

動力伝達用平歯車の動荷重に関する研究*

Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears for Power Transmission

歌 川 正 博**
Masahiro Utagawa

内 容 梗 概

動力循環式の動的歯車試験機を試作し、抵抗線ヒズミ計を用いて運転中の歯元ヒズミを測定し、静的負荷における歯元ヒズミとの比較によって平歯車の動荷重を算定する実験を行っており、いろいろな誤差をもつ平歯車について周速 30 m/s までの実験を行い、動荷重を定性的定量的に示している。

一方、かみあっている歯車の力学的解析を行い、動的状態を表わす運動方程式をたて、動荷重を計算する方法を導いている。

そして測定結果と計算結果とを比較対照し、それらがほぼ一致することを示し、以上の解析により動荷重の計算ができることを明らかにしている。さらに設計上、工作上の問題について動荷重軽減の立場から検討を行っている。

1. 緒 言

歯車の動荷重というのは、動力伝達用歯車の負荷運転中に、歯にかかる動的な荷重のことである。歯車の動荷重あるいは運転状態に関する研究は、わが国においても^{(1)~(12)} 諸外国においても^{(13)~(21)} 古くから行われているが、歯車の設計者製作者の立場においては、動荷重の問題が完全に解決されたとはいえないように思われる。

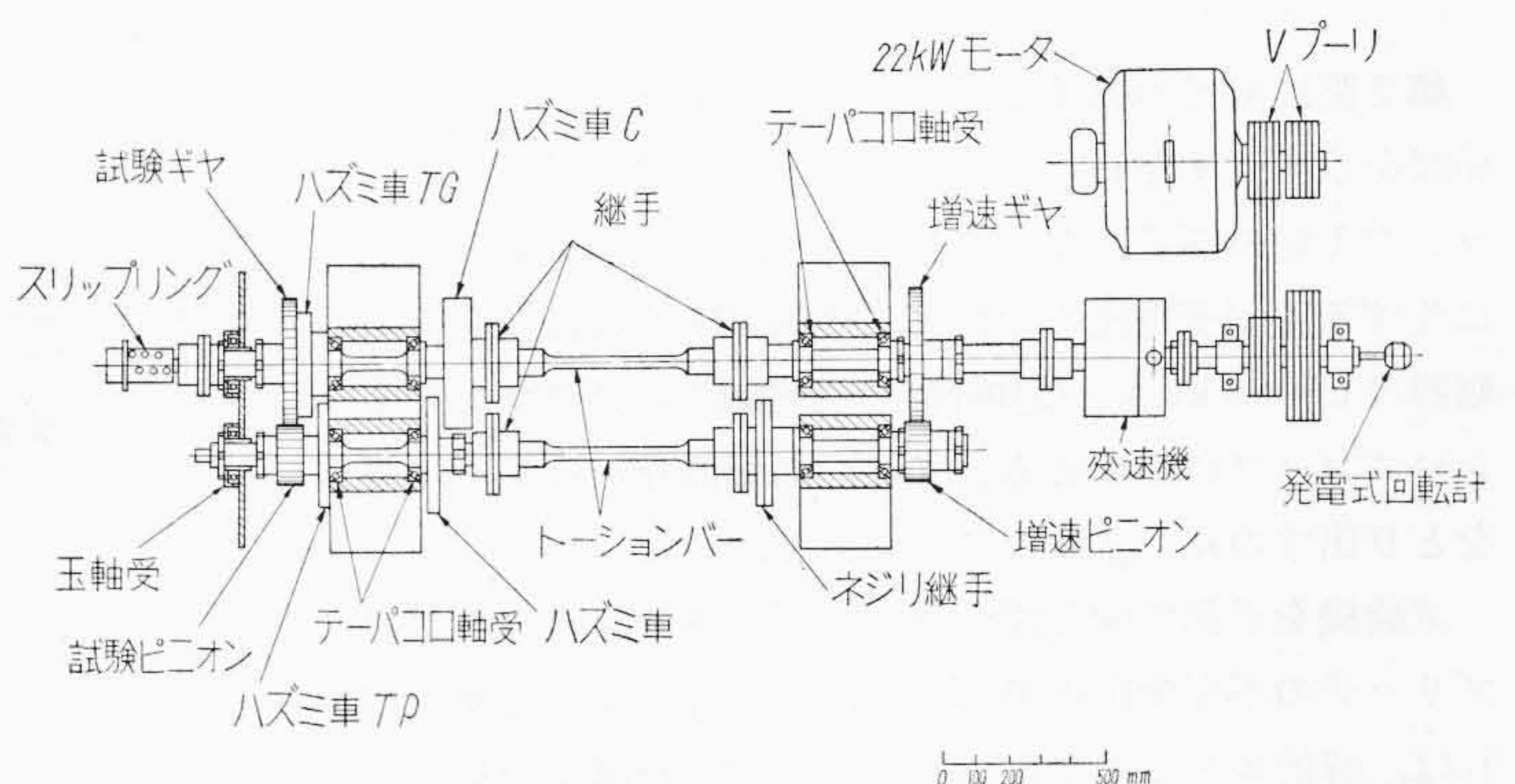
本研究では、^{(22)~(26)} 動力伝達用インボリュート外歯平歯車を対象とし、その目的は歯車の各種設計要素や工作誤差に対して、動荷重がいかに変るかを明らかにし、設計および工作の資料をうることである。

その要点は第一に平歯車の動荷重を測定する一つの方法を開拓し、各種の工作誤差を有する平歯車について動荷重を測定する実験を行った。第二にかみあっている歯車の力学的解析を行って動荷重を計算する方法を導き、計算結果と実験結果との比較、対照を行い、それらがほぼ一致することを示す。

2. 測定装置と測定方法

動荷重を測定するためには、動荷重に直接関係する機械的量を歯において測るのがよいと考え、動的歯車試験機を試作し、ギヤの歯元背面にヒズミゲージを貼って運転中の歯元弾性ヒズミを測り、静的負荷におけるヒズミとの比較により動荷重を算定する方法をとった。

試作した試験機の平面図を第1図に示し、おもな仕様を第1表に示す。本試験機はいわゆる動力循環式で、ネ



動力循環式で二対の歯車を使用され、左方の一対が試験歯車である。

第1図 動的歯車試験機平面図略図

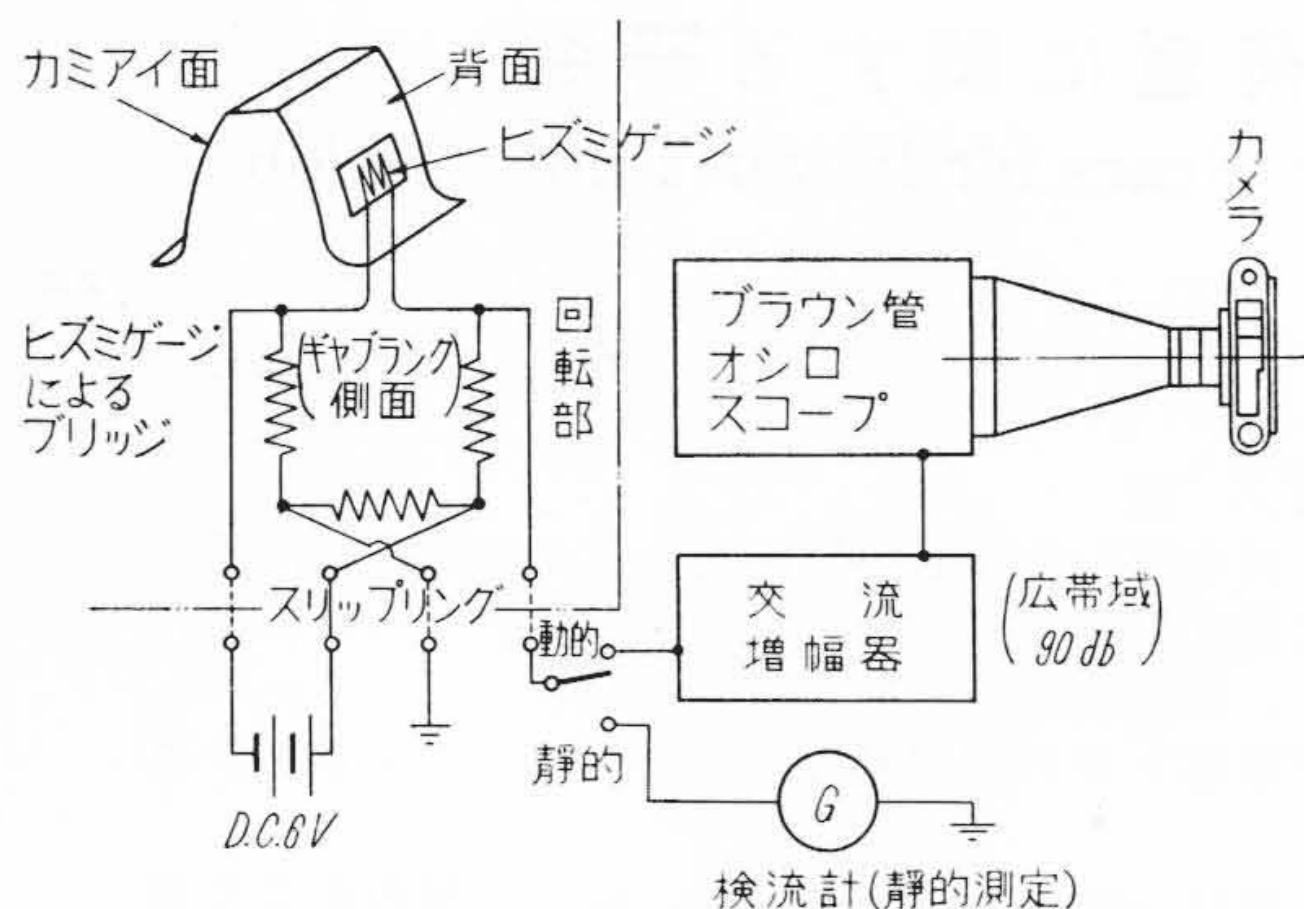
第1表 動的歯車試験機の仕様

原 理	動力循環式
原 動 機	22kW(30HP)巻線形誘導電動機
変 速 方 法	Vプーリ2段, 変速機4段
試 験 歯 車 外 径	560 mmφ まで
内 径	80 mmH ₂
歯 幅	100 mm まで
歯 車 中 心 距 離	250~500 mm
ギヤ軸回転数	1,500 rpm まで
ギヤ軸トルク	150 m·kg まで
循 環 動 力	220 kW(300HP) まで
大 き さ	本体約 2m×2m 高さ約 1m

ジリ継手をねじることによって歯車軸にトルクを加えてから、起動、回転させる。第1図の左側が試験歯車で、これを減速カムアイとした。歯車軸に加えるトルクの大きさは、トーションバーにヒズミゲージを貼って測っている。このトーションバーおよびハズミ車により一種の低域フィルタを形成し、増速歯車、試験歯車それぞれのカムアイのむらを、互にほかへ伝達されないようにしてある。また、トーションバーは、トルクをかけたときのネジリ角を大きくし、歯車の誤差や歯のタワミなどによるトルク変動を、相対的に小さくさせている。

* 学位論文抄録

** 日立製作所中央研究所 工博



ブリッジには直流電圧を加えて、ブリッジの不平衡電圧の変化を交流増幅して、ブラウン管オシロスコープで観測する。静的測定には検流計を用いる。

第2図 測定方式ブロック線図

第2図に歯元の弾性ヒズミを測定する方法のブロック線図を示す。すなわち、通常のブリッジ法を用い、ブリッジの1対の端子に直流6Vを加え、ほかの1対の端子に生ずる不平衡電圧の変化を、約90dBの広帯域交流増幅器(1c/s~8kc/s一定増幅率)で増幅し、ブラウン管オシロスコープにかかせる。また、回転部分からリード線を取り出すのに、スリッパングを用いた。

試験機を手動で少しずつ静かに回転させ、そのときのブリッジの不平衡電圧の変化を、検流計によって測定すれば、静的ヒズミの変化がわかり、動荷重測定の基準とすることができる。

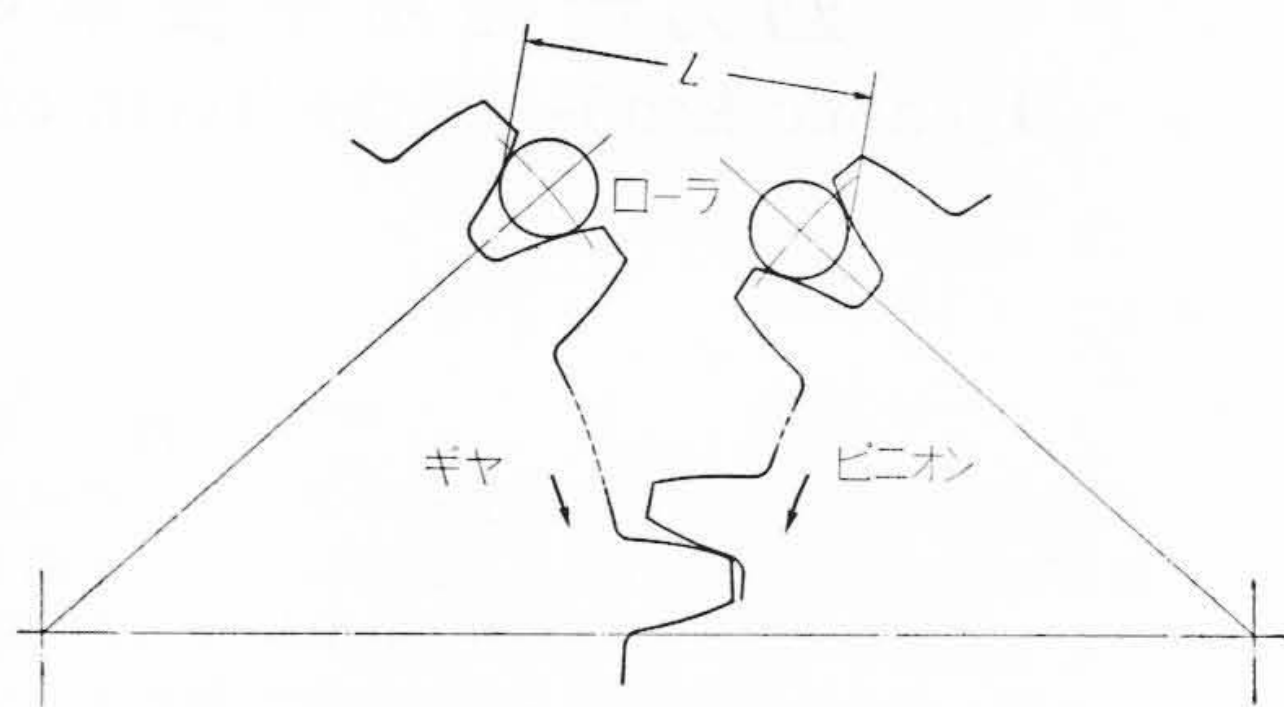
なお、静的測定の際に第3図に示すように、ピニオンギヤの歯ミゾに、それぞれローラをすきまなく押しつけると、そのローラ外側距離は歯車のカミアイの幾何学的関係から計算できるので、ローラ外側距離を測ることによって、幾何学的*に正しい歯車の理論的なカミアイ始点終点などを知ることができる。

それから、第4図に示すような光電管装置を作り、光電管に入る光束をしゃ光突起で切るようにし、一方そのしゃ光突起は歯車軸にとりつけた円板とともに回るようにしておけば、歯車の回転角度位相が同じ位置で光電流の変化を生ずるから、その光電流変化による信号を観測することによって、静的に測った歯元ヒズミの変化といろいろな周速で測った歯元ヒズミの変化を表わす波形との横軸(横軸は時間軸であるとともに、ギヤの回転角度の進行を表わす)を比較するときの基準にすることができる。

3. 使用歯車の諸元とその誤差の表示、実験条件

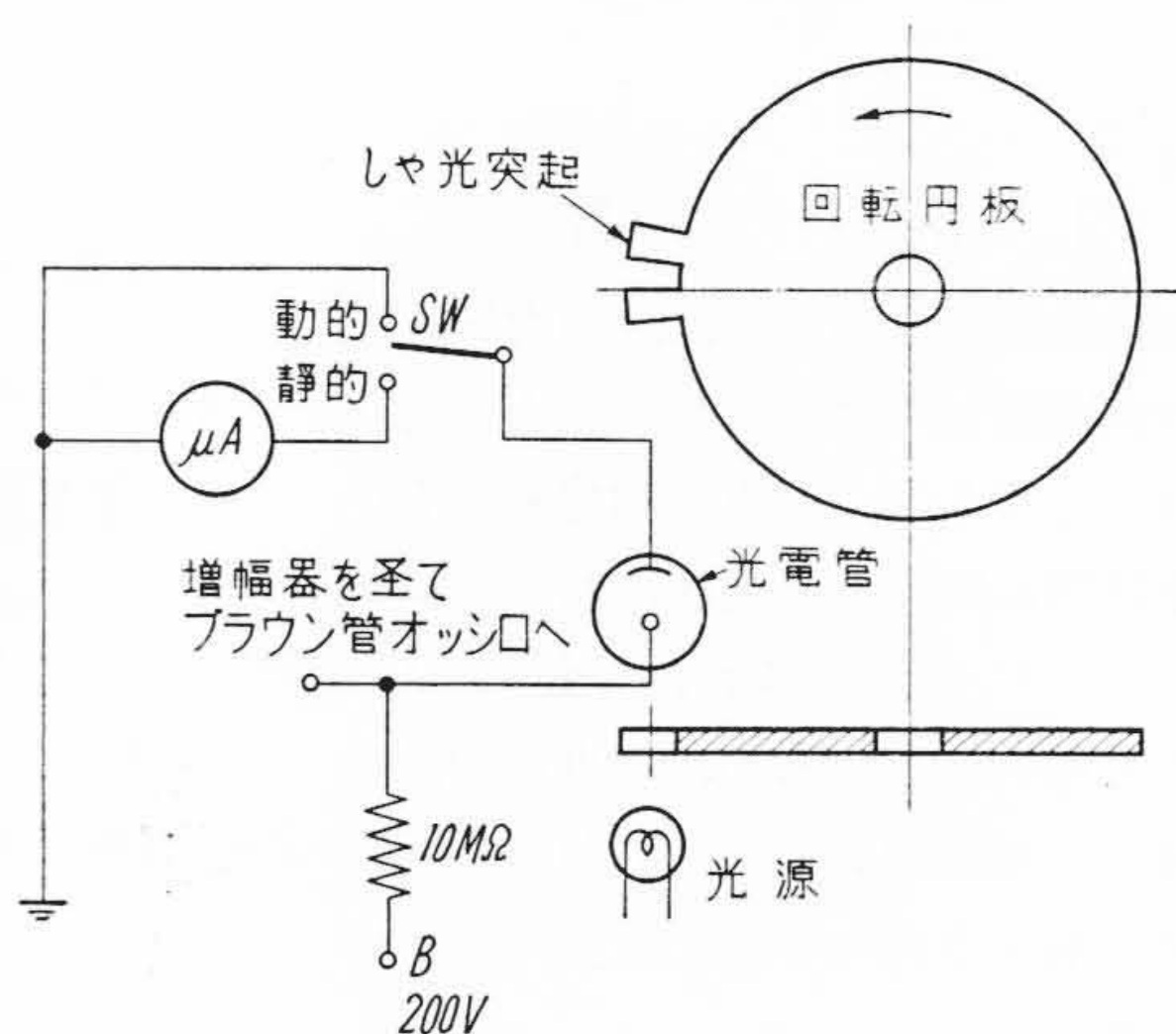
この実験に使用した歯車のおもな仕様は第2表のとおり

* 幾何学的というのは、歯車に誤差がなく剛体と仮定したときの意味に用いる。



ローラ外側距離Lはカミアイの幾何学的条件から計算で求められるので、Lを測定することによってカミアイ始点、終点を決めることができる。

第3図 ローラ法によるカミアイ位置の決定



歯車軸とともにまわる回転円板のしゃ光突起によって、光電管へ入る光がしゃ断され、光電流変化を生ずる。ブラウン管上では矩形波が観測される。

第4図 光電管装置

第2表 使用歯車

	ピニオン	ギヤ
モジュール, 歯数	8M24Z	8M48Z
歯幅 (mm)	45; 25	40; 20
材質	S45C	S40C
製作法	ホブ切→表面焼入→マージ研削	

第3表 実験条件

トルク(ギヤ軸)	40~140 (mkg)
荷重(歯面法線力)	200~700 (kg)
カミアイ率(計算値)	1.24~1.67
ピッチ円周速度	3.3~29 (m/s)
潤滑法	タービン油 #180 吹付け

りである。歯車の工作誤差として特に誤差を人為的に与えた歯車を作り、実験した。すなわち、①正しいインボリュートにできるだけ近いもの ②歯先の修整を行ったもの ③ピッチ誤差を与えたもの ④圧力角誤差を与えたもの ⑤中凹の歯形誤差のはなはだしいもの などを用いた。歯車の誤差を表わすのに、正しいインボリュート

トからのずれを考え、歯形修整も広義の誤差とみなし、凹にずれている量を正の誤差とした。そして、この誤差量は時間の関数であり、カムアイ点の移り変りによって変る量である。なお、次章以下で解析するように、ピニオンとギヤがかみあっているときの誤差は、そのカムアイの対応点における誤差を合成したものである。

実験の条件は第3表のとおりである。

4. 静的負荷におけるカムアイの解析と 静的歯元応力の測定

この章ではかみあっている歯車が負荷を受けて静かに回転する場合の諸現象について解析し、歯車を剛体と考え誤差もないものとして扱う歯車の幾何学的現象との相異を明らかにする。

4.1 カムアイ点の移動または時間的経過の表現

以下の解析において、カムアイの進行すなわち時間的経過を表わすのに、ある一对の歯に注目したとき、そのギヤの歯先点が幾何学的にカムアイに入るべき時を時間の原点とし、幾何学的二対カムアイ範囲を a 秒、同じく一对カムアイ範囲を b 秒とし、カムアイ率 η を1以上2未満とすれば、

$$\eta = \frac{2a+b}{a+b} \dots\dots\dots (4-1)$$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{t}{a} \dots\dots\dots (4-2)$$

なる関係によって時間目盛 θ を定義づける。前章で述べた歯車の誤差や、以下述べる歯のバネコワサなどはすべて θ の関数として表わすことができる。また2.で述べたように光電管信号を基準とした回転角度と θ との関係は、ローラ法によって決めることができる。

4.2 歯元の応力、歯のタワミ

歯を断面変化する片持ハリと考え、一对の歯で全荷重を受持つとし、歯面法線方向荷重を一定とみなせば、ヒズミゲージ貼付箇所における応力を計算することができる⁽²²⁾⁽²³⁾。その一例を第5図に示す。

また歯のタワミは石川博士の式⁽²⁷⁾によって計算でき、ピニオンとギヤそれぞれのタワミを合成してその逆数をとれば、歯のコワサを計算することができる(第13図参照)。

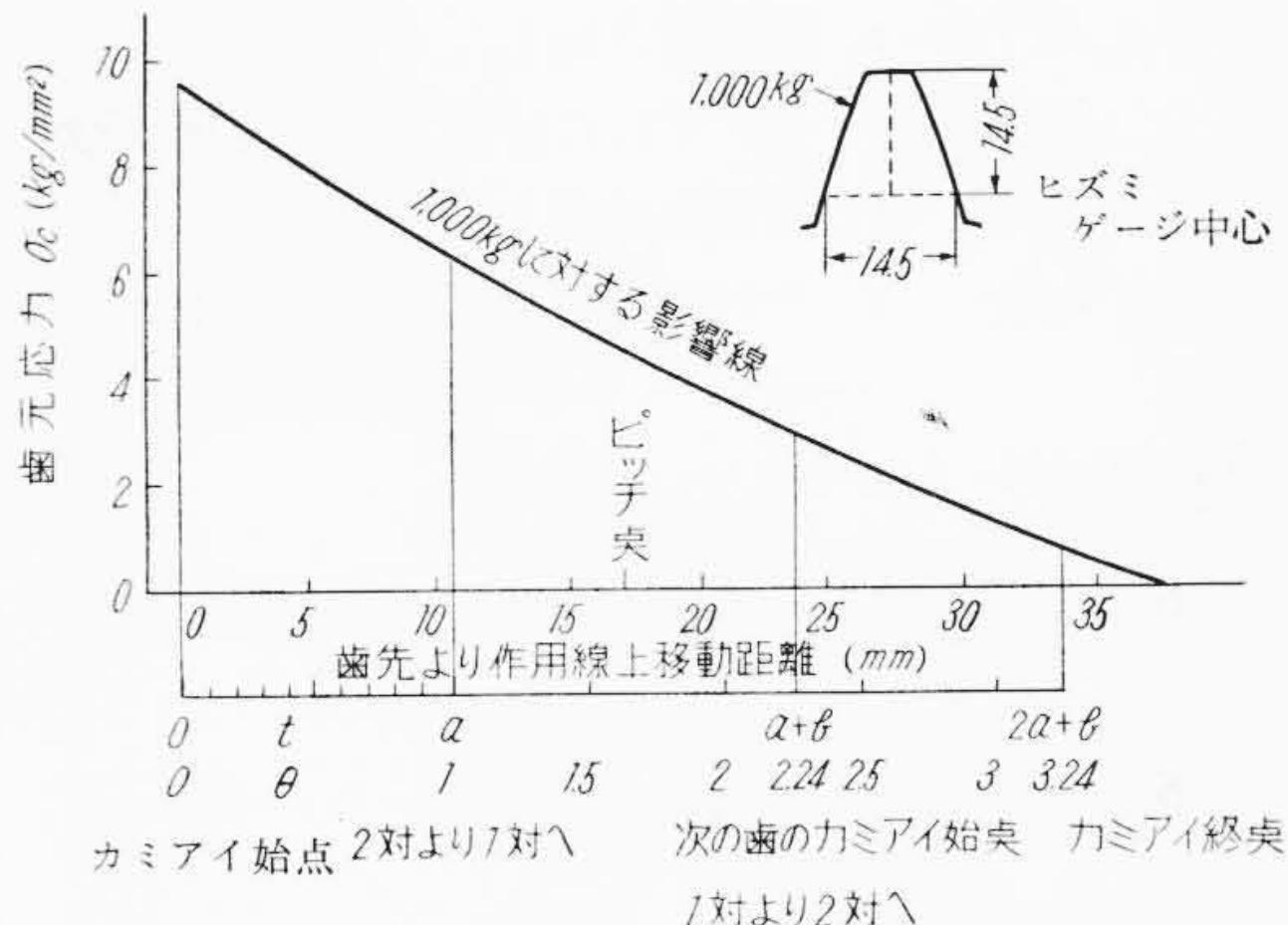
4.3 荷重分担率と被動歯車のおくれ

第6図のようにかみあっている二対の歯を考え、それぞれ①②③④と記号をつける。これら二対の歯が荷重を受けてたわんだとき、その作用線上のタワミをそれぞれ $\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta g_1, \Delta g_2$ で表わすと、第6図から

$$p_0 + \Delta p_1 - \Delta p_2 = p_0 - \Delta g_1 + \Delta g_2 \dots\dots\dots (4-3)$$

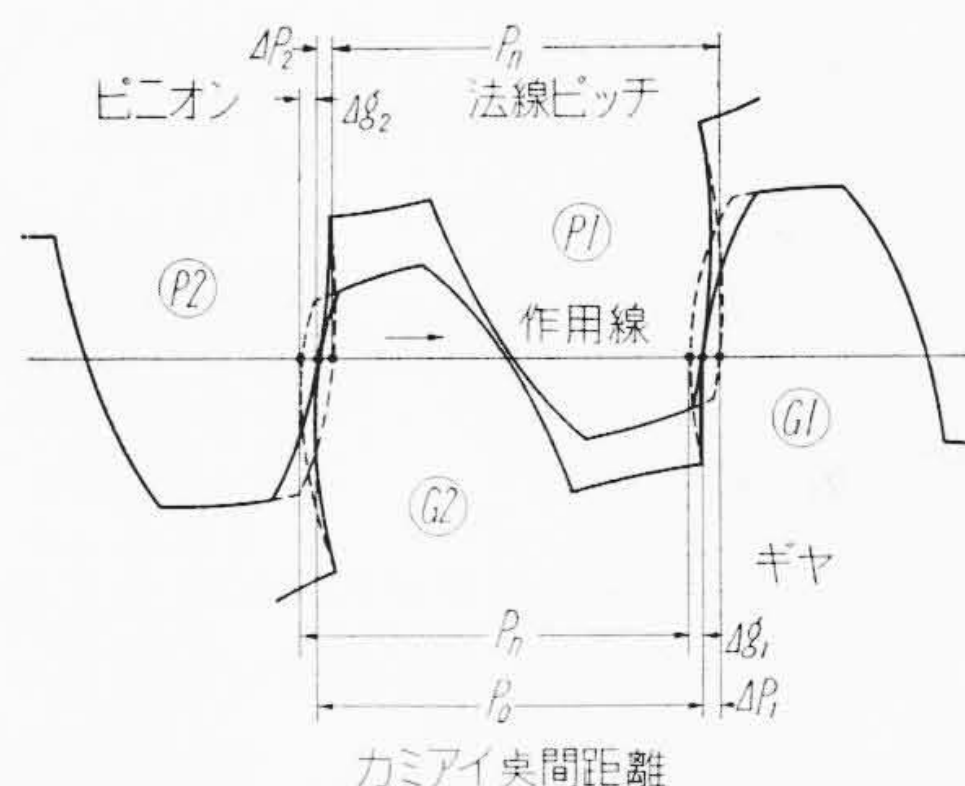
ここに

p_0 : カムアイ点間距離 (cm)



時間 t , 時間目盛 θ はカムアイ率 $\eta=1.447$ の場合を示した。一对の歯で全荷重を受持つときの歯元応力の計算例で、歯元応力影響線と呼ぶ。

第5図 歯元応力計算結果の例



実線はたわんだ位置、破線は剛体歯の仮想位置を示す。
第6図 かみあっている二対の歯の関係位置

$\Delta p_1, \Delta p_2$ など: ①②などの歯のタワミ (cm)

カムアイ点に誤差があり、正しいインボリュート曲線よりの歯車法線方向のずれをそれぞれ $e_{p1}, e_{p2}, e_{g1}, e_{g2}$ で表わすと

$$\begin{aligned} p_0 + (\Delta p_1 + e_{p1}) - (\Delta p_2 + e_{p2}) \\ = p_0 - (\Delta g_1 + e_{g1}) + (\Delta g_2 + e_{g2}) \\ \therefore \Delta p_1 + \Delta g_1 + e_{p1} + e_{g1} = \Delta p_2 + \Delta g_2 + e_{p2} + e_{g2} = s \end{aligned} \dots\dots\dots (4-4)$$

ここに

e_{p1} など: ③などの歯の誤差 (cm)

歯面が凹むほうを正の誤差とする。

上式の s は、正しい剛体歯車と比べたときの被動歯車のおくれを表わす。

さて、荷重分担率を考えると、コワサの定義から

$$\begin{aligned} \Delta p_1 + \Delta g_1 &= \frac{W}{k_1} \times S_1 = \frac{W_1}{k_1} \\ \Delta p_2 + \Delta g_2 &= \frac{W}{k_2} \times S_2 = \frac{W_2}{k_2} \\ S_1 + S_2 &= 1 \end{aligned} \dots\dots\dots (4-5)$$

ここに

W : 静荷重 (kg)
 W_1, W_2 : それぞれに分担される荷重 (kg)
 S_1, S_2 : 荷重分担率
 k_1, k_2 : それぞれのカミアイ点における
 コワサ (kg/cm)

(4-4), (4-5) から

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{k_1}{k_1+k_2} \left\{ 1 + \frac{k_2}{W} (e_{p2} + e_{g2} - e_{p1} - e_{g1}) \right\} \\ S_2 &= \frac{k_2}{k_1+k_2} \left\{ 1 - \frac{k_1}{W} (e_{p2} + e_{g2} - e_{p1} - e_{g1}) \right\} \\ s &= \frac{W + k_1(e_{p1} + e_{g1}) + k_2(e_{p2} + e_{g2})}{k_1 + k_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-6)$$

すなわち、誤差と歯のコワサから荷重分担率、被動歯車のおくれを計算できる。もし

$$\left. \begin{aligned} e_{p2} + e_{g2} &= e_{p1} + e_{g1} \\ \text{ならば} \\ S_1 &= \frac{k_1}{k_1+k_2} \\ S_2 &= \frac{k_2}{k_1+k_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-7)$$

となり、荷重分担率は歯のコワサのみによって決まり、その比は、コワサの比に等しい。換言すればコワサの大きい対がそれだけ多く荷重を分担し、各対の合成タワミは互に等しくなる。このことはバネコワサの異なるバネを2本並べて互に平行な2枚の板の間にはさみ、板の間隔を縮めたとき、各バネの分担する荷重の関係とまったく同様である。

4.4 二対カミアイ、一対カミアイの移行

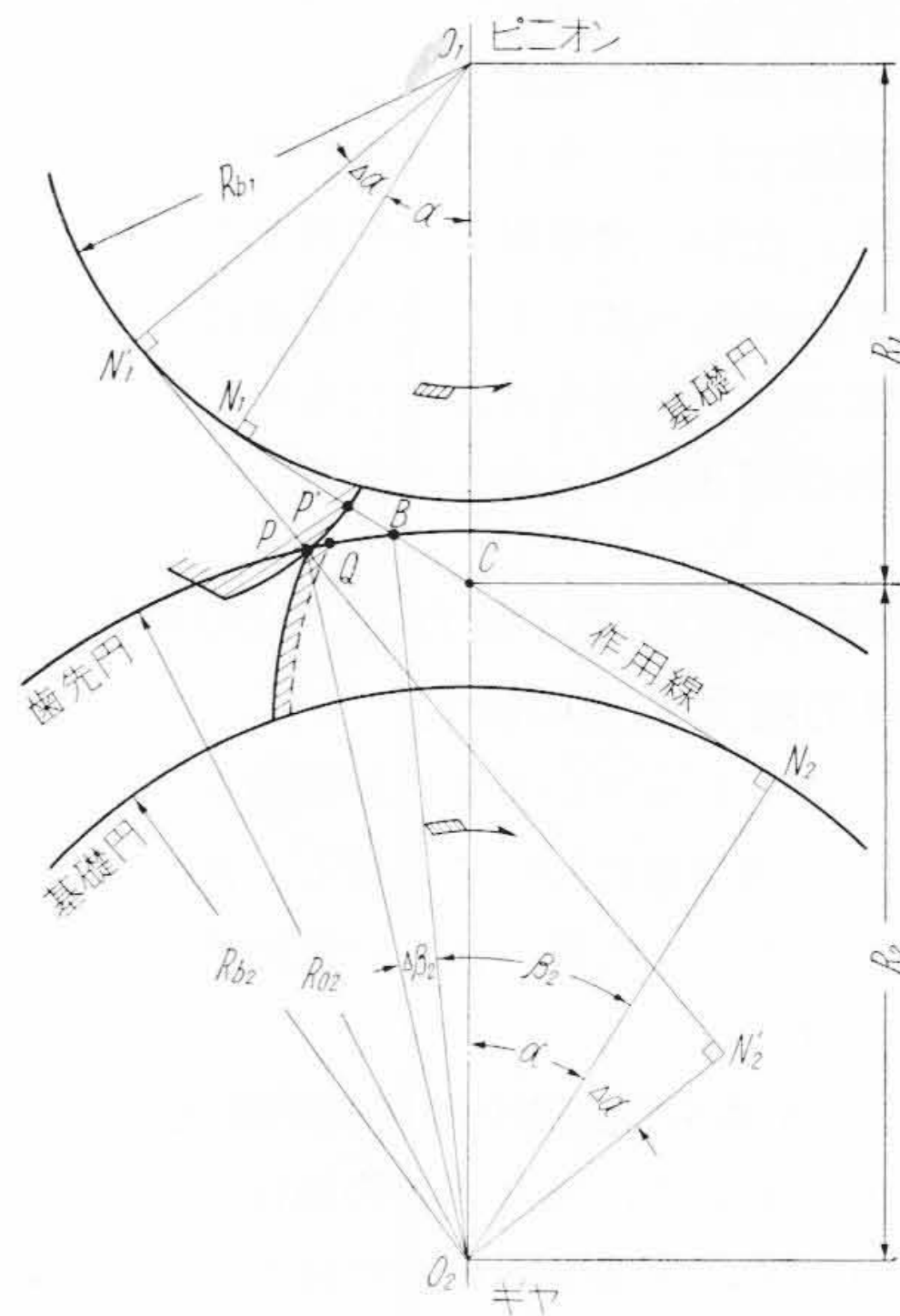
幾何学的に正しい剛体歯車の場合には、二対カミアイの範囲はそのカミアイの幾何学的条件から定まり、理論的カミアイ率から計算される値をとる。しかし歯車が弾性体で、誤差がある場合は、実際の二対カミアイの範囲は理論的カミアイ率から計算される値と必ずしも一致しない。

さて二対の歯がかみあっているということは(4-6)の S_1, S_2 がともに0より大きいことと同義であるから、

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{k_1} + e_{p1} + e_{g1} &\geq e_{p2} + e_{g2} \\ \frac{W}{k_2} + e_{p2} + e_{g2} &\geq e_{p1} + e_{g1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-8)$$

がともに成立つ。ただし二対カミアイが行われるのは、幾何学的二対カミアイ範囲およびその近傍*に限られる。幾何学的二対カミアイ範囲において、(4-8)の二式のうち一方が成立しない場合、たとえば上の式が成立し

* 歯先稜のカミアイ(次節参照)を意味する。



幾何学的にはギヤ歯先がQ (Qを通る破線が正しいインボリュート)にあるべきときに、P点でピニオン歯形と触れたところを示す。

第7図 歯先稜のカミアイ

ないときは、(4-6)において S_2 は負になり、②、②の対は荷重を分担しない状態となる。したがって、

$$\frac{W}{k_1} + e_{p1} + e_{g1} = e_{p2} + e_{g2} \dots\dots\dots (4-9)$$

は、一対のカミアイから二対カミアイへの移行の条件を表わす。ここで(4-9)の左辺は、(4-6)第三式で k_1 なる歯のコワサのみ存在するときのおくれにほかならないので、一対の歯がかみあっているときのおくれの量が、次の対の誤差量に等しくなったときに、ちょうど次の対のカミアイが始まって、二対カミアイの状態に移り変ることを意味する。(4-8)第二式の等号は、同様に、二対カミアイから一対カミアイへの移行の条件である。

4.5 歯先稜のカミアイ

前節で導いた二対カミアイの始まる条件あるいは二対より一対へ移行する条件の成立する点が、幾何学的二対カミアイ範囲の外にあるときは歯先稜のカミアイが行われる。

第7図においては、減速カミアイを考え、矢印の方向に回転し、 O_1 を駆動歯車ピニオン、 O_2 を被動歯車ギヤとする。ギヤの歯先が幾何学的にはQにあるべきときに、前の歯のカミアイにおける誤差あるいは弾性変形によるタワミのために、ピニオンとギヤとの相対的な位置が変わり、P点でギヤ歯先がちょうどピニオン歯面と接触する場合を考える*。第7図において

* 以下の解析はシーベル：歯車⁽²⁸⁾よりヒントをえたが、式の取扱方はシーベルのものと異なる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta l &= \overline{P'B} \\ \Delta x_0 &= \overline{PQ} \\ \Delta x_0 \cos \beta_2 &= e_k \\ \Delta x_0 \frac{R_2}{R_{02}} &= \Delta x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-10)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\Delta l}{R_{b1}} R_1 = \Delta \beta_2 R_2 - \Delta x_0 \frac{R_2}{R_{02}} \} \\ (R + R_2) \cos(\alpha + \Delta \alpha) &= R_1 \cos \alpha + R_{02} \cos(\beta_2 + \Delta \alpha + \Delta \beta_2) \\ PN_1' &= (R_1 + R_2) \sin(\alpha + \Delta \alpha) - R_{02} \sin(\beta_2 + \Delta \alpha + \Delta \beta_2) \\ &= R_1 \cos \cdot \Delta \alpha + (R_1 + R_2) \sin \alpha - R_{02} \sin \beta_2 - \Delta l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4-11)$$

以上の式から $\widehat{PQ}$ の作用線方向成分 e_k は

$$e_k = \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}}{2R_2 \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{\tan \alpha}{\tan \beta_2} - 1 \right]} (\mathcal{M})^2 \quad (4-12)$$

幾何学的に正しい位置 Q においては歯先円上で $\widehat{PQ}$ だけ隙間があり、これを作用線上で考えると e_k になるから歯先より e_k だけの誤差をもつ歯形が延長されているものとして扱うことができる。

4.6 歯元応力の測定と考察

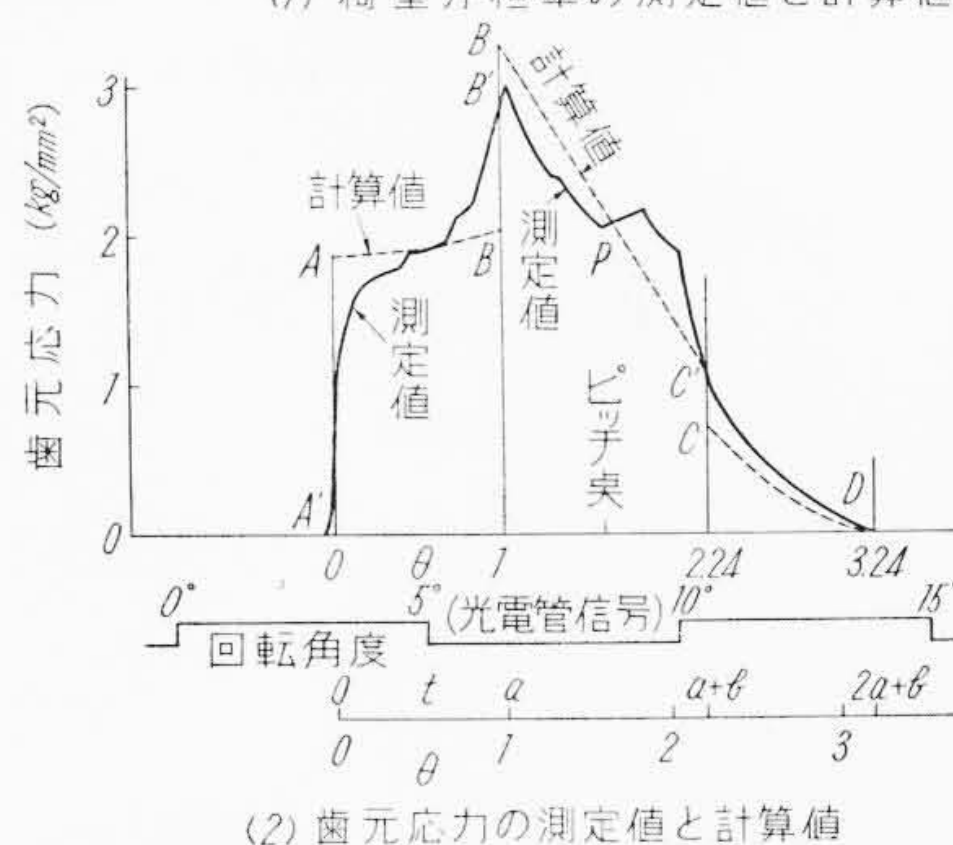
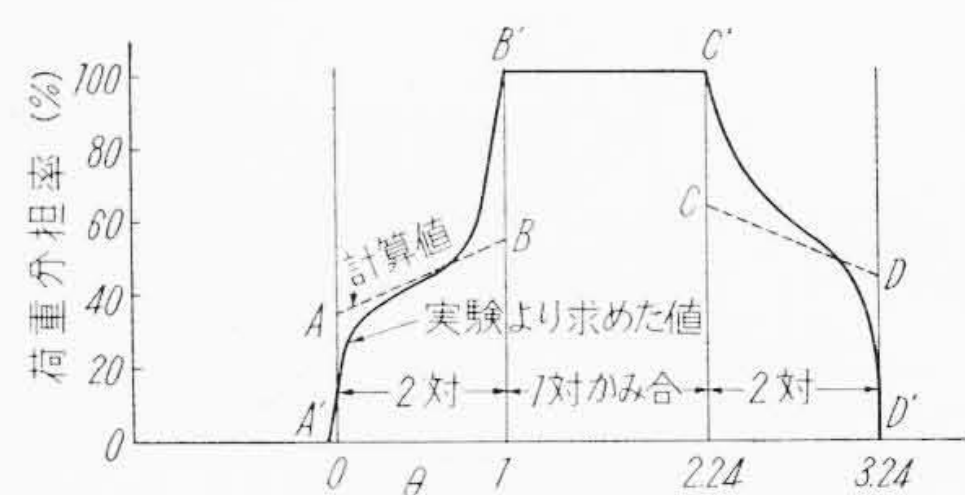
第8図～第10図は静的負荷における歯元応力などの測定値と計算値との比較を示す。これらの図で横軸はギヤ軸の回転角を表わし、時間目盛 θ 〔(4-2)参照〕を示した。

第8図は正しいインボリュートにできるだけ近い歯車の場合の荷重分担率および歯元応力の測定値と計算値との比較を示す。この計算においては誤差を0とおいている。二対カミアイ範囲 ($\theta=0\sim1$ および $\theta=2.24\sim3.24$) においては荷重分担率を計算してから、歯元応力を計算する。この場合測定値は計算値とほぼ一致し、二対カミアイ範囲における差は、ピニオンあるいはギヤの歯先付近のだけにより、またピッチ点付近において測定値に段がつくのは摩擦力⁽²⁹⁾によりそれぞれ説明がつく。

第9図は歯先近くに歯形修整のある歯車を互にかみあわせたときの被動歯車のおくれの計算結果である。

第10図は第9図と同じ条件における歯元応力の測定値と計算値とを示す。第10図において、歯元応力の表われ始める点 A (A' は測定点)は、実際の二対カミアイ始点で、第9図 s_1 と e_2 との交点 A に相当する。また歯元応力の最高値を示す点 B は二対より一対への移行点であって、第9図の B 点に相当する。 B 点以後、ヒズミゲージを貼ってある歯に全荷重がかかることになる。

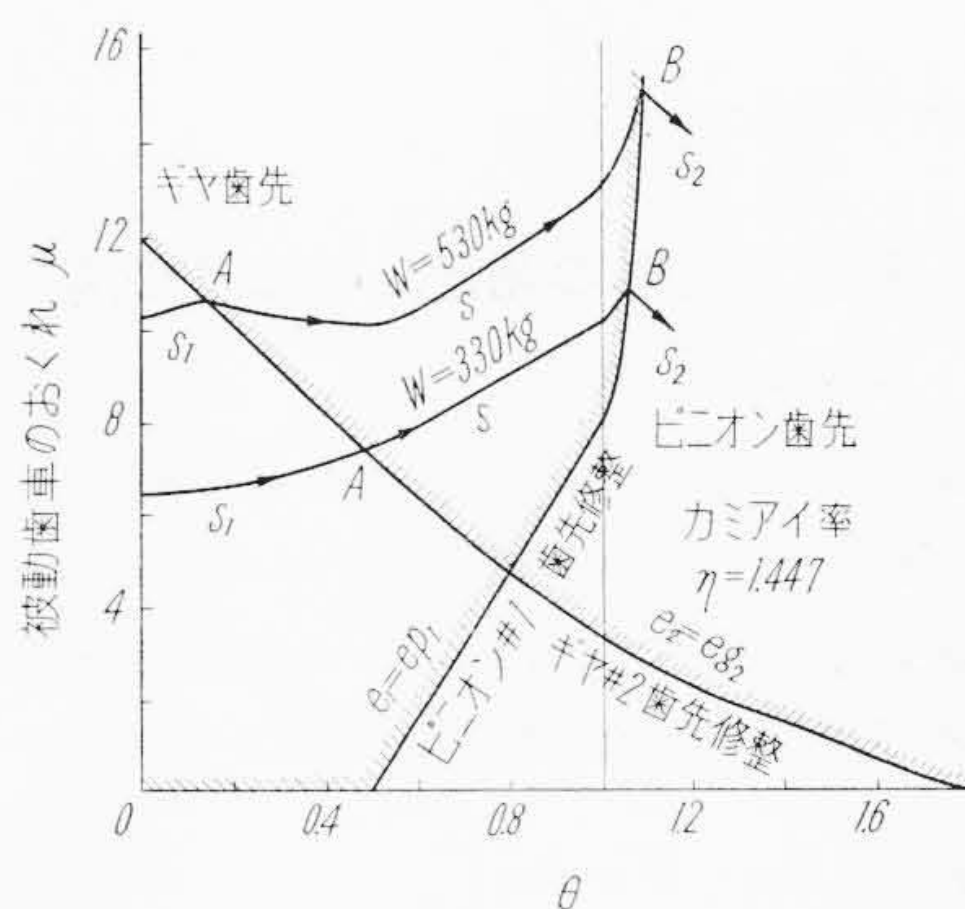
荷重の小さい方が二対カミアイの始まる位置はおくれ、一対カミアイになるのは早く、このことは(4—8)の



誤差のない歯車の荷重分担率はいわゆる“凸字形”を示す。
歯元応力は、荷重分担率と歯元応力影響線(第5図)とから
求められる。

カミアイ率 $\eta=1.447$, 静荷重 $W=480\text{ kg}$

第8図 静的負荷における誤差の少ない
歯車の荷重分担率と歯元応力



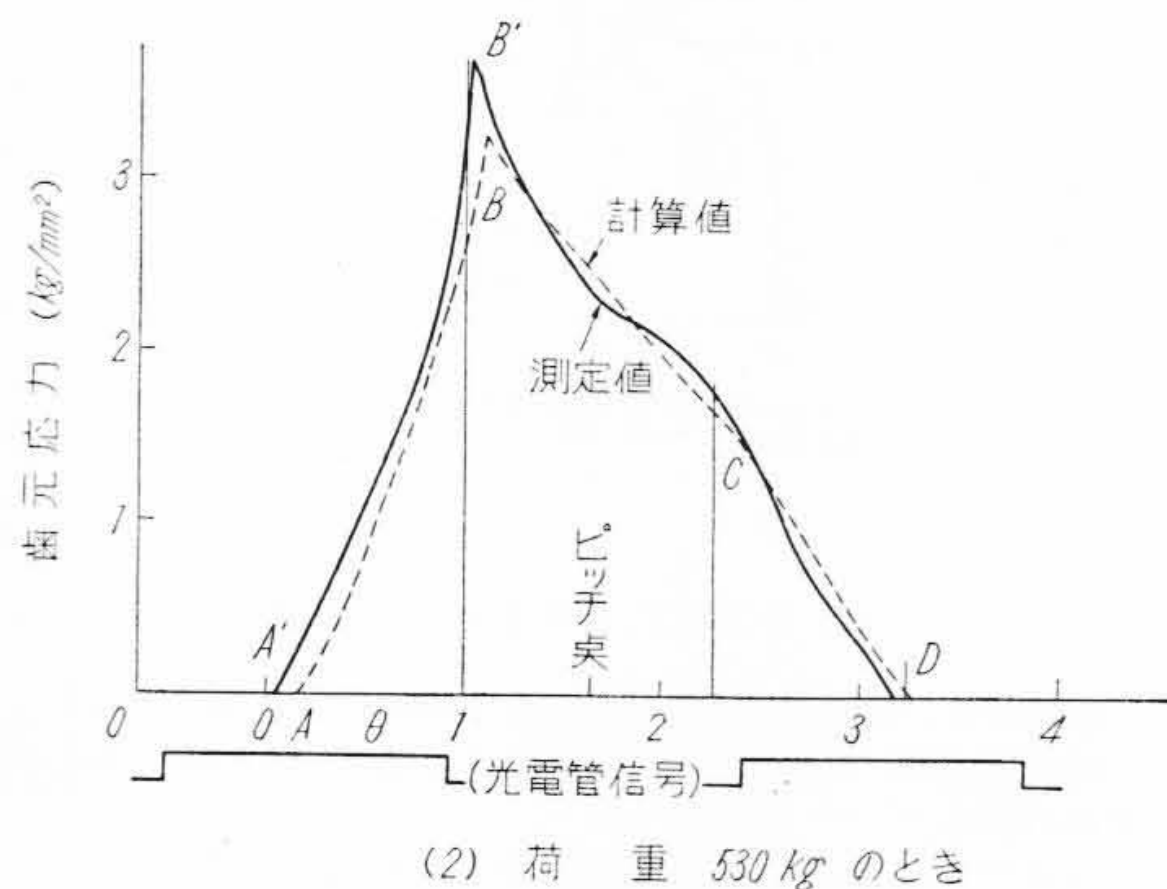
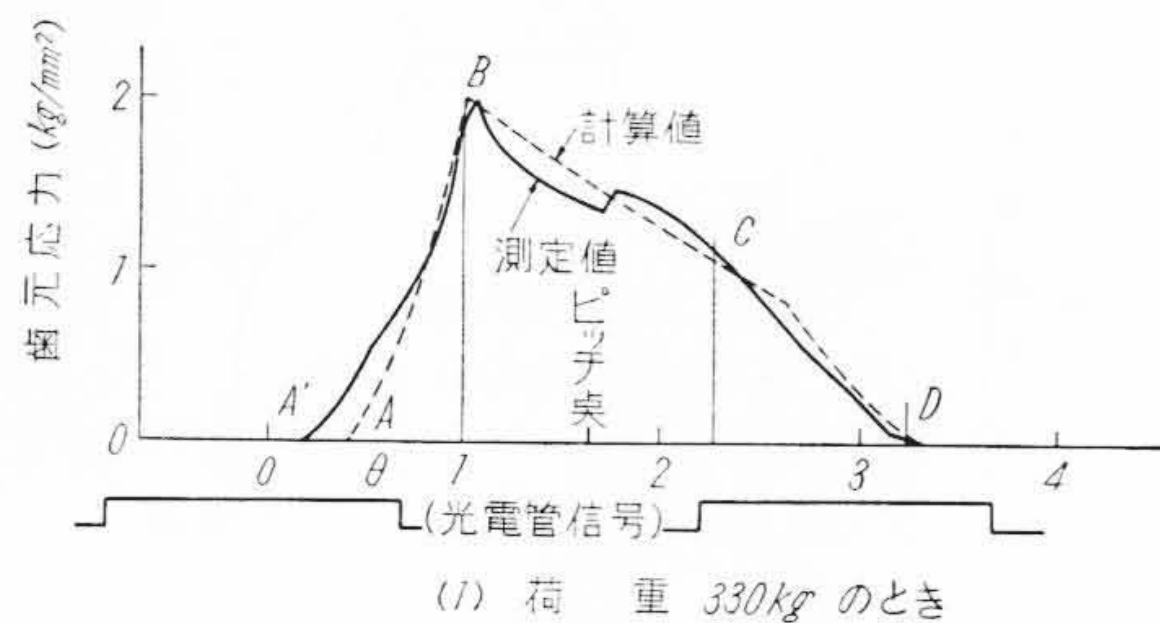
おくれ s_1, s, s_2 を示す曲線が歯形曲線 e_1 あるいは e_2 の上方にあれば、#1 あるいは #2 の歯がかみあっていることを示す。(4-8) 参照。この場合 $eg_1=ep_2=0$

第9図 静的負荷における歯先修整ある
歯車の被動歯車のおくれ

条件からいえることで、第9, 10図によりこの関係が
はつきりする。

第10図において、測定値と計算値とはほぼ一致しており、第8図と比べると、二対カミアイ範囲で歯元応力が直線状に変化していることが目だつ。

また第10図(1),(2)を比べると、同じカムアイ位置においては、歯元応力は荷重に比例することがわかり、動荷重を測定するためには、同一カムアイ点において、静的動的の歯元ヒズミあるいは歯元応力を比較すればよ



測定値と計算値とはほぼ一致し、第8図とくらべると、二対カムアイ時に歯元応力が直線状に変化していることが目だつ。

第10図 静的負荷における歯先修整ある歯車の歯元応力

いことを示すものである。

5. 動荷重変動の測定、特にその周期について

第11図のように噛みあっている一對の歯車を考え、その力学的解析を行う。歯車軸のネジリコワサの作用線上への換算値は十分小さく、またトルク変動も小さいとし、歯車の誤差や摩擦力を省略すれば次式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= T_{Q1} - W_d \cdot R_{b1} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= W_d \cdot R_{b2} - T_{Q2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-1)$$

ここに

J_1, J_2 : ピニオン、ギヤそれぞれの慣性モーメント (kg cm s²)

θ_1, θ_2 : ピニオン、ギヤそれぞれの回転角 (rad)

T_{Q1}, T_{Q2} : 駆動力のモーメントおよび負荷の抵抗モーメント (cm kg)

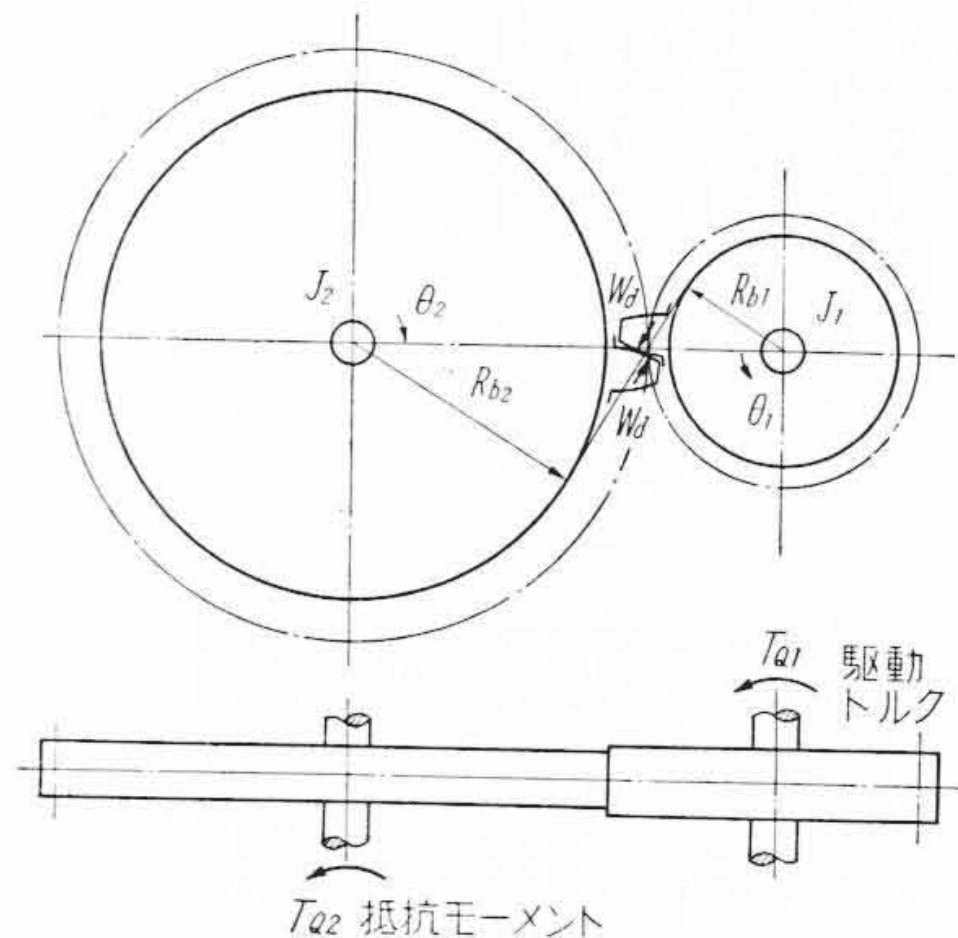
R_{b1}, R_{b2} : それぞれの基礎円半径 (cm)

W_d : かみあう歯面間に働く法線力すなわち動荷重 (kg)

である。

$$\frac{T_{Q1}}{R_{b1}} = \frac{T_{Q2}}{R_{b2}} = W \dots\dots\dots (5-2)$$

とおき



第11図 噛みあっている歯車の略図

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{x_1}{R_{b1}}, \quad \theta_2 = \frac{x_2}{R_{b2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{J_1}{R_{b1}^2}, \quad M_2 = \frac{J_2}{R_{b2}^2} \\ W_d &= k(x_1 - x_2) \\ x &= x_1 - x_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-4)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

とおくと、(5-1)は

$$M\ddot{x} + kx = W \dots\dots\dots (5-5)$$

となる。ここに

W : 歯車軸トルクから決まる歯面法線方向静荷重 (kg)

x_1, x_2 : ピニオン、ギヤそれぞれの回転角を作用線上の移動距離に換算した値 (cm)

M_1, M_2 : それぞれの作用線上の有効質量 (kg s²/cm)

k : かみあっている歯のコワサ一般には時間の関数 (kg/cm)

M : M_1, M_2 の合成質量 (kg s²/cm)

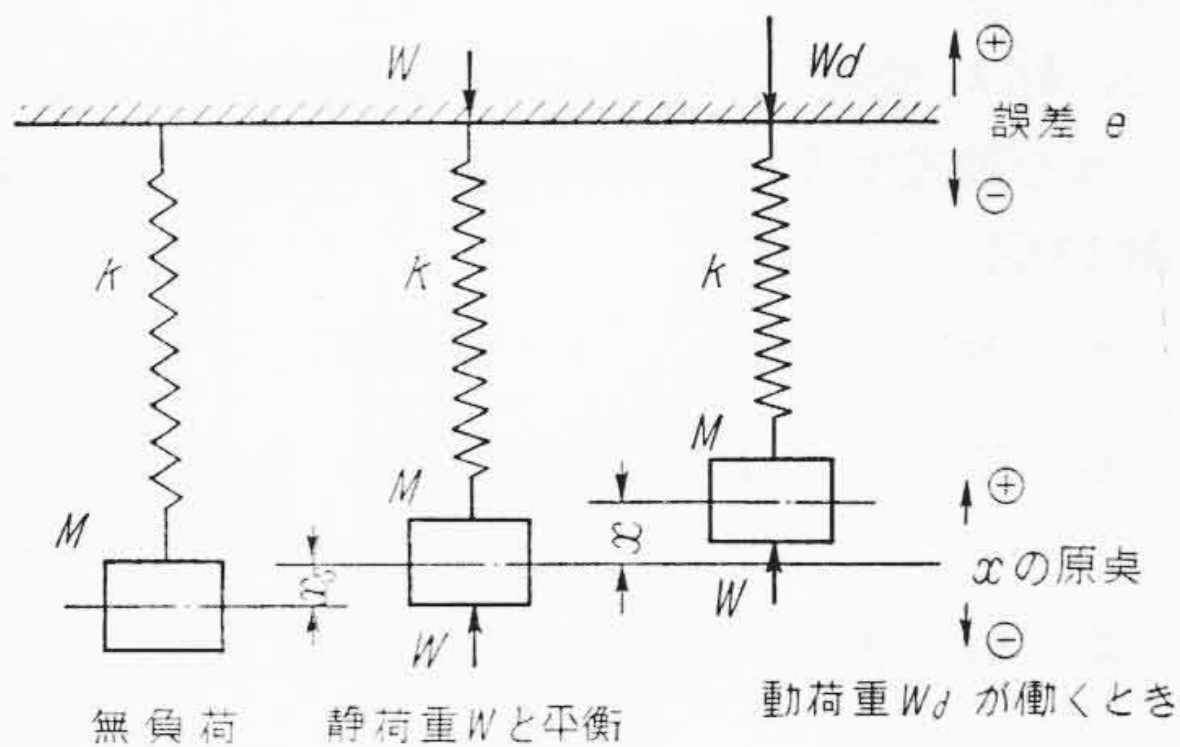
x : ピニオンとギヤとの作用線上相対変位 (cm)

であって、(5-5)は前記仮定のもとでの、噛みあっている歯車の作用線上の相対運動を表わす運動方程式で、質量 M にコワサ k なるバネがついた振動系の剛性床に対する運動と等価である。この振動系の固有振動数 f [c/s] は

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \dots\dots\dots (5-6)$$

で与えられる。

この f c/s の振動は、歯元ヒズミを運転中に測定したとき、ヒズミ波形上の凹凸として観測せられ〔第15図参照〕その振動数の測定値と計算値とはほとんど一致することがわかった。すなわち、ピニオンあるいはギヤに、ハズミ車を直結して有効質量 M_1, M_2 を変えたり、ある



第12図 変位と荷重との関係

いは歯厚を半分に切落したピニオンを用いて、 k を変えた実験を行ったり、あるいは静止中に打撃によって振動を起させたりしたが、いずれの場合にも、その振動数の測定値は(5—6)による計算とほとんど一致した。⁽²²⁾⁽²³⁾

なお、実物歯車系の数例について検討してみると、歯車軸のネジリコワサを歯車の作用線上に換算した値は、歯のコワサに比べて十分小さいのが普通のように、歯車軸のバネ作用は無視できるから、かみあっている歯車は力学的には、歯車がそれぞれ質量をもち、その間に歯がバネとして働くような一自由度の振動系として扱うことができる。したがって試作した動的歯車試験機は、この意味において、実物模型として適当であり一般性をもつものであることがわかる。

6. 動的負荷におけるカミアイの力学的解析

6.1 運動方程式の成立

いま一對の歯がかみあっている状態(この歯を#1の対と名づける)から、時間の経過によって次の対(これを#2の対と名づける)のカミアイが始まり、#1, #2の二対カミアイの状態となり、それから#1のカミアイが終って#2だけの一對カミアイになる間の1サイクルを考え、前記の考え方によってカミアイの力学的解析を行う。

第12図において、

x : 質量 M の重心の変位で、歯をバネと考えたときのバネのタワミに相当 (cm)
 ピニオンとギヤとの作用線上の相対変位。
 一對の歯がかみあっていて、そのカミアイ点に誤差や歯形修整がないとき、静荷重 W が作用した場合の平衡位置を原点とし、上方を正とする。

x_s : 無負荷時の M の重心と上記 x の原点との距離
 バネの静的タワミに相当する (cm)

W : 静荷重、歯面法線方向荷重とする (kg)

W_d : 動荷重、バネの正味のタワミにバネのコワサを乗じた値 (kg)

さて、歯に誤差があるとき、4.におけるごとく、正しいインボリュートよりのずれを e で表わし、歯面が凹むほうを正にとると、第12図上部の剛性床がそれだけ凹むことに相当し、バネの正味のタワミはそれだけ減ることになる。カミアイ率は1以上2未満とし* #1の一對→#1, #2の二対→#2の一對カミアイの1サイクルを考えると、

$$W_{d1} = k_1(x + x_s - e_{p1} - e_{g1}) \dots\dots\dots (6-1)$$

$$W_{d2} = k_2(x + x_s - e_{p2} - e_{g2}) \dots\dots\dots (6-2)$$

ここに

W_{d1}, W_{d2} : #1, #2の歯のカミアイに対応する
 バネに働く動荷重 (kg)

なお、 k_1, k_2, e_{p1} などについては 4. (4—4) (4—5) におけるそれらと同じである。ここで x_s を除くほかの諸量はいずれも時間の関数である。また W_{d1}, W_{d2} はいずれも負にはならないから(6—1) (6—2)式が成立つためには、それぞれ次式の関係が必要である。

$$x + x_s \geq e_{p1} + e_{g1} \dots\dots\dots (6-3)$$

$$x + x_s \geq e_{p2} + e_{g2} \dots\dots\dots (6-4)$$

さて、#1の歯が一對でかみあうときは、(6—3)の条件のもとで

$$M\ddot{x} = W - W_{d1} - D_1\dot{x} \dots\dots\dots (6-5)$$

#1, #2の歯が二対でかみあうときは(6—3) (6—4)がともに成立ち

$$M\ddot{x} = W - W_{d1} - W_{d2} - (D_1 + D_2)\dot{x} \dots\dots\dots (6-6)$$

#2の歯が一對でかみあうときは(6—4)の条件のもとで

$$M\ddot{x} = W - W_{d2} - D_2\dot{x} \dots\dots\dots (6-7)$$

となる。ここで

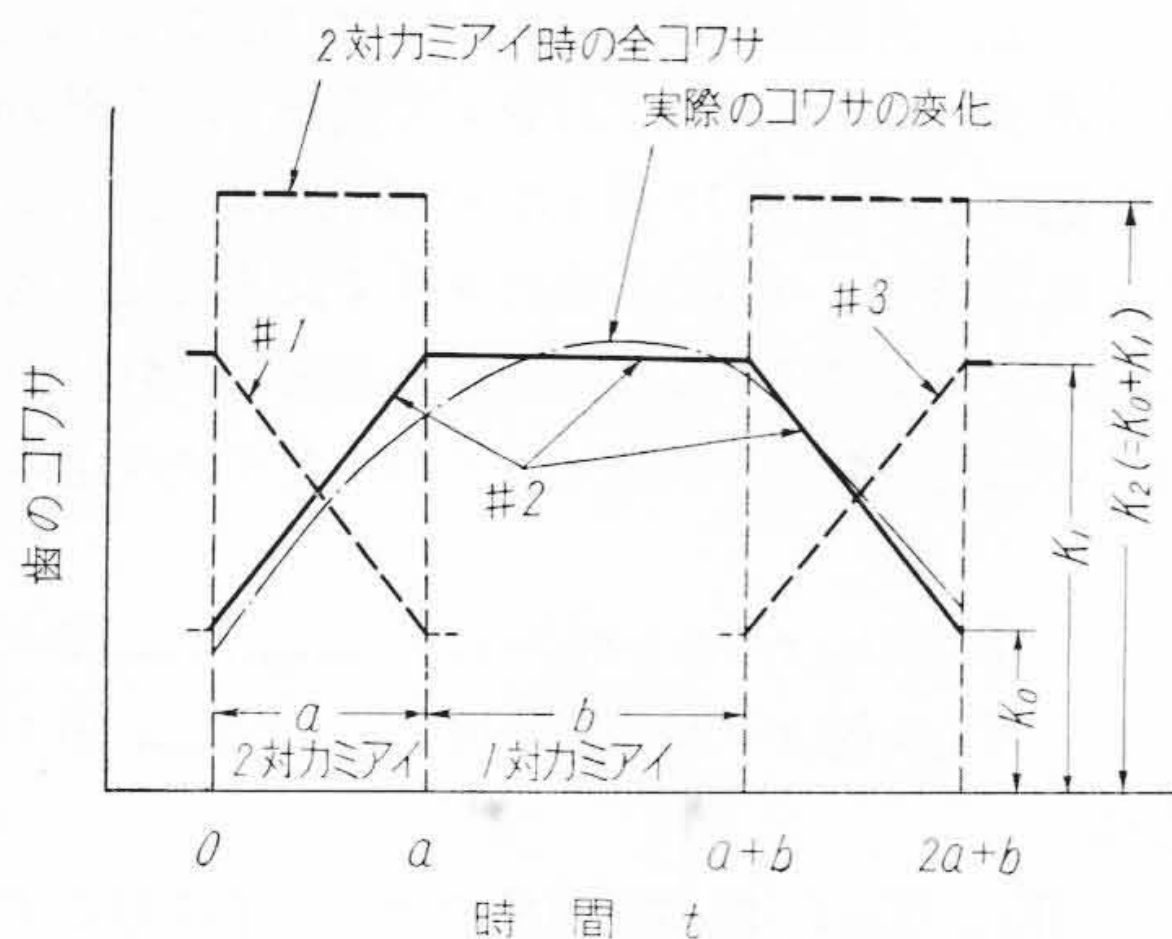
D_1, D_2 : それぞれのカミアイにおける減衰力が、
 相対速度 $\dot{x}$ に比例すると考えたときの
 比例定数 (kg s/cm)

である。

6.2 運動方程式の成立する範囲、移行する条件

任意の歯 #1の対がかみあっている状態から次の歯#2のカミアイが始まり、ある期間二対のカミアイとなり、次に#1のカミアイが終って#2の一對カミアイになる1サイクルを考えると、(6—5), (6—6), (6—7)のいずれかが成立する。幾何学的には二対カミアイ、一對カミアイの範囲はカミアイ率から決まるのであるが、動的負荷において、しかも誤差のある場合は、二対、一對の移行位置は必ずしも幾何学的位置と一致せず、また静的負荷における移行位置とも一致しないのが普通である。静的負荷におけるこれらの考察と同様に、(6—4)の等式が(6—5)から(6—6)への移行の条件で、(6—3)の等式が(6—6)から(6—7)への移行の条件となる。この場合、

* カミアイ率が2以上の場合も、同様な考え方で拡張できる。



鎖線のごとき変化を実線のごとき近似して歯のコワサを数式で表わす。

第13図 歯のコワサの変化

(6-3) (6-4) の左辺 ($x+x_s$) は、静的負荷における被動歯車のおくれと同様の物理的意味をもち、幾何学的に正しい位置からの偏倚を表わす。静的負荷においては、おくれが荷重と歯のコワサと誤差とによって定まったのに対し、($x+x_s$) は運動方程式 (6-5) ~ (6-7) の解からえられるもので、静的なおくれのほかに、慣性力や減衰力の影響が入るのである。

6.3 特別な場合の吟味

一對カミアイ範囲において (6-3) あるいは (6-4) が成立しない場合、二對カミアイ範囲で (6-3) (6-4) がともに成立しない場合には、歯のカミアイがまったく行われなことを意味し、いわゆる分離 (Separation) の状態⁽³⁰⁾ に相当する。このときは

$$W_{d1} = W_{d2} = 0 \quad D_1 \div D_2 \div 0 \dots \dots \dots (6-8)$$

となり、

$$M\ddot{x} = W \dots \dots \dots (6-9)$$

がえられる。

また (6-5) ~ (6-7) において、

$$\ddot{x} = \dot{x} = 0 \dots \dots \dots (6-10)$$

とおくと、静的負荷における関係式がえられる。

また、誤差がすべて 0 の場合には、(6-5) ~ (6-7) において

$$e_{p1} = e_{g1} = e_{p2} = e_{g2} = 0 \dots \dots \dots (6-11)$$

とおくことにより、歯のコワサの変化によって起る動荷重の計算式を与える⁽²⁴⁾。

以上の考察により、(6-5) ~ (6-7) は歯車のカミアイを表わす一般的な運動方程式と考えることができる。

6.4 運動方程式を解くための近似と仮定

運動方程式 (6-5) ~ (6-7) を解くために、 M, x_s, W などは簡単にえられ、 e_{p1} など歯車の誤差は測定結果から時間の関数として求められる。あるいは理論的に誤差と動荷重との関係を求めようとするときはあらかじめ与え

ることができる。

また、 k_1, k_2 の時間的变化は第13図鎖線のごとくなるが、これを数式で表わすため次のごとく仮定する。すなわち第13図のごとく、

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= K_1 & (-b \leq t \leq 0) \\ k_1 &= K_1 - (K_1 - K_0) \frac{t}{a} & (0 \leq t \leq a) \\ k_2 &= K_0 + (K_1 - K_0) \frac{t}{a} & (0 \leq t \leq a) \\ k_2 &= K_1 & (a \leq t \leq a+b) \end{aligned} \right\} \dots (6-12)$$

ここに

K_1 : 一對カミアイ範囲の平均コワサ (kg/cm)

K_2 : 二對カミアイ範囲の全コワサ (kg/cm)

$$K_0 = K_2 - K_1 \dots \dots \dots (6-13)$$

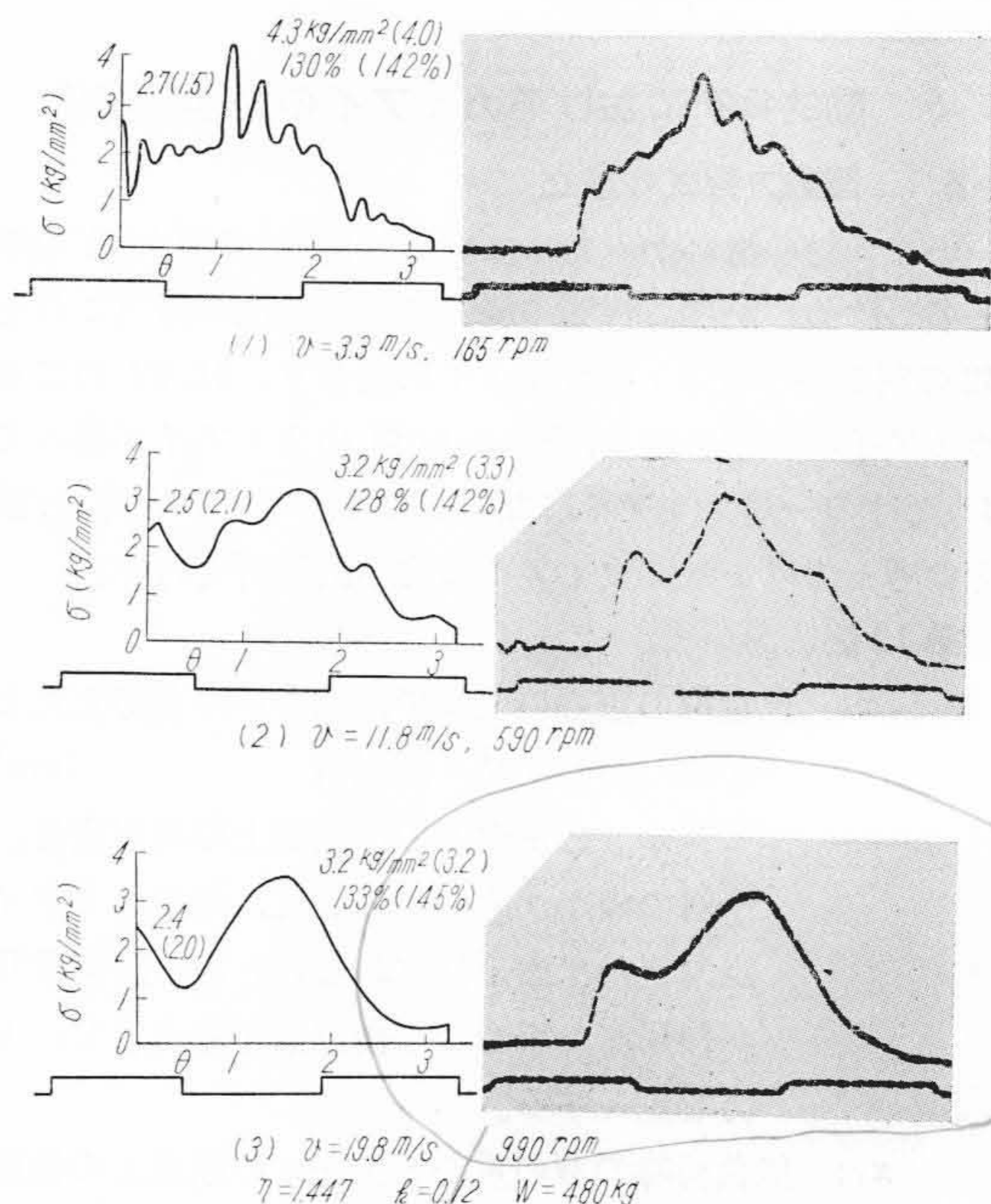
減衰係数比は、歯元ヒズミを運転中に測った波形から測定してほぼ

$$h = 0.12 \dots \dots \dots (6-14)$$

とおくことができ、計算においては $h = 0$ の場合についても吟味した。

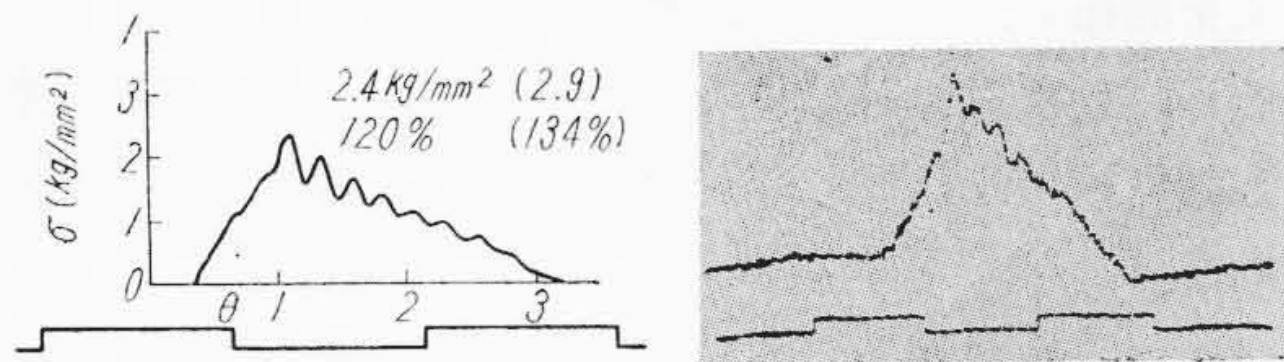
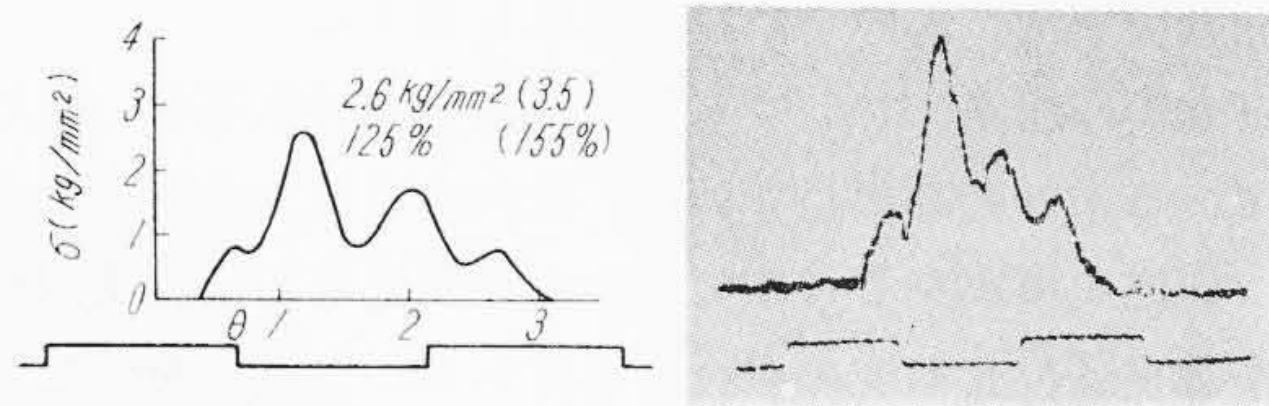
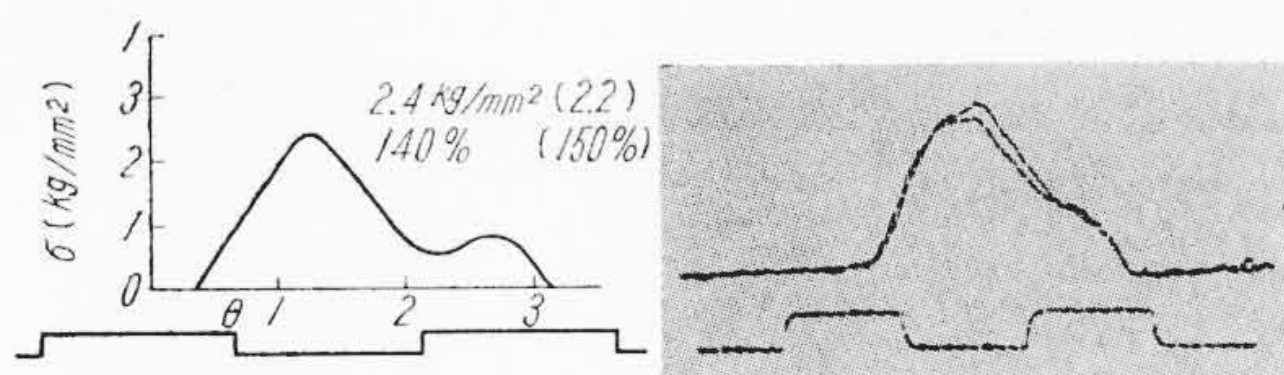
かくして (6-5) ~ (6-7) は (6-3) (6-4) の等号をそれぞれ移行条件として順次解くことができ、動荷重、歯元応力が計算によって求められる。

実際の計算に当っては、 $0 \leq t \leq a$ において (6-5) あるいは (6-7) を解くときに、バネコワサの変化する振動方



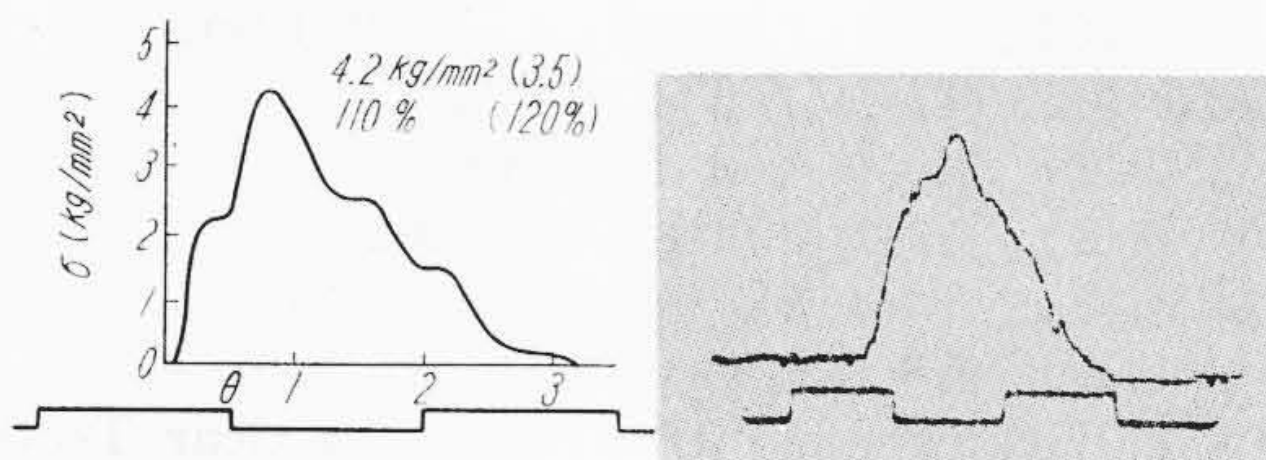
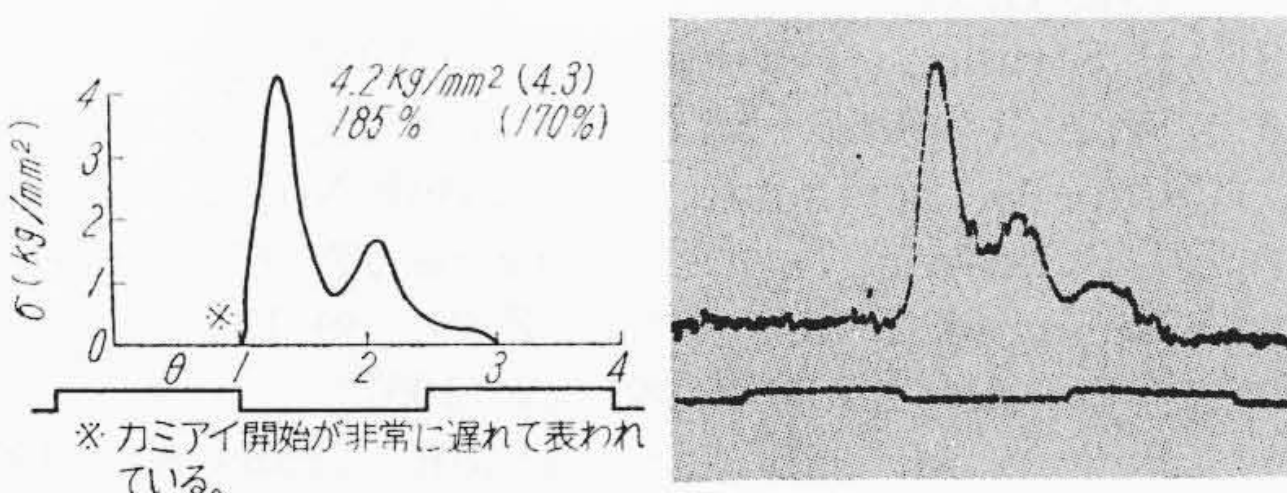
(1) の図から、低速の場合に二對カミアイ、一對カミアイの移り変りのとき振動が誘起されることがわかる。速度が大きくなると、誘起された振動があまり減衰しないうちに、次のカミアイに移ってゆく。

第14図 誤差の少ない歯車の歯元応力と動荷重

(1) $v=3.2 \text{ m/s}$, 160 rpm(2) $v=8.5 \text{ m/s}$, 425 rpm(3) $v=19 \text{ m/s}$, 950 rpm
 $\eta=1.447$, $k=0$, $W=330 \text{ kg}$

周速が大きくなるにつれて、一對カミアイ範囲中に表われる凹凸の数は減り、最大応力を生ずる点がギヤの歯先から遠ざかる。

第15図 歯先修整ある歯車の歯元応力と動荷重

(1) ピニオン圧力角 $20^\circ 10'$ の場合
 $\eta=1.447$, $W=480 \text{ kg}$, $v=5.8 \text{ m/s}$, 290 rpm, $k=0.12$ (2) ピニオン圧力角 $19^\circ 50'$ の場合
 $\eta=1.447$, $W=360 \text{ kg}$, $v=5.9 \text{ m/s}$, 295 rpm, $k=0.12$

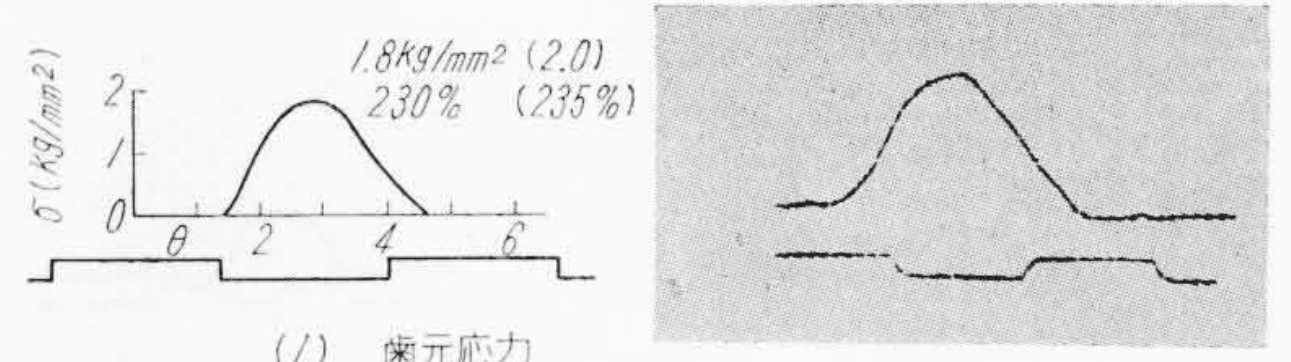
ピニオンの圧力角がギヤのそれより大きいときと小さいときとは全く様相が変わる。

ピニオン圧力角 $19^\circ 50'$ の場合、カミアイ開始が遅れるため、前の対のピニオン歯先には大きな荷重がかかりやすい。

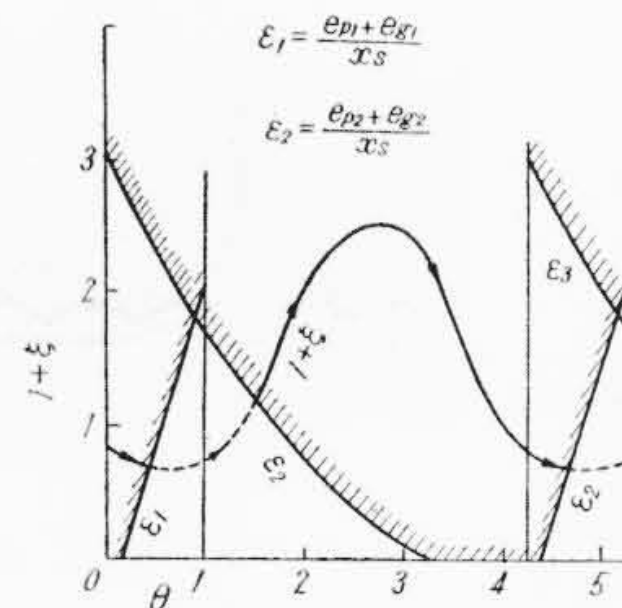
第17図 圧力角に差ある歯車の歯元応力と動荷重

程式を解かなければならないが、この場合無限級数を用いて解くことができる。また、位相面を用いる図式解法^{(31)~(33)}もきわめて有効であった。*

* 最近の検討によれば、これらの運動方程式はアナログコンピュータにより容易に解くことができる。



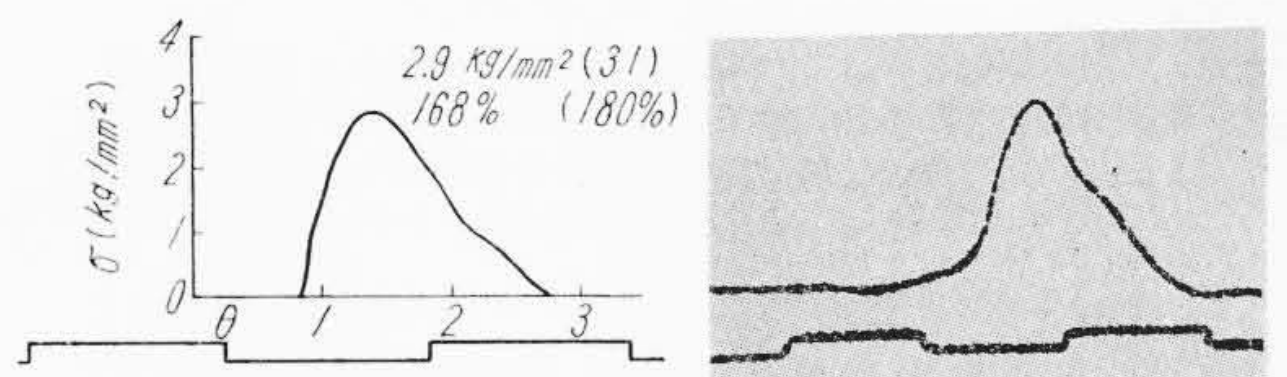
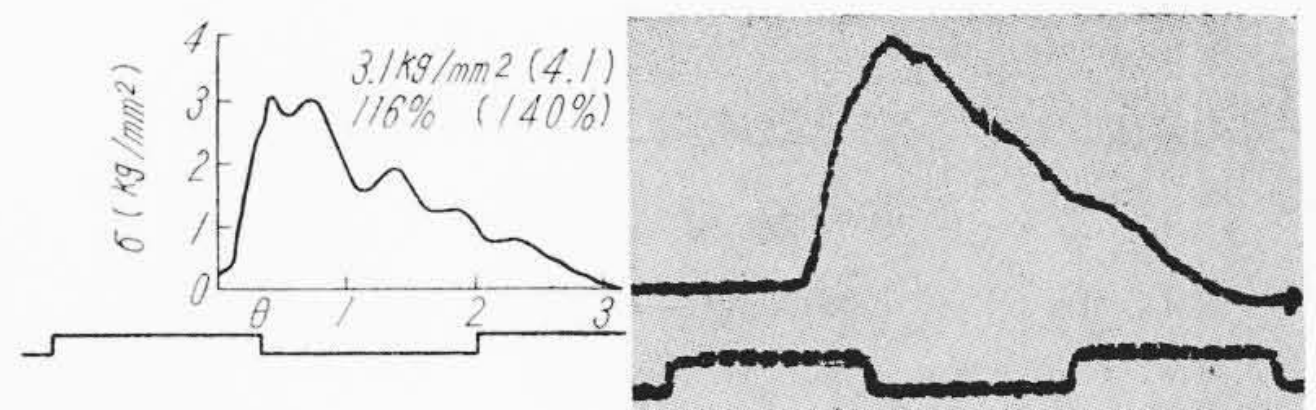
(1) 歯元応力



(2) 相対運動線図

相対運動線図によると、運動を表わす $(1+\xi)$ と強制項を表わす誤差曲線 ε_2 とで、その位相が反転している。このことは、固有振動数より大きい振動数をもつ強制力が働いた場合に相当する。 $(1+\xi)$ の破線部は歯面の分離を示す。

第16図 歯先修整ある歯車の歯元応力、動荷重、相対運動線図

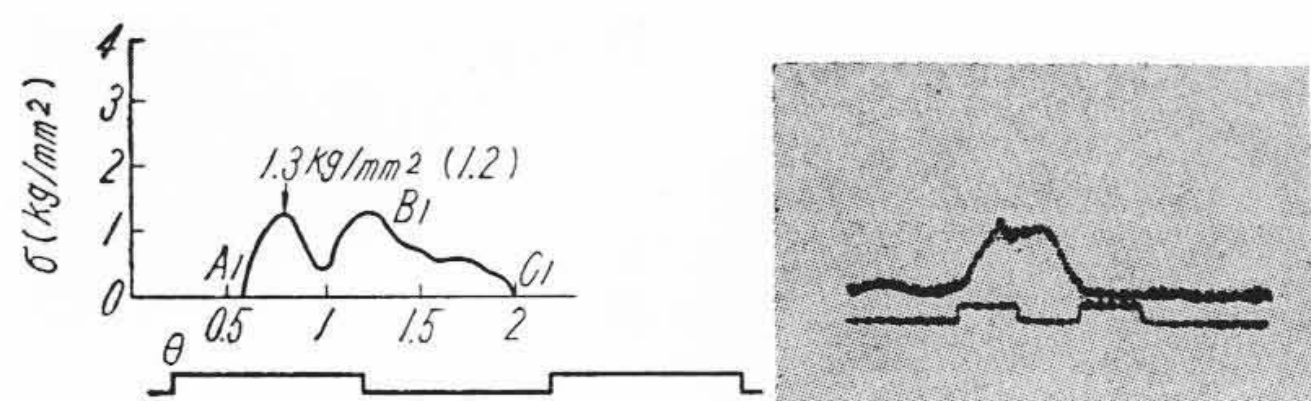
(1) ピニオン法線ピッチが 18μ 大きいとき
 $\eta=1.436$, $W=600 \text{ kg}$, $v=9.6 \text{ m/s}$, 980 rpm, $k=0.12$ (2) ピニオン法線ピッチが 18μ 小さいとき
 $\eta=1.436$, $W=530 \text{ kg}$, $v=5.8 \text{ m/s}$, 290 rpm, $k=0.12$

ピニオンの法線ピッチがギヤのそれより大きいときと小さいときとは全く様相が変わる。

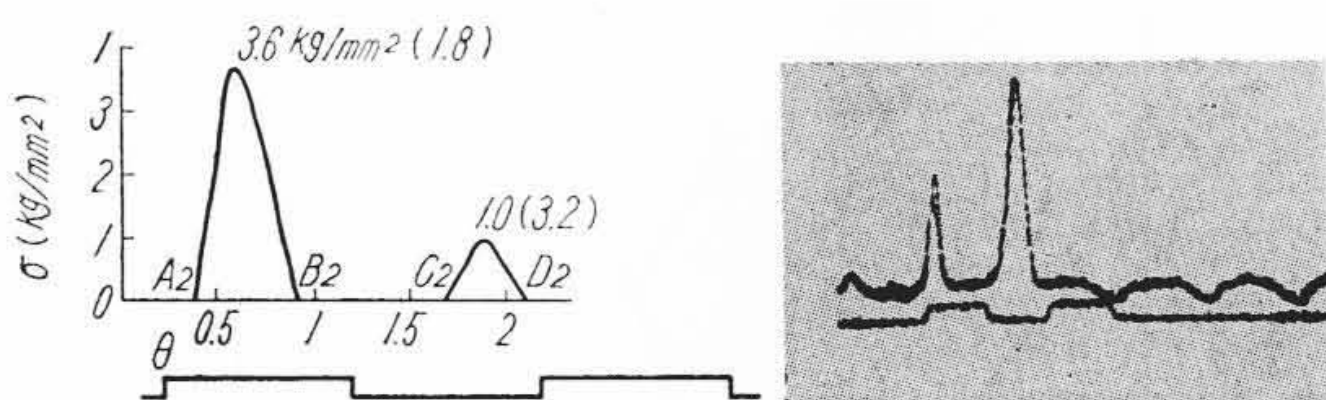
第18図 ピッチに差ある歯車の歯元応力と動荷重

7. 動荷重測定結果と計算結果との比較考察

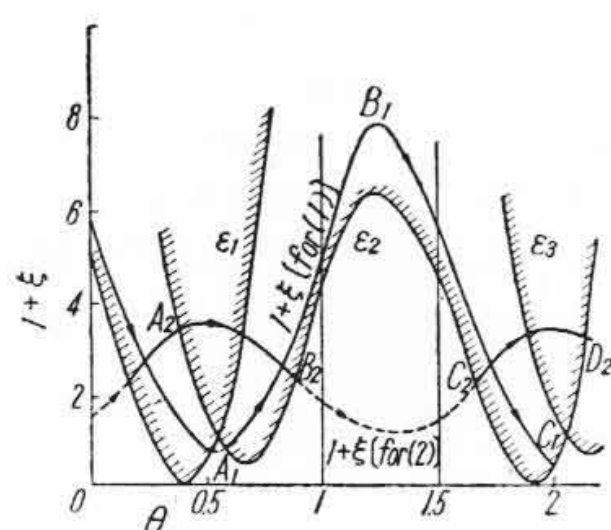
以下本章では、歯元ヒズミ動荷重の測定結果と計算結果との比較を行う。第14~19図において、横軸は時間軸で時間目盛 θ [(4-2)参照]で示した。ヒズミ波形の下に矩形波は光電管による信号で、信号の間隔はギヤ軸の回転角でほぼ5度に相当する。縦軸は歯元ヒズミで応力 $[\sigma: \text{kg/mm}^2]$ に換算して目盛をつけてある。また相対



(1) 歯元応力
 $\eta=1.672$, $W=320\text{kg}$, $v=86\text{m/s}$, 430rpm , $h=0.12$



(2) 歯元応力
 $\eta=1.672$, $W=320\text{kg}$, $v=29\text{m/s}$, 1450rpm , $h=0.12$



(3) 相対運動線図

周速の低いときはこれまでの例とあまり異なっていないが周速が大きくなると、歯先、歯元2個所でカムアイが行われる。(3)相対運動線図破線は歯面の分離を示し、第16図の例のように、 $(1+\xi)$ と ε_2 との位相が反転している。

第19図 歯形誤差(ピッチ点付近に凹み)
ある歯車の歯元応力と動荷重

運動を表わすグラフでは $1+\xi = (x+x_s)/x_s$ によって示し、歯の誤差曲線をあわせ示している。

図の説明文中の記号は次のとおりである。

- v : 歯車周速 (m/s)
- rpm: ギヤ軸毎分回転数
- η : 理論的カムアイ率
- h : 減衰係数比
- W : 静荷重 (kg)

各図の左側の波形が計算結果で、右側のオシログラムが測定結果である。計算結果のグラフの中に示した数字は歯元応力の最大値およびその点の動荷重百分率を示し、その単位は kg/mm^2 および静荷重を100%としてある。括弧内はこれらに対応する測定値を示す。

計算結果と測定結果とはほぼ一致しており、いろいろな誤差をもつ歯車の動荷重の計算が以上の解析によって可能であることを示している。各図に若干の説明を加えたので本文中ではこれを省略する。

8. 結 言

本研究において平歯車の動荷重を歯において測定する

方法を開拓し、静的負荷、動的負荷におけるカムアイを解析し、動荷重を計算する方法を導いた。そして測定結果と計算結果を比較し、それらがほぼ一致することを確認した。

終りに、本研究を行うに当たり御懇切な御指導をいただいた東京工業大学教授佐々木重雄博士、同中田孝博士、同助教授石川二郎博士に厚く謝意を表す。

日立製作所内においても日頃いろいろ御指導をいただいている本社荒井部長を始め、社内歯車部会の委員の方々、研究用歯車を製作していただいた亀有工場森田課長ほか課員各位、研究の機会を与えられ、御助言をいただいた中央研究所菊田多利男博士、浜田秀則博士、湯本清比古博士ならびに直接御指導をいただいた明山正元博士、須藤卓郎博士、本実験に協力していただいた谷口収研究室員に厚く御礼申上げる。

参 考 文 献

- (1) 関口, 海老原: 機学誌 34, 640(1931)
- (2) 小野: 機学誌 35, 624(1932)
- (3) 関口, 佐々木: 機学誌 37, 614(1934)
- (4) 佐々木, 寒川: 機学誌 40, 6(1937)
- (5) 中田: 機学誌 40, 736(1937)
- (6) 関口, 海老原, 中田: 機論集 4, 144(1938)
- (7) 海老原, 中田: 機論集 6, 1-41(1940)
- (8) 中田: 機論集 7 IV-2 (1941)
- (9) 中田: 工大学報 A-1 (1949)
- (10) 横山: 造船雑纂 241号 187(1942)
- (11) 星野: 日本海事協会技報 1号(1953)
- (12) 仙波: 歯車 3, 694 (日刊工業 1956)
- (13) E. Buckingham: Dyn. Loads on Gear Teeth (ASME 1931)
- (14) E. Buckingham: Anal. Mech. of Gears 426 (Mc Graw 1949)
- (15) H. Strauch: VDI-Z 95, 159(1953)
- (16) W. A. Tuplin: Mach. Design 25, 203(1953)
- (17) Capelle, Berthoud: SEIE Bull No 22 3(1953)
- (18) J. B. Reswick: ASME Trans 77, 635(1955)
- (19) Niemann, Rettig: VDI-Z 99, 89, 131(1957)
- (20) J. Zeman: VDI-Z 99, 244(1957)
- (21) Semar, Mc Ginnis: ASME Trans 80, 195 (1958)
- (22) 明山, 歌川: 日立評論 38, 585(1956)
- (23) 歌川: Proc. Japan National Congr. for Appl. Mech 6, 489(1956)
- (24) 中田, 歌川: loc cit 6, 493(1956)
- (25) 歌川: 機学誌 61, 296(1958)
- (26) 歌川: JSME Bull 1, 397(1958)
- (27) 石川: 機論集 17, 103(1951)
- (28) シーベル, 窪田, 瀬尾訳: 歯車 上巻 107(コロナ社 1942)
- (29) 仙波: 歯車 1, 143(日刊工業 1953)
- (30) E. Buckingham: (13)p. 28 (14)p. 436
- (31) Jacobsen: Appl. Mech. J. 19, 543(1952)
- (32) Bishop: IME, Proc. 168, 299(1954)
- (33) 田中: 機械の研究 9, 43, 275, 357(1957)