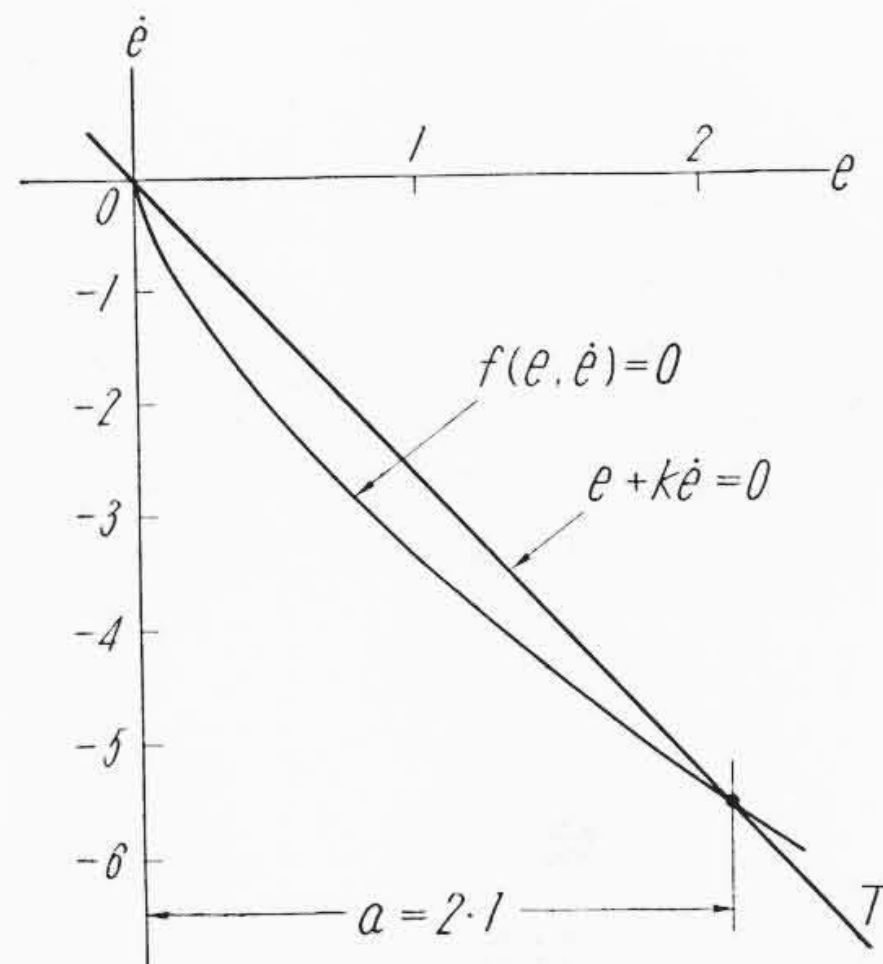
$$x = 0.19 \quad (22)$$

(20) (22) 式と $\alpha t_1=0.82$ より

$$\text{整定時間は } \alpha(t+t_1)=1.88 \quad (23)$$

この応答は第14, 15図にあわせて示してある。

一方切換え曲線と切換え直線との交点は第16図に示してある。 R における偏差の値 $e_s=0.4$ であるので、操作量を控える割合は(2)式より



第16図 切換え曲線と直線の交点

$$\frac{e_s}{a} = \frac{0.4}{2.1} \doteq 0.19 \quad (24)$$

となり厳密に計算した(22)式とまったく一致する。

以上のように一般の二次系についても定位性では定常的な操作量を最終段階で加えることを考慮すれば、本文で述べたことはすべて適用できる。

日立造船技報

Vol. 19

No. 2

目次

- ◎突合せ溶接における溶接中の変形ひずみの動的測定実験
- ◎小中型船用ディーゼル機関の得失について
- ◎熱膨脹継手の疲労強度について
- ◎板用ドリルにおける刃先の検討
- ◎防音壁構造について
- ◎微弱磁場測定装置とその応用
- ◎小型船舶に対する風圧による傾斜モーメントの研究

本誌につきましての御照会は下記発行所へ
御願いたします。

日立造船株式会社技術研究所

大阪市此花区桜島北之町60