# スプライン軸の光弾性実験

Photoelastic Experiments of Spline Shafts

吉 武 博 之\*
Hiroyuki Yoshitake

# 内 容 梗 概

スプライン軸にトルクが加わったときの応力分布について三次元の光弾性実験を行ったところ次の結果が得られた。

- (1) スプライン軸のみを単にねじったときの応力分布および応力集中係数を理化学研究所の西田博士の斜切断法で求めた結果が他の方法で求めた結果とよく一致した。
- (2) 斜切断法によって得られた結果は理論値と5%程度の誤差で一致する。
- (3) ボスとかみ合った状態でねじったとき歯元の曲げ応力はねじりの応力に匹敵する値となっている。

# 1. 緒 言

最近建設械械などの動力伝達軸にスプライン軸が多く使用されるようになって、その強度的な資料が要求されるようになった。スプライン軸の強度を研究するにはスプライン軸にトルクが加わったときの応力分布を知る必要がある。スプラインを切った軸に単なるトルクを加えたとき生ずる応力分布についての研究は、ねじりの応力関数と電解槽内の電位との相似性を利用して測定した都立大の中沢博士の実験のがある。しかしながら実際のスプライン軸は軸とボスとがかみ合って作動し、ボスが軸に、あるいは軸がボスにトルクを伝達するから、ねじり応力のほかに歯の曲げ応力も強度に影響するものと考えられる。このようにかみ合状態における応力分布をスプラインの内部まで測定できる方法は、現在では光弾性実験以外にはないと考えられる。

本報においては最初スプライン軸のみを単にねじったときの応力 分布を測定して、中沢博士の結果との比較について述べ、次にスプ ライン軸にボスがかみ合って作動するときの歯の曲げ応力の測定結 果について述べる。また最後に本研究に用いた応力測定法の測定精 度についての実験結果について述べる。

## 2. 西田博士の斜切断法(2)

長さ方向に一様な断面の軸をねじったときの応力分布を求める光 弾性法としては、散乱光法と理化学研究所の西田博士が考案された 斜切断法とが便利である。われわれは後者の斜切断法で測定した。

ねじり応力を凍結した真直ぐな棒を軸方向(z)に対し $45^\circ$ の面 p (必ずしも $45^\circ$ の必要はない)で切断し, $\hat{\mathbf{x}}$ 1 図のようにz8 を含み切断面に垂直な面に平行でz軸に直角なy方向に偏光を透過して得られる光弾性しま次数をNとすると

## α: 光弹性感度

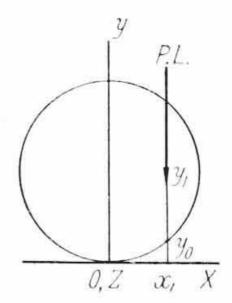
となる。このとき切断面の周辺を偏光透過方向に直角な面へ投影すれば、その投影は棒の横断面と同形になる(切断面が軸に 45°であるため)、

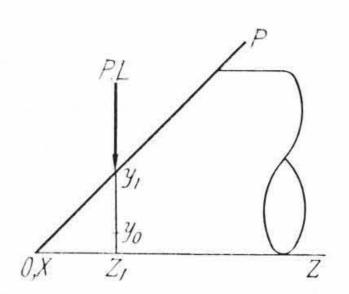
一方ねじりの応力関数

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \dots (2)$$

$$N_{\substack{x=x_1\\z=z_1}} = 2\alpha \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{x=x_1} dy = 2\alpha \left( \phi_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} - \phi_{\substack{x=x_1\\y=y_0}} \right)$$

であり、境界上では φ=0 としてよいから





第1図 切断面に対する偏光の透過

$$N = 2\alpha\phi....(3)$$
 $x = x_1$ 
 $x = x_1$ 
 $x = x_1$ 
 $x = x_1$ 

この式から光弾性しま次数Nは棒の横断面の座標x,yに対応するねじり応力関数と、一次的な関係があることがわかる。したがってしま写真が得られれば次式からせん断応力を求めることができる。

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial N}{\partial z} 
\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial N}{\partial x} 
\tau = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2 \dots (4)}$$

また(3)式を断面全体について積分を行えばねじりモーメントが 次式より計算できる。

$$M_t = \alpha \iint \phi \, dx \, dy = \frac{1}{\alpha} \iint N \, dx \, dy \quad \dots \qquad (5)$$

 $M_t$  は凍結の際実測できる値であるから (4)式を用いれば逆に光弾性感度  $\alpha$  を求めることも可能である。しかし図式積分を行わねばならぬため誤差が大きくなる欠点がある。

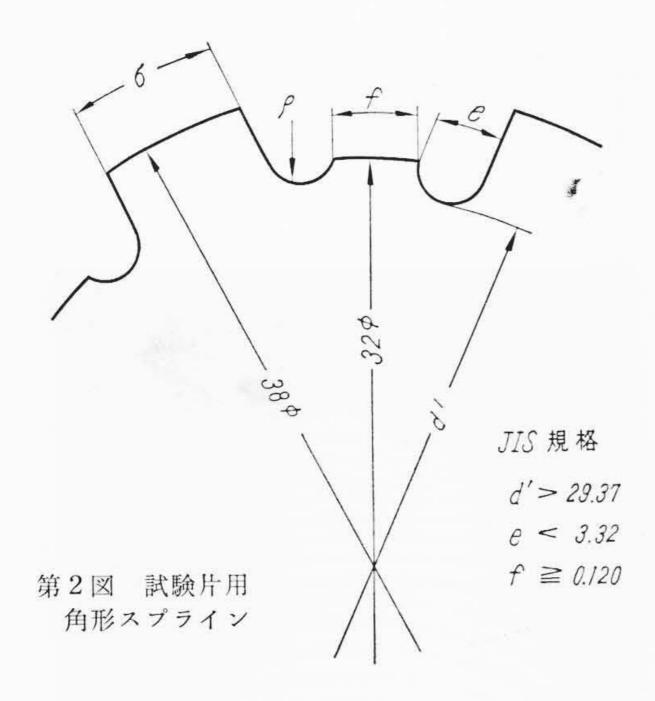
# 3. 試 験 片

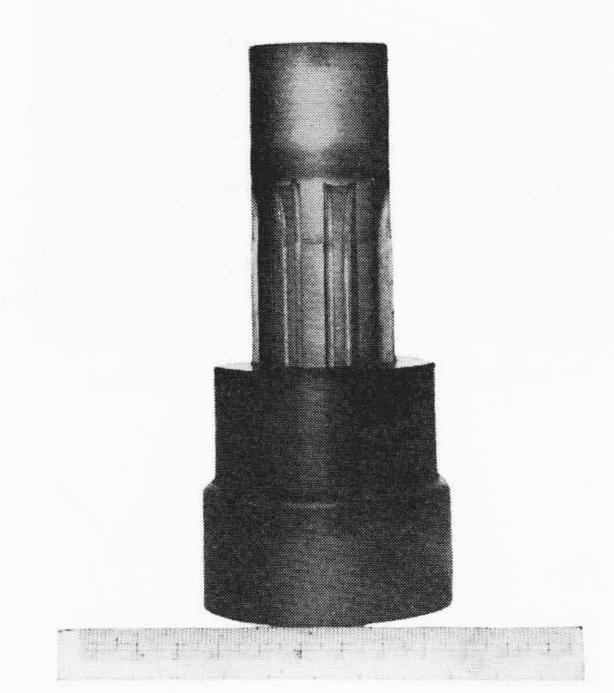
素材料はスイス Ciba 社製のアラルダイトBとハードナー901とを重量比100:20の割合に温度 $120^{\circ}$ Cのもとで混合し、40mm $\phi$ の丸棒を鋳込んで製作した。

試験片は JIS 規格のうち第2図に示すような寸法の角形スプラインを用いて歯底の曲率半径 $\rho$ を 0.5mm,1.0mm,1.5mmの三種類に変えて $\rho$ の影響を調べた。 $\rho$ =1.5mmのものは JIS 規格からわずかはずれているが,適当なカッターがなかったため用いた。また近来インボリュートスプライン軸の使用が多くなってきたので,角形スプラインと比較のためモジュール 3.75,歯数 8 枚のものの応力分布を求めた。

斜切断法では試験片に応力を凍結するが、凍結の際は試験片が高温度 ( $120^{\circ}$ C) において軟化した状態で荷重を加えるため変形が大きく、荷重前にまっすぐなスプラインは荷重後はヘリカルなスプライ

<sup>\*</sup> 日立製作所亀有工場





第3図 組合せスプライン

ンとなる。これを避けるため、次のようないわゆる変形補正法を採用した。すなわち最初スプラインの外形と全く同じ形状の丸棒をある角度だけねじった状態で凍結して、スプラインの歯を切る。これを焼鈍すればねじれが元にもどり、ヘリカルなスプライン試験片が得られる。したがってこの試験片を凍結炉中でヘリカルな歯がまっすぐになる状態までねじり荷重を加えて凍結すれば、ねじり応力が凍結されたまっすぐな試験片が得られる。

かみ合ったスプライン軸の実験には $\hat{\mathbf{x}}$ 2図と同じ断面寸法の試験 片( $\rho$ =1.0mm)とボスとをかみ合わせたものを使用した。 $\hat{\mathbf{x}}$ 3図は その試験片の写真である。この場合は試験片の加工が不可能なため変形補正法は採用できなかった。したがって凍結後は多少初めの形状とは異なった,ねじれたものとなったが,これはやむを得ない。しかし形状があまり変化しないようねじりモーメントはあまり大きくとらなかった。

光弾性感度測定は試験片をとった素材丸棒の一部から 30¢mm×4 mmの円板を切り出して行った。

凍結はすべて  $120^{\circ}$ C のもとで試験片が十分軟化したとき荷重を加え、その温度に約 $1\sim2$  時間保ったのち、1 時間で  $10^{\circ}$ C下げ、その後は毎時  $5^{\circ}$ Cの速さで下降させ炉内温度が $65^{\circ}$ Cになったとき荷重を除き、炉から試験片を取り出すようなサイクルで行った。

# 4. しま写真からせん断応力の計算

斜切断法では応力を計算するために図式微分を行わねばならな

い。微分の際できるだけ誤差を少なくするには小間隔に正確な,しま次数を求める必要がある。このためには,しまの数を多くするため大きいねじりモーメントを加えるとよいが,荷重を増すと変形量が多くなり,そのための誤差がはいるおそれがあるとともに,軸力が加わらないよう負荷にも特に注意を払う必要がある。したがって本報ではしまの数が少なくてもできるだけ小間隔に端数まで正確に求められるような解析の方法をくふうした。

すなわち、しま写真を投影機にかけて方眼紙上にトレースし、方眼紙の目を(x,z)座標と考え、 $x=x_1$ 軸と等しま次数曲線との交点の座標 zを読む。次に(x,z,N)なる立体的な座標系を作り、 $x=x_1$ 軸に沿って先に読んだ、しま次数Nとその点の座標とをプロットしてそれらを通る曲線を引く、いまこの曲線を $(N-z)x_1$ 曲線と名付ける。さらに $x_2$ 、 $x_3$ 、…軸(各軸間の距離は等間隔にする)についても同様に $(N-z)x_2$ 、 $(N-z)x_3$ …曲線を引けば (N-z) 曲線群が得られる。同様に $x_1$ ,  $x_2$ …(等間隔)についても曲線を引き(N-x)曲線群を求める。

(x, z, N) 座標系にしま次数曲面なるものを考えれば(N-z)曲線,(N-x)曲線はそれぞれ x=-定, z=-定の平面でしま次数曲面を切った切口に相当する。したがって任意の座標(xi,zj) (i,j=1,2,3,...) 上では (N-z) xi 曲線と (N-x) zj 曲線とは交差しなければならない。

しかし実際はしまには幅があるので正確なしま図を正確にトレースすることが困難なため最初から(xi, zj)の各点で(N-z)xi, (N-x)zj 曲線が交差するとは限らない。もし交わらなければ周囲の状況を考慮しながら各曲線群を少しずつ修正して各点で交わるようにすれば最も確からしい曲線群を得ることができる。この操作で境界ではしま次数は0でなければならない。

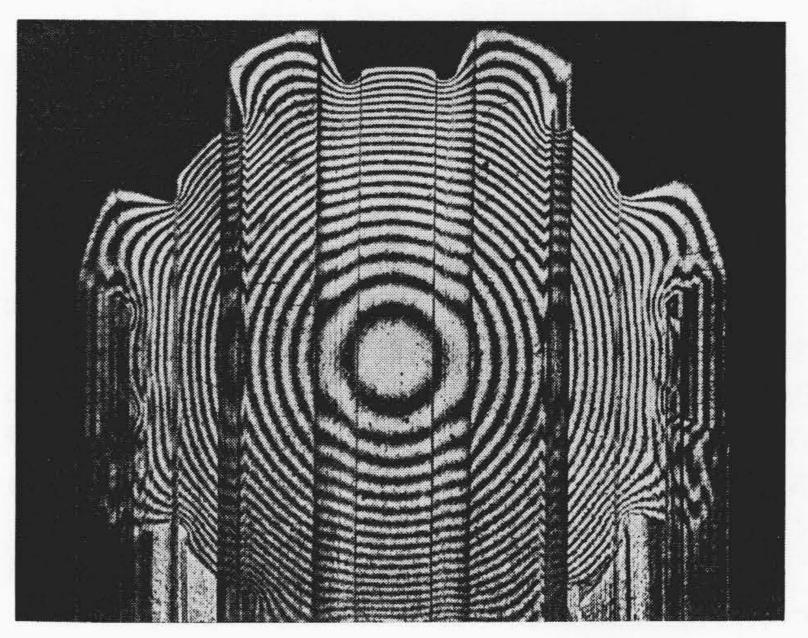
このようにすれば網の目状に各点の正確なしま次数が等間隔に得られ(N-y)x,(N-x)z曲線から階差法あるいは図式微分法によって各点のこう配 $\frac{\partial N}{\partial z}$ , $\frac{\partial N}{\partial x}$ を求めることができる。したがって合せん断応力は(4)によって求められる。

## 5. 実験と解析

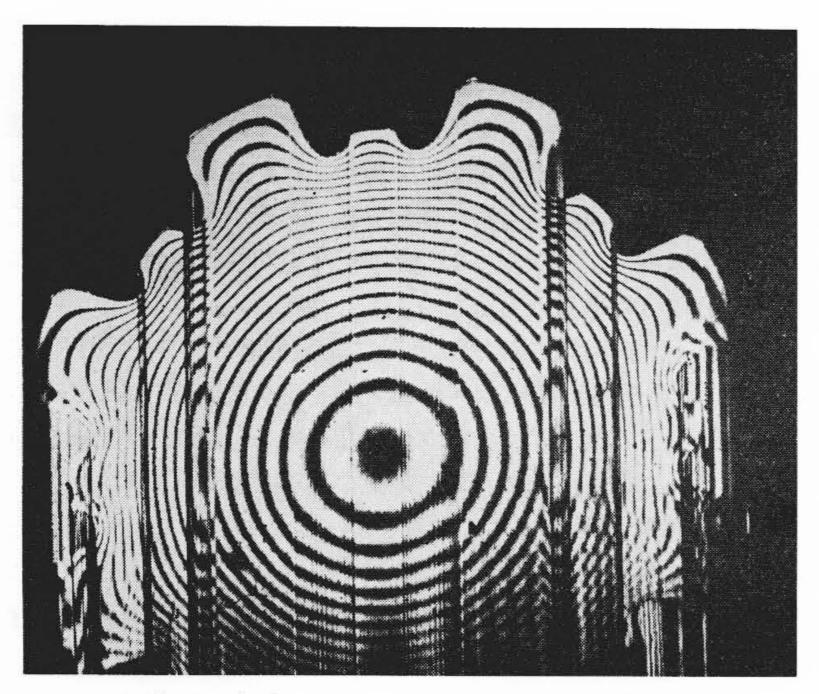
凍結された試験片はできるだけすみやかに  $45^\circ$  に切断またはスライスをして浸漬液につけて撮影した。浸漬液は  $\alpha$ -ブロムナフタリンと流動性パラフィンを適当に混合し(容量比で約1:059), 試験片の屈折率に合わせ, できるだけ試験片表面における光の反射, 屈折を少なくした。屈折率の正確な一致を期するためには, アッベの屈折計を使用した。

## 5.1 スプライン軸がボスとかみ合っていない場合

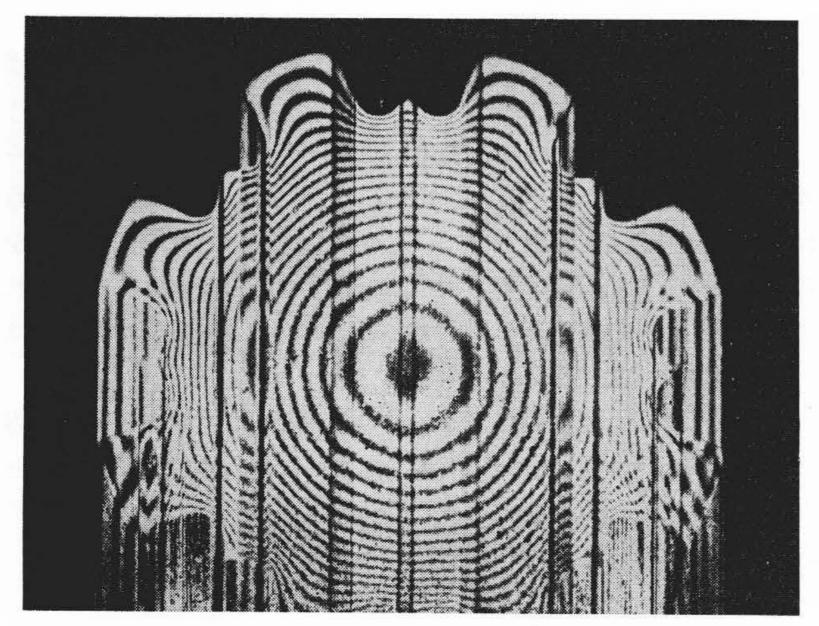
ボスがかみ合っていないスプライン軸を単にねじったときは、ね



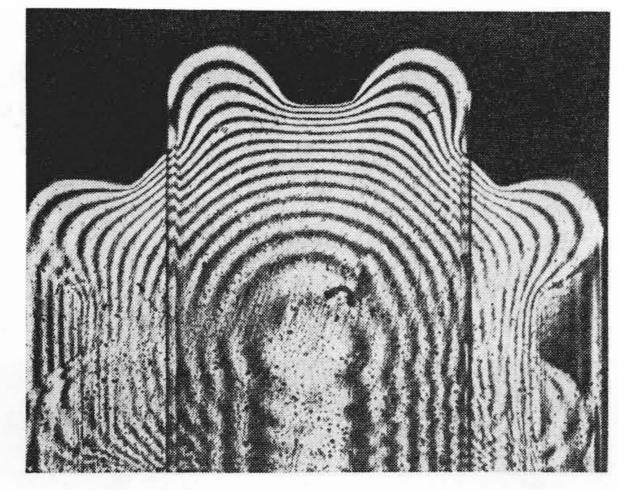
第4図(a) 角形スプライン (p=0.5 mm)



第4図(b) 角形スプライン (ρ=1.0 mm)



第4図(c) 角形スプライン (ρ=1.5 mm)



第4図(d) インボリュートスプライン

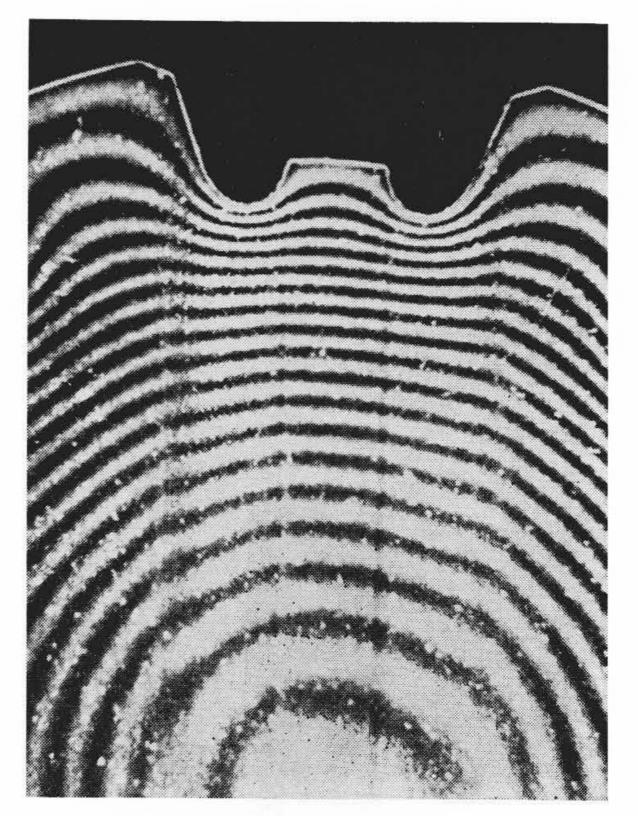
じり応力のみであるから斜切断法で測定した。

各試験片の斜切断法によるしま写真を第4図に示す。一様な断面をねじったときの応力分布は散乱光法によっても測定でき、斜切断法によるしまと全く同様のものが得られる。参考のため $\rho=1\,\mathrm{mm}$ のスプラインについて慶応大学国尾助教授が撮られた散乱光しま写真を第5図に示す。ただし散乱光法では、しまのコントラストを良くするためオレンジのフィルタを使用している。

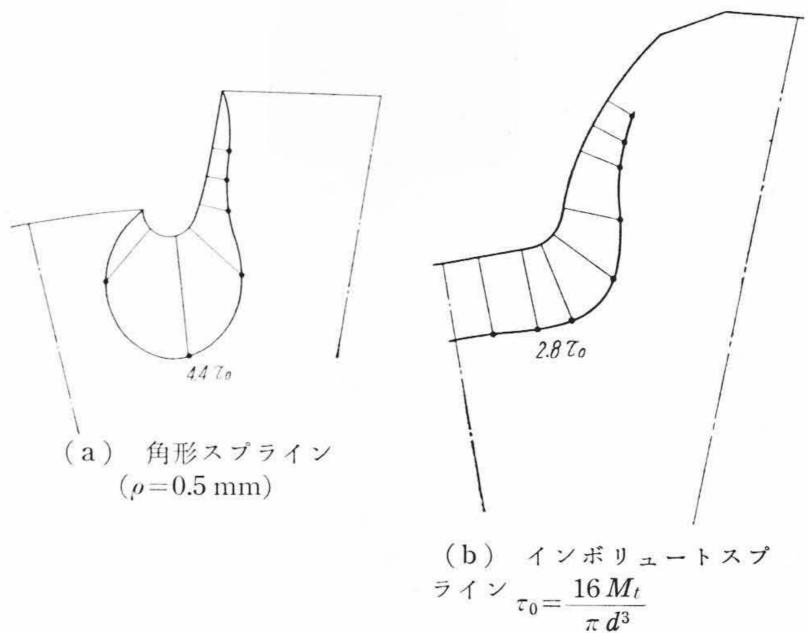
これらの写真から応力分布を計算し、スプラインと同外径の丸棒 に同じトルクを加えたときの最大せん断応力を単位として、各スプ ラインの応力集中係数を示せば第1表のようになる。そのうち切欠

第1表 応 力 集 中 係 数

角形スプライン (ρ=0.5 mm)	4.4
角形スプライン (ρ=1.0 mm)	3.4
角形スプライン (ρ=1.5 mm)	3.1
インボリュートスプライン	2.8



第5図 角形スプライン (p=1.0 mm)



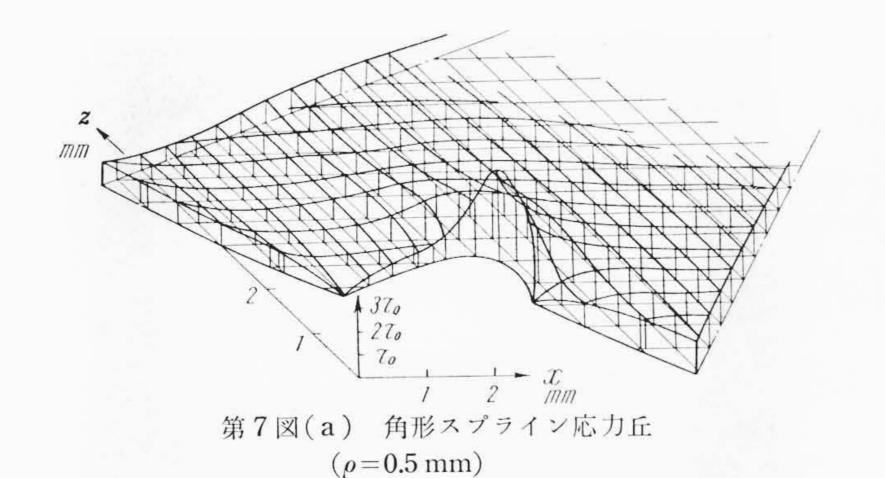
第6図 切欠周辺の応力分布

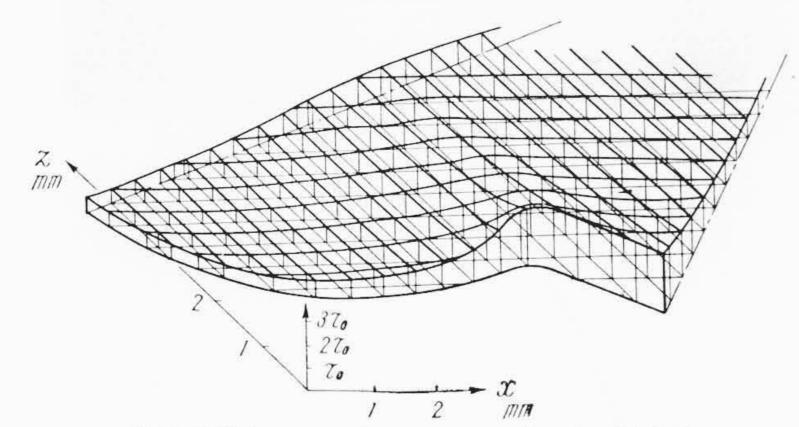
 $\pi \, d^3$   $M_t$ : ねじりモーメント d: スプラインの外径

周辺の応力分布と内部の応力丘を示せば第6,7図のようになる。これらの結果からわかるように、インボリュートスプラインは他の角形スプラインより応力集中係数が小さく、その点では有利である。東京都立大学の中沢博士は、ねじりの応力関数と電解槽内の電位との相似性を利用してスプライン軸のねじり応力分布を求めている。その中で第8図点線のような外周をもった棒をねじったときの応力集中係数を計算し、 $t/\rho=1\sim10$ 、 $\gamma_0/t\geq 2$ のときの実験式として

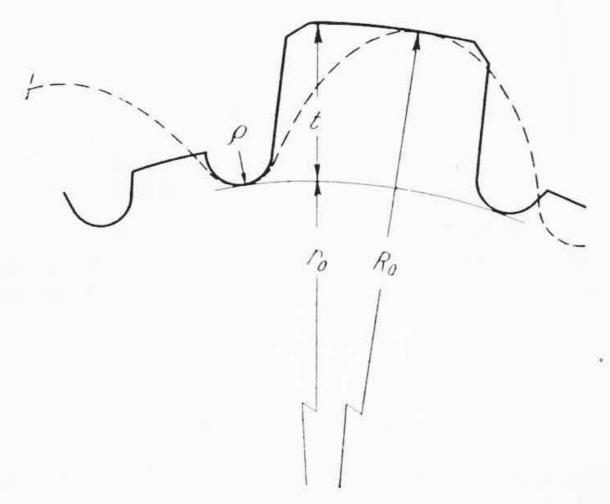
$$K = \frac{\gamma_0}{R_0} \left[ 1 + 0.170 \frac{t}{R_0} \left\{ 1 + \frac{3.94}{0.10 + t/\rho} \right\} + \frac{6.38[1 + 0.1(t/\rho)]}{\{2.48 + (\gamma_0/t)(0.04 + t/\rho)\frac{1}{3}\}^2} \right] \dots (6)$$

を作り、スプラインの応力集中係数の実験値とこの式が $-3\sim5\%$ 程度の誤差で一致することを確かめた。ただしこの応力集中係数Kは





第7図(b) インボリュートスプライン応力丘  $\tau_0 = \frac{16M_t}{\pi d^3} \qquad M_t: \ \ ねじりモーメント$ 



第8図 ねじり試験用スプラインの外周

スプライン軸と同じ外径の丸棒を同じ角度ねじったときの最大せん 断応力の比である。一方光弾性実験より得られる応力集中係数は同 じねじりモーメントを加えたときの最大せん断応力比であるから直 接比較はできない。

同氏の他の実験結果を用いてモーメントを同じにしたときの本試 験片に対する応力集中係数を求めれば

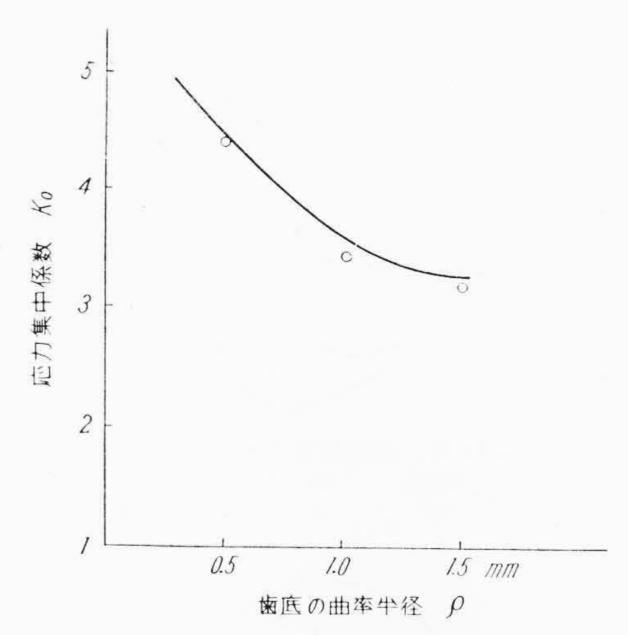
$$K_0 = \frac{K}{0.55}$$
 ......(7)

で表わされる。

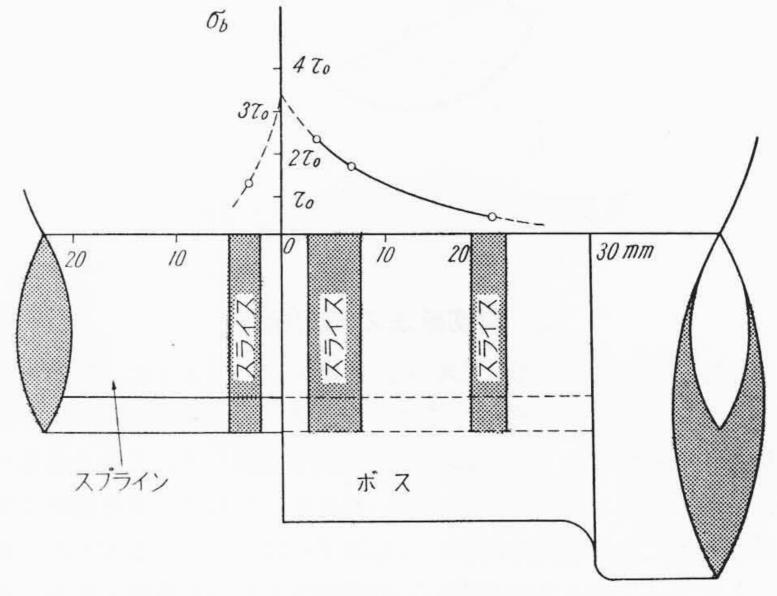
本試験片の場合切欠半径 $\rho$ とスプラインの応力集中係数 $K_0$ とのグラフを画けば第9図のようになる。同図中の点は光弾性の実験結果で、中沢博士の結果と非常によく一致することがわかる。したがって中沢博士の結果も光弾性実験による著者の結果も真の値とほぼ一致すると考えてよい。

## 5.2 かみ合ったスプライン軸の歯本応力

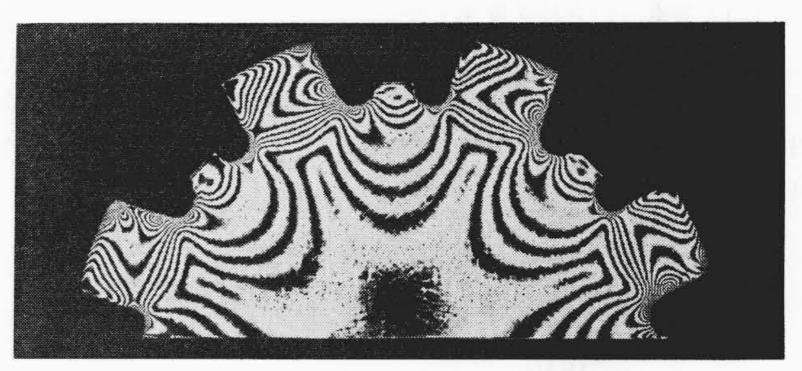
かみ合わせた軸にトルクを加えて凍結した試験片の**第10**図に示すような位置からスライスを軸に直角にとり,面に直角な方向に偏光を透過させる。しかるときはスライス面を平板と考えた見かけの平面応力のみしか光弾性効果を示さない<sup>(3)</sup>から,軸のねじり応力は現われない。しかして切欠周辺の自由境界上では一つの二次主応力



第9図 角形スプラインの応力集中係数



第 10 図 軸方向に沿っての歯の曲げ応力分布  $\tau_0 = \frac{16M_t}{\pi d^3} \qquad \begin{array}{c} M_t \colon \text{ ねじりモーメント} \\ d \colon \text{ スプラインの外径} \end{array}$ 



第11図 スライスのしま写真

は歯の曲げ応力となり、他は0となる。したがって周辺のしま次数  $N_z$  が測定できれば曲げ応力は

$$\sigma_b = \frac{N_z}{\alpha t_z} \dots (8)$$

tz: スライス厚さ

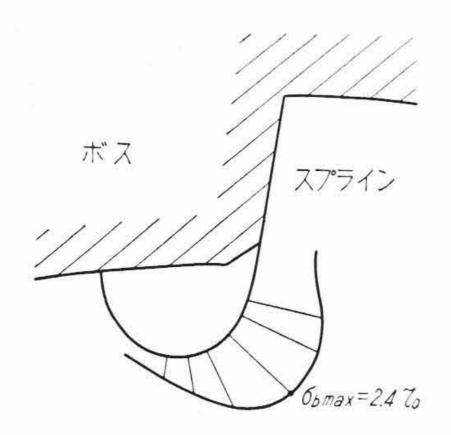
α: 光弹性感度

から簡単に求められる。

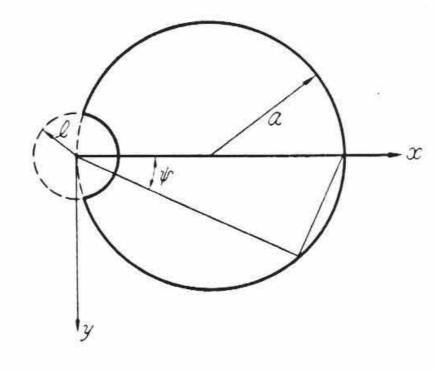
スライスのしま写真の一例を第11図に示す。

実験の結果各スライスの曲げ応力の最大値を第10図にプロットすると、ボスのかみ合い入口付近の曲げ応力が最大となり、ほぼねじり応力と匹敵する値になっており、その点から離れると急に曲げ応力が低下することがわかる。また歯底周辺の応力分布は第12図のようである。

日



第 12 図 歯底周辺の曲げ応力分布  $au_0 = rac{16M_t}{\pi d^3}$  Mt: ねじりモーメント d: スプラインの外径



第13図 半円切欠き丸棒のねじり応力

## 6. 斜切断法の測定精度

斜切断法の光弾性実験においては前にも述べたように、凍結後の 形が正しいまっすぐな形になるよう変形補正法を採用する。しかし 最後の正しい形になるまでに非常に大きく変形しているのであるか ら、そのために二次的な誤差がはいるおそれがある。また解析は図 式法で行うため解析途中においても誤差がはいってくるおそれがあ る。したがってそれらの誤差がどの程度であるかを検討しておくの は重要なことであると考える。われわれはこれら両方の誤差を総合 した、斜切断法の測定精度を確かめる実験を行った。そのためには 半円切欠をもった丸棒を使用した。

第13図のように半円切欠を有する丸棒をねじったときのねじりの応力関数はすでに Weber (4) が求めているからその応力関数を用い、ねじりモーメント Mt でねじったときの切欠周辺の応力分布を計算すると

$$\tau = \frac{\left(1 - \frac{b}{2a}\right)\pi\tau_{0}}{\left\{\left(1 - \frac{b^{2}}{a^{2}} - \frac{b^{4}}{2a^{4}}\right)\cos^{-1}\frac{b}{2a} + \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{b^{2}}{4a^{2}}\left(\frac{7}{4}\frac{b^{2}}{a^{2}} + \frac{1}{2}\right)}\right\}}$$

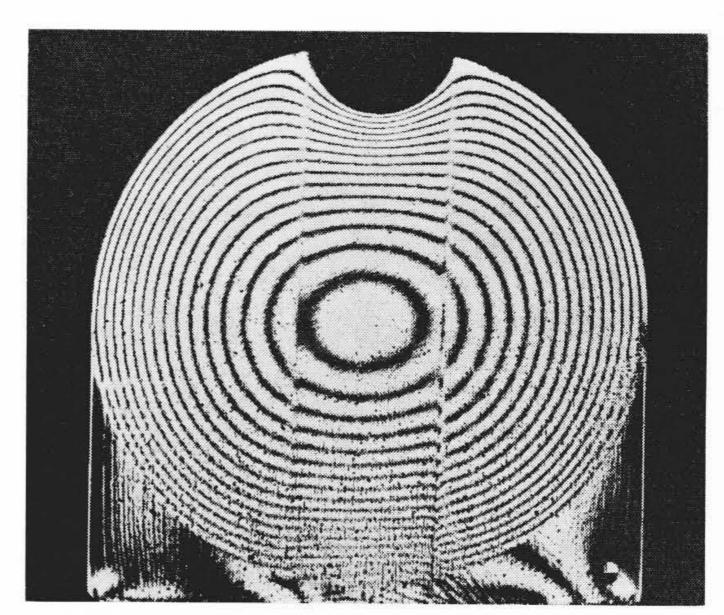
$$\tau_{0} = \frac{16Mt}{\pi a^{3}} \dots (9)$$

となる。

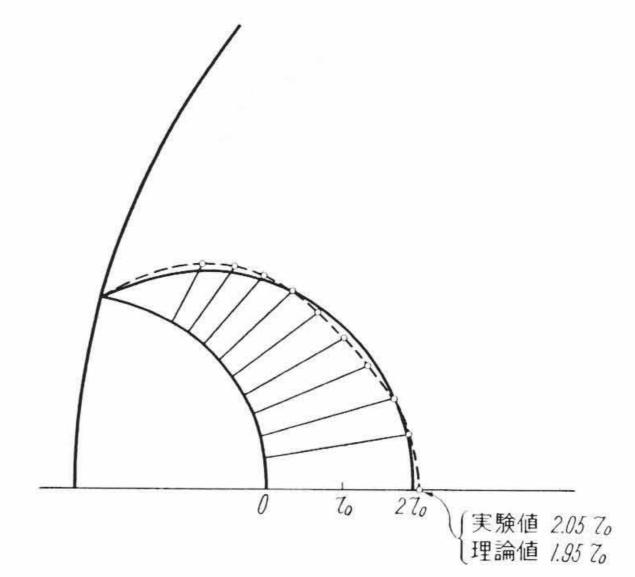
試験片には角形スプライン軸の外径と同じ外径をもった丸棒に 5 mmの半径を有する半円切欠をつけたものを用いた。第14 図 に そのしま写真を示す。

角形スプラインの場合と全く同様の方法で切欠縁の応力分布を求めた結果と、式の計算結果を**第15**図に示す。

この図からわかるように実験値と理論値はかなりよく一致し最大 応力部分で5%程度の誤差である。また同じ直径の丸棒に3mmの 半周切欠をつけた実験結果もやっぱり最大応力付近で5%以内の誤 差で一致した。したがって、この程度の測定で実用上十分な精度が 得られることがわかった。



第14図 半円切欠丸棒のしま写真



## 7. 結 言

一様断面のスプライン軸にトルクを加えたときの応力分布を斜切 断法で測定した結果,実用上十分な測定精度で得られることがわかった。その結果は中沢博士の結果ともよく一致した。

斜切断法の総合的な測定精度を検討したところ,最大応力部付近では5%以内の精度が得られることがわかった。インヴォリュートスプラインは角形スプラインに比較してねじり応力の集中係数が低く有利である。スプラインがかみ合った状態で作動していると歯本の曲げ応力は,ねじり応力の最大値程度になっており,かみ合った状態で作動している以上はこの曲げ応力も考慮して強度を決めるべきことがわかった。

本研究の遂行にあたり終始ご指導を賜わった慶応大学工学部国尾助教授,実験や解析に協力された千葉工業大学学生五味氏,坂本氏に厚くお礼申しあげる。また本研究に協力された当工場の関係者に感謝の意を表する。

# 参 考 文 献

- (1) 中沢 一: 機械学会論文集 6, 1951
- (2) 西田正孝: Proc. of 7th Japan National Congress for Applied Mechanics 1957
- (3) 応力測定技術研究会編: 応力測定法
- (4) Timoshenko: Theory of Elasticity 1951 p. 268