

タービン車軸の危険速度に関する模型実験

An Experiment on the Critical Speeds of Turbine Model Rotor Shaft

小 堀 与 一*
Yoichi Kobori

内 容 梗 概

3個の軸受で支持された高低圧相当2個のロータよりなるタービン車軸の危険速度に関し、実物と近似させた模型について実験を行ない、計算結果と比較した。(1)1次の危険速度の実験値は Prohl の方法による計算値とほぼ一致する。計算値は実験値より約 2.8% 高くなるが、これは計算において車盤削り出し部分の軸の剛性上昇を無視した結果によると推定される。(2)2次の危険速度の実験値は計算値より約 7.5% 低くなる。これは軸受系が2次振動に対し、完全な単純支持条件を与えるだけの剛性を有しなかったからであると解釈される。(3)軸受支持をたわみやすくすると1次の危険速度は、たわみやすすくない場合の値を境にして二つに分かれる。2次の危険速度はたわみやすすくない場合の値と同等か、それより数%低い範囲に現われる。(4)軸受の共振が軸受のたわみ性、質量に関係して、いろいろな速度に現われる。この値は1次、2次については計算とほぼ一致する。

1. 緒 言

最近のタービン発電機で出力が 35,000~156,000 kW クラスのものは第1図に示すように、タービン側が3軸受系、発電機側が2軸受系で計5軸受系をなしているものが多い。しかしタービン発電機ロータの据付に際しては、タービンと発電機のカップリングがリジッドでも、この部分で軸の曲げモーメントが零になるよう軸系の軸受レベルのアライメントを行なうので、タービン側軸系としては発電機側カップリング部分が自由端としての条件を与えるとみなす。このように静的にはこのカップリング部分が自由端、すなわち、発電機はタービン側軸系のたわみ振動を拘束しないようにした条件が実際運転中でも成立つかどうか多少疑問があるが、近似的にはすべての速度のたわみ振動でこの条件が成立つものとして議論しよう。そこでタービン車軸は第2図のように3軸受系になり、実験、計算ともかなり簡単になる。本研究はかかる3軸受系のロータの危険速度が実際にどのようなになっているか、危険速度の値は計算値とどの程度一致するものか、また計算では軸受剛性は無限大としてあるが、これがたわみ性を有するときはどうなるかを調べ、タービンロータの設計資料とする目的で行なったものである。

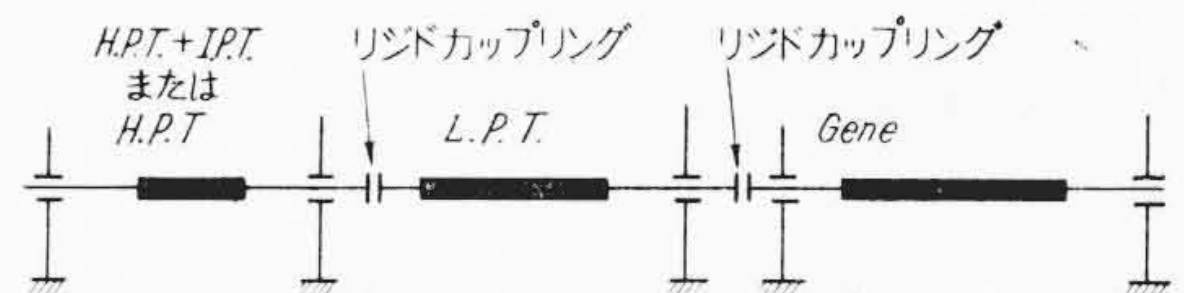
2 危険速度の計算

2.1 車軸の寸法構造

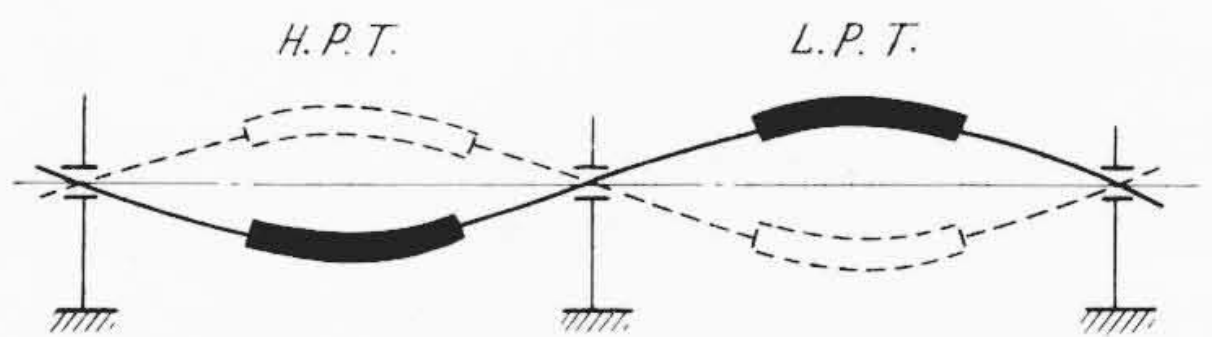
第3図に本実験に供した3軸受車軸の外観を、第4図(a)に構造および寸法を示す。このタービン車軸模型は出力 70,000~100,000 kW の蒸気タービンに幾何学的に近似せしめてあり、軸長は実物の約 1/4.5 になっている。ただし軸直径および車盤の寸法は、危険速度が実物よりやや高くなるよう定めてある(概算上約 3,900rpm)。この理由は、模型の危険速度を実物と同様 3,300 rpm 付近にとると(60 c/s マシンとして)、軸直径が細くなりすぎ、模型製作上の困難と、実験に際し危険速度通過時車軸を折損してしまうおそれがあることを考慮したことによる。

第4図(a)で H. P. 側と L. P. 側はリジッドカップリングにより一体となっており3点で支持され、3軸受車軸をなしている。軸受は長さがジャーナル直径の約 1.4 倍の平軸受であるが、図のように球面座になっているから、軸の動きに対しては単純支持の条件を与えているとみなされる。車軸の前後部軸受距離は約 1.5 m、自重は約 77 kg で、バランスは一般回転機ロータと同様にとってある。

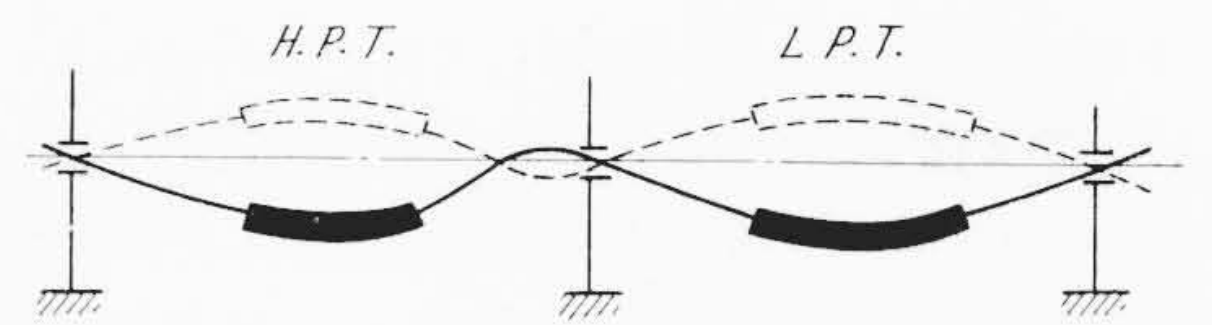
* 日立製作所日立研究所



第1図 最近の 35,000~156,000 kW タービン発電機軸系



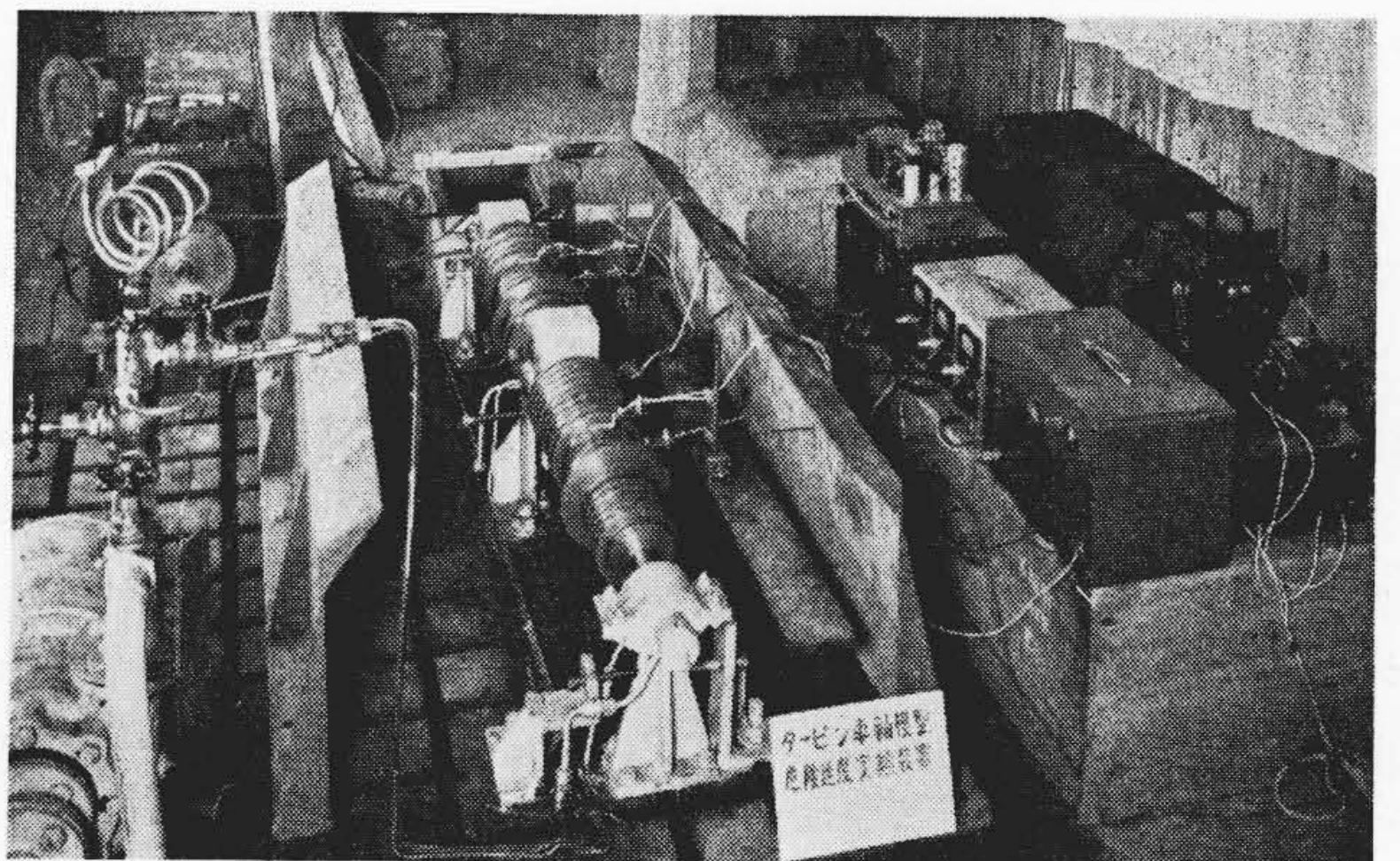
(a) 低い危険速度 (1次)



(b) 高い危険速度 (2次)

第1図の Gene のカップリングはタービン側に拘束を与えることがないようにアライメントされるので、タービン側軸系は図のような3軸受系になると考えられている。

第2図 3軸受車軸の危険速度とたわみ形態

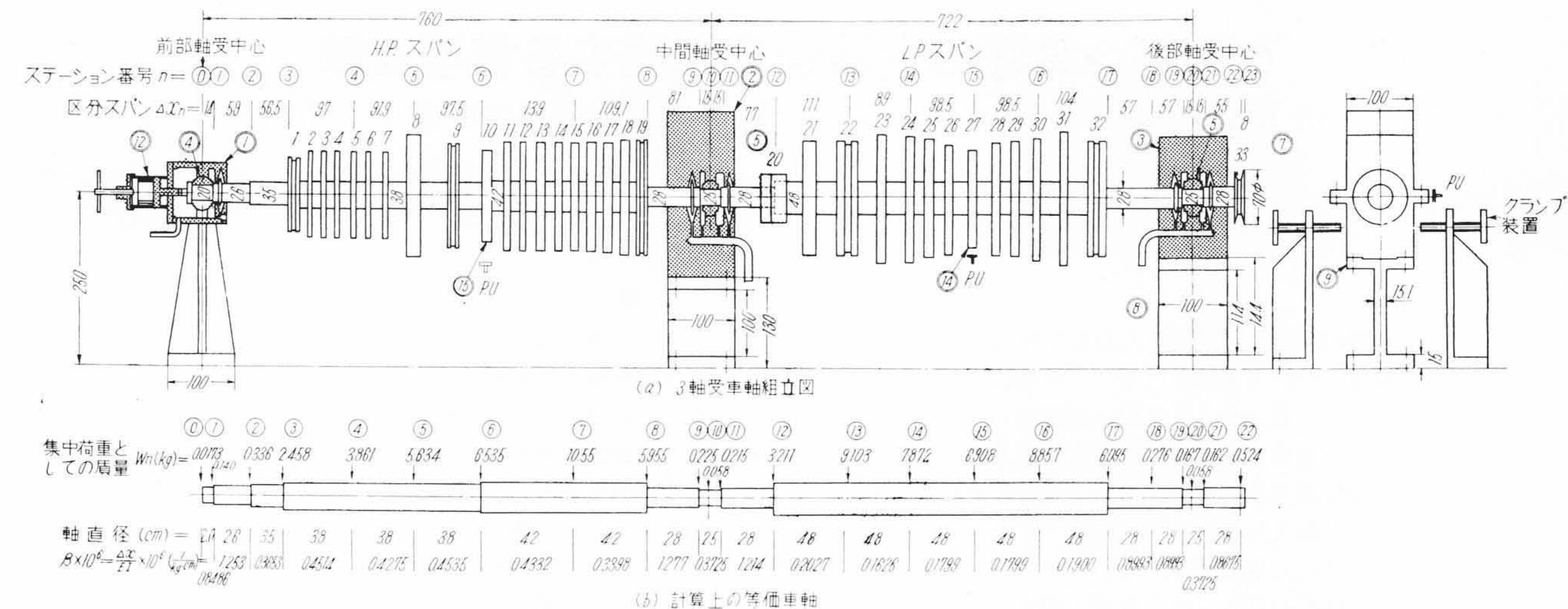


前方 H. P., 後方 L. P. 側, 駆動は L. P. 側軸受外側より 1:3 直径比のプーリで 7.5 HP DC モータによるゴム製 V ベルト駆動である。速度制御は水抵抗、ベルトのバタツキは起らないようにしてある。

第3図 模型車軸外観

2.2 危険速度の計算

計算は M. A. Prohl の方法⁽¹⁾⁽²⁾によった。この計算法によれば従来の方法⁽³⁾と異なり、仮定条件(実際のロータの質量と軸を計算に



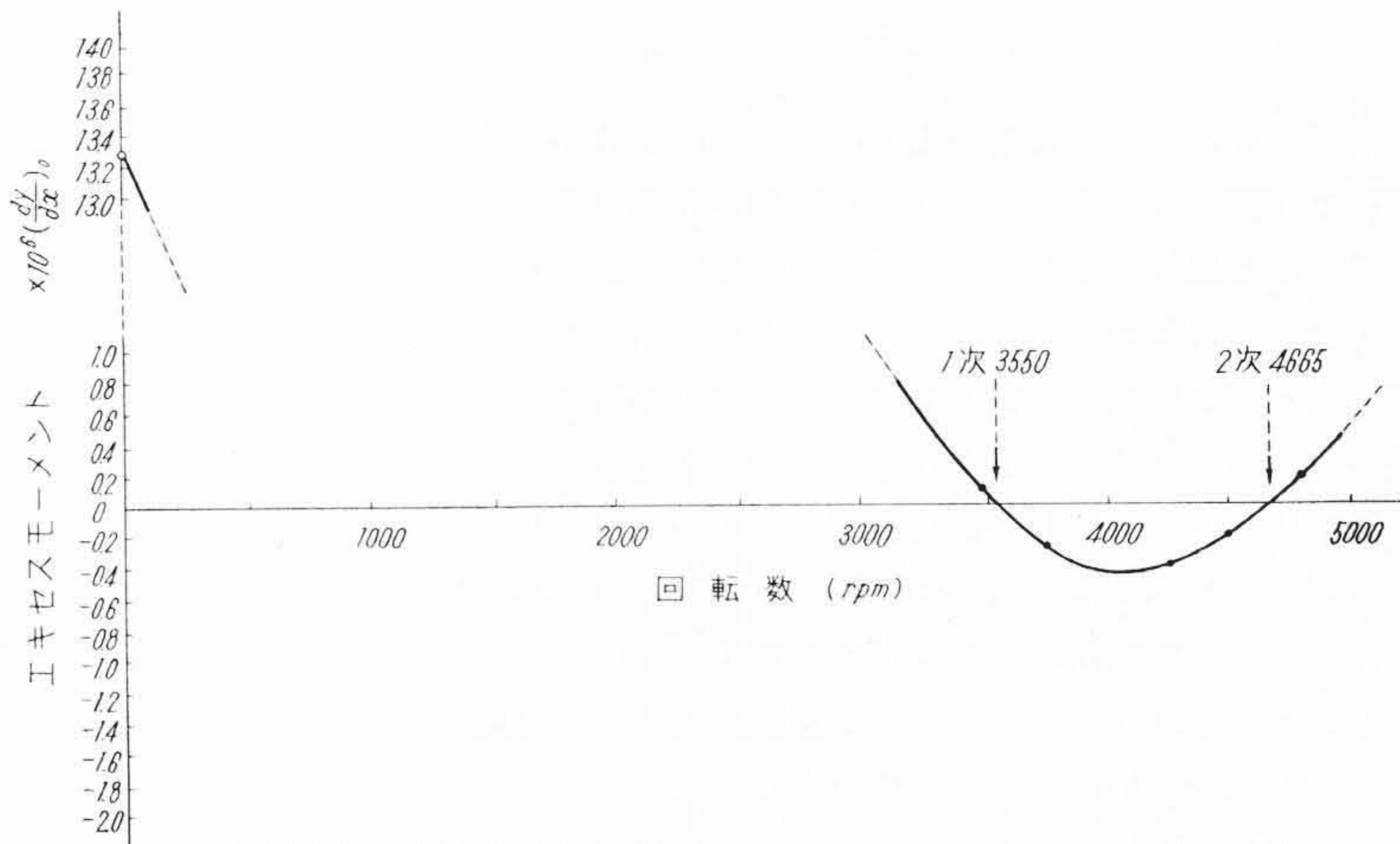
前部軸受は固定，中間および後部軸受は上下には固定，左右にはクランプ装置により，固定または自由となる。

第4図 3軸受車軸ならびにそれに等価な車軸

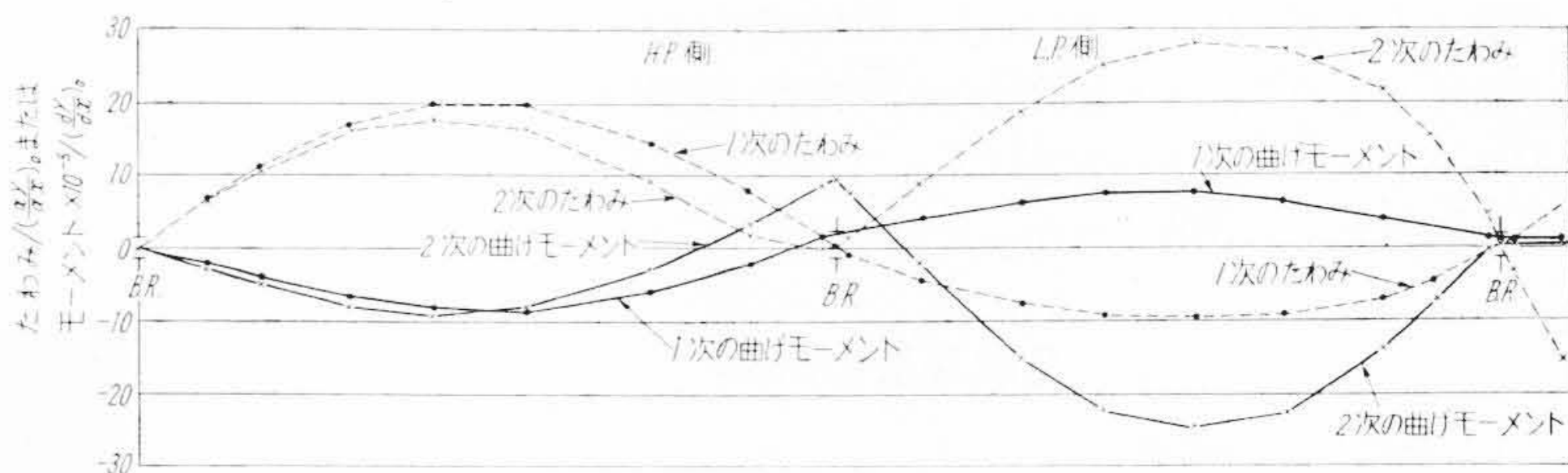
便利なように，各軸受スパンごとに振動的に等価なように集中質量と均一断面軸に置換するためいろいろな条件を仮定する）が少なく，1次より高次の危険速度にいたるまで正しく数値計算を行なって求められる。

さてこの計算を直接第4図(a)のロータについて行なうことは煩雑なので第4図(b)のような車盤のない軸に適当に区分した小スパン ΔX (○印番号の間の長さ)の端に集中荷重が加わったものに置き換える。小スパンは軸径の変化するごとに区分し，小スパン間の荷重は集中荷重として各ステーション(小スパンの境界)に加わるとし，その大きさは各スパン ΔX 間の軸の質量と車盤の質量とを，その各ステーションに配分して加え合わせれば求められる。第4図(a)に示す33個の車盤の質量および22個の小スパンにある軸の質量を①から②②にいたる23のステーションに集中荷重として配分した結果ならびに小スパンの軸直径と長さおよび材料のヤング率 ($E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$) で定まる軸のたわみの係数 ($\beta = \Delta X / EI$) を付録第1表に示す。この表が与えられれば，試しの回転速度を仮定して(この速度は予想危険速度付近にとるのが普通である)，左軸端より逐次右軸端にいたる軸の曲げモーメントおよびたわみについて計算を進めることができる。

軸の回転が危険速度状態にあるときは，軸端すなわちステーション0(左軸受中心)とステーション22(プーリ中心)で曲げモーメントは零になるが，危険速度でない回転数では零になることはない。計算上左端は最初から曲げモーメントは零と仮定しているので，右端(ステーション22)では曲げモーメントは一般に零でないある値をとる(これをステーション22におけるエキセスモーメントという)。エキセスモーメントの計算をステーション22において零になるようにいろいろな回転速度で試みて，危険速度を定めるのが Prohl の計算方式である。本研究では1次と2次の危険速度を求めるため6回の計算を行なっている。試行回転速度 0, 3,500, 3,750, 4,250, 4,500, 4,800 rpm のうちの4,500 rpm に対する計算経過を付録第2.1~2.4表に示す。計算結果を第5図に示す。図よりエキセスモーメントが零になる回転数として3,550 rpm および4,665 rpm が得られ，これはそれぞれ1次および2次の危険速度を与える。危険速度付近における軸のたわみとモーメントの分布を計算した結果を第6図に示す。図より危



第5図 3軸受車軸に対するエキセスモーメントと仮想速度



(1次および2次危険速度をそれぞれ3,500 rpm および4,665 rpm として計算)

第6図 危険速度における軸のたわみと曲げモーメント

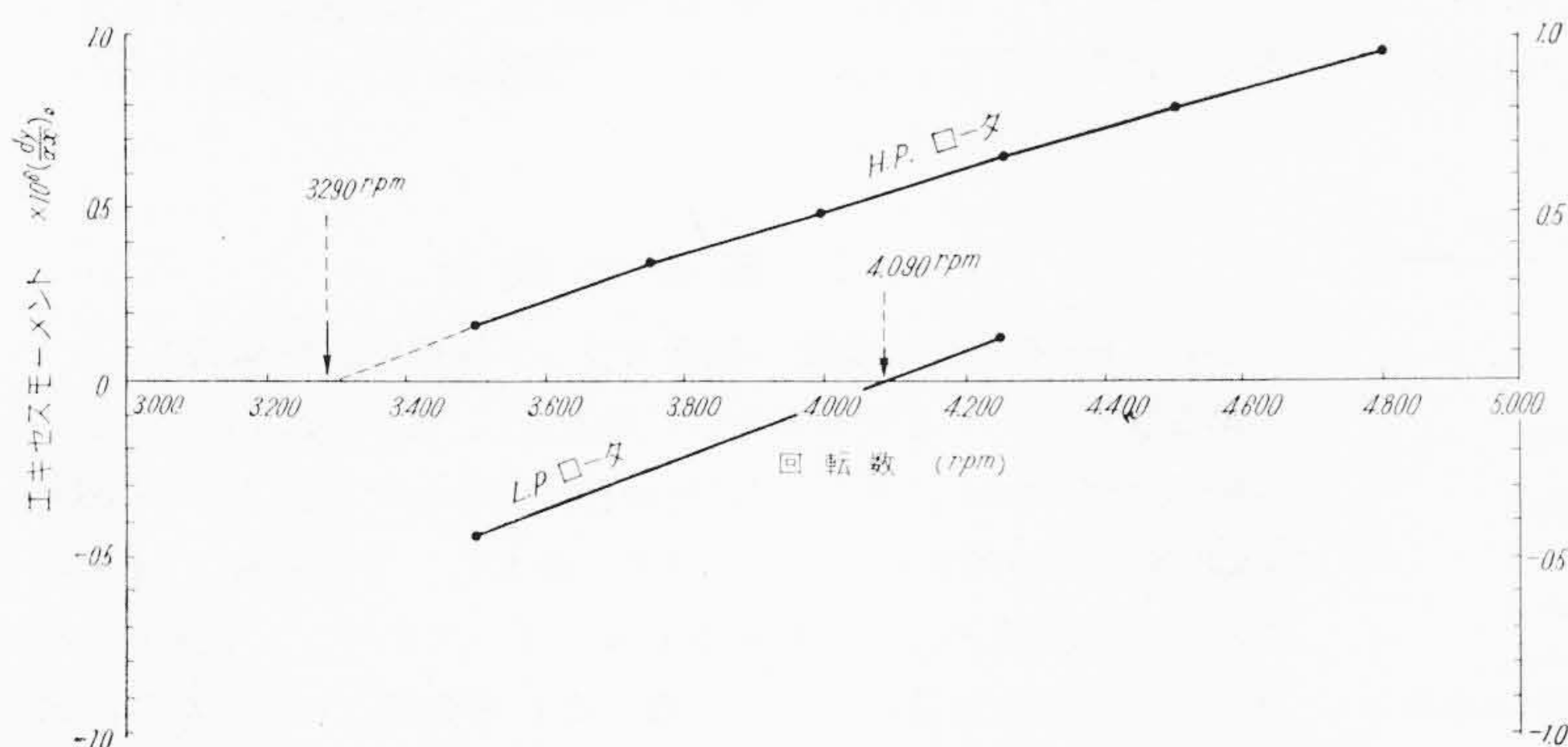
険速度におけるたわみは予想どおり，1次ではL.P.とH.P.とで位相が180度異なり，2次では同位相になっていることがわかる。なお比較のためL.P.側のみ2軸受としたときの危険速度と，H.P.側のみ2軸受としたときの危険速度を前記同様エキセスモーメントを計算して求めた結果を第7図に示す。以上の計算結果をまとめて第1表に示す。

3. 実験装置および方法

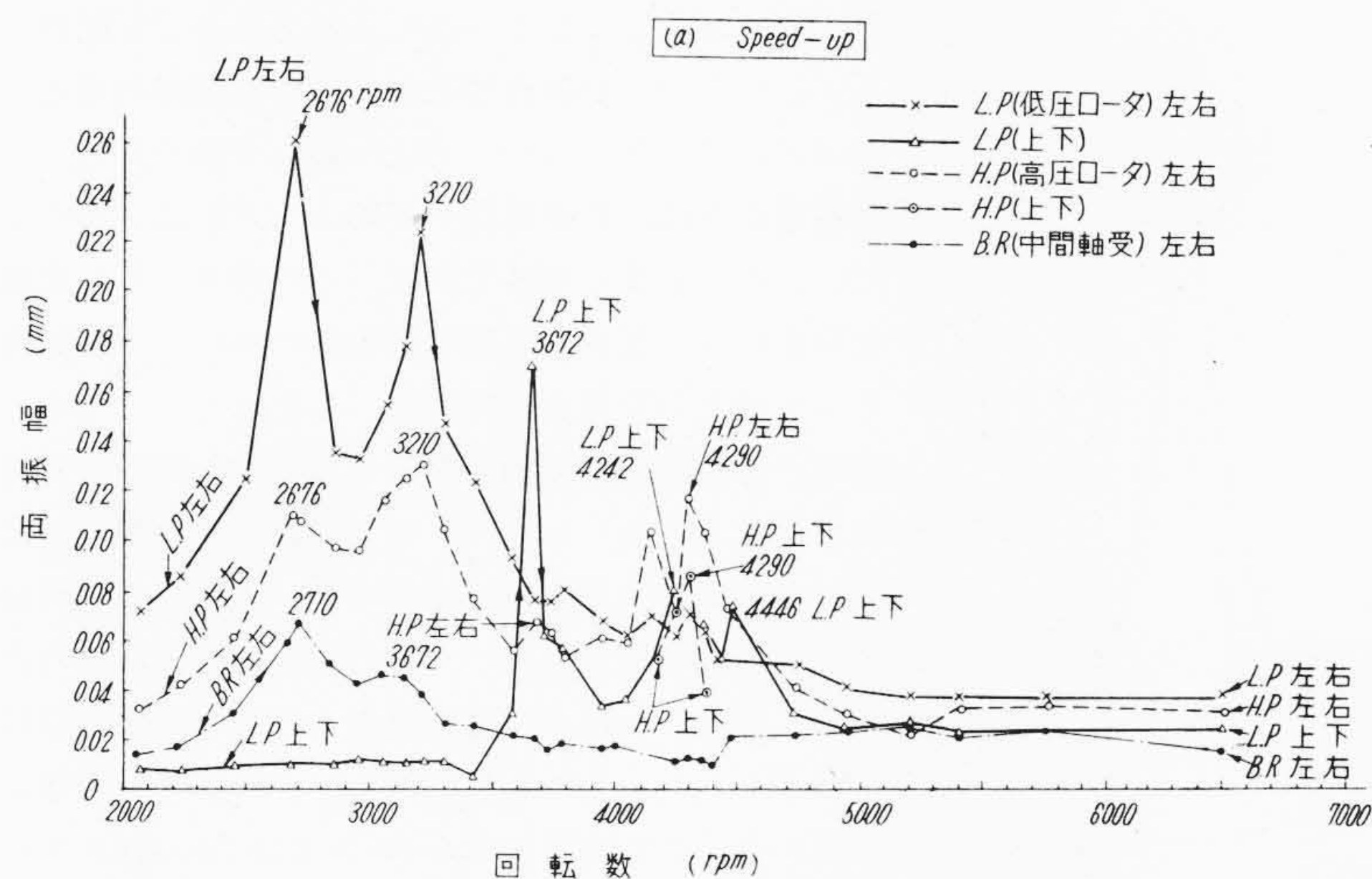
H.P. およびL.P. ロータの中央にある車盤(第4図のNo. 10とNo. 27の車盤)の上下，水平両方向ならびに中間軸受水平方向の振動に対して，第3図のように総計5個の容量形振動計極板を接近して設置し，増速および減速時の各部の振れを水晶発振器回路の陽極電流の脈動とし，これを電磁オシログラフにより記録した。危険速

第1表 危険速度計算結果 (rpm)

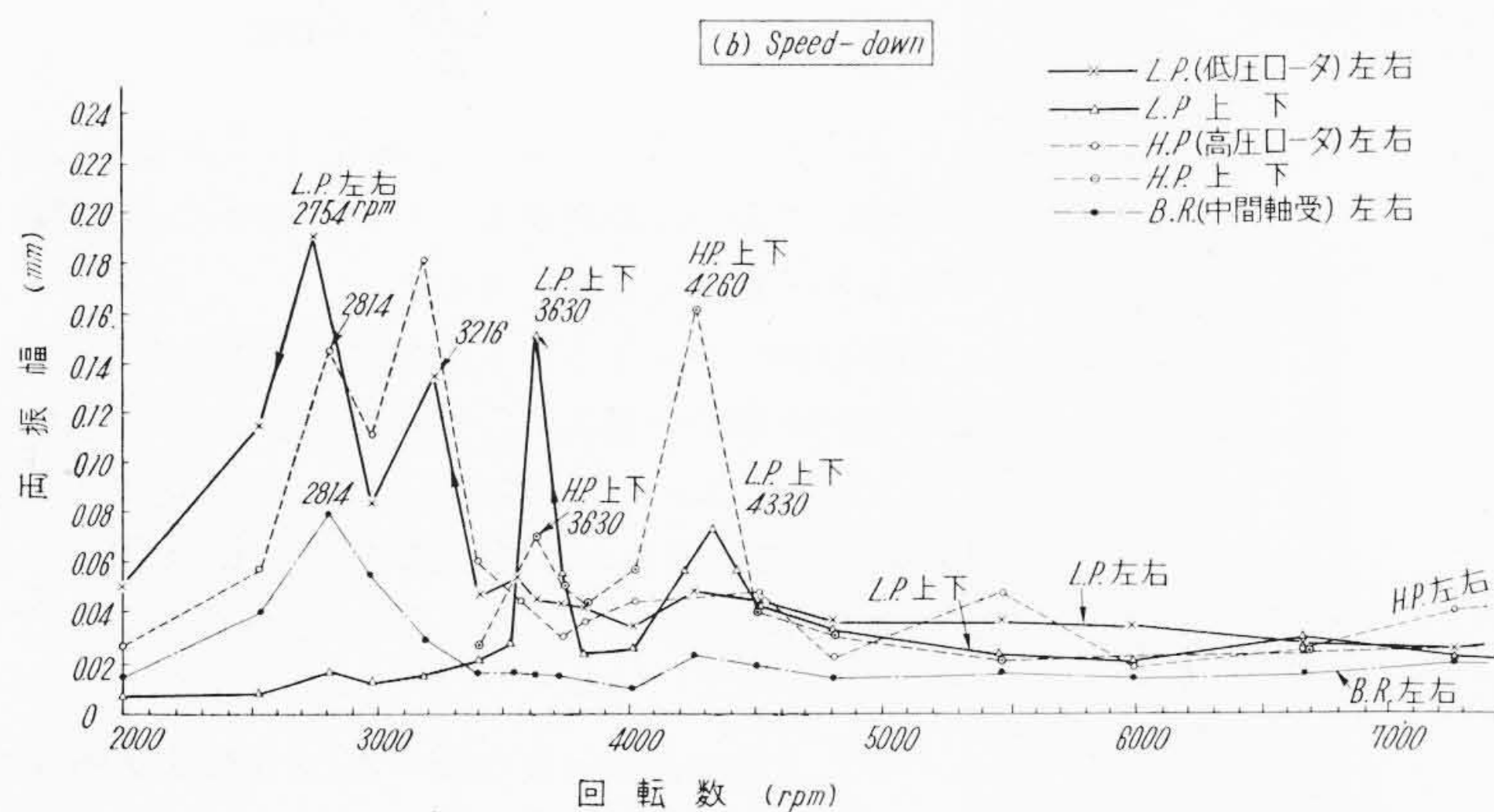
3軸受としての危険速度	1 次 3,550, 2 次 4,665
2軸受としての危険速度	H.P.側 3,290, L.P.側 4,090



第7図 H.P. および L.P. ロータに対する仮想回転数とエキシテシメント (・印は計算値)



第8図 (a) 軸受を固定した場合のロータおよび中間軸受の振動 (速度上昇)



第8図 (b) 軸受を固定した場合のロータおよび中間軸受の振動 (速度下降)

度はオシログラムにおいて振幅最大となる場合の回転数をもって定めた。振幅の較正は各回転数における各部の振れを直接手持振動計で測定し、これと電磁オシログラムによるオシログラムとを比較することにより行なった。

ロータの駆動は DC-7.5 HP モータ (定格 110 V, 3,000 rpm), 水抵抗器および 1:3 の直径比のベルト車により行なった。軸受給油

圧は運転中常時 1.4kg/cm^2 に保ったが、給油温度は不明である。給油ポンプはベースに防振ゴムを介し、ポンプより生ずる有害な振動がロータに影響しないよう注意した。第4図で3個の軸受のうち前部(左)軸受は比較的剛性高く(実験中これは変化させない)、中間と後部(右)軸受は付属のクランプ装置により剛性を2様に変化できるようにしてある。これは実際のタービン軸系に近似せしめた結果で、軸受の剛性が危険速度にどう影響するかを調べることも本研究の目的の一つだったからである。

4. 実験結果

第3図の3軸受ロータを 1,000 rpm より 8,000 rpm まで水抵抗器をしゅう動して回転速度を上昇せしめた場合および 8,000 rpm より回転速度を自然に減速せしめた場合(上昇には約2分, 下降には約3分を要した)のロータの中央, 上下, 左右方向および中間軸受左右方向の振れを第8図(a), (b)および第9図(a), (b)に示す。

まず中軸受および左軸受の軸受クランプ装置を固定した場合を調べる。第8図(a)の増速時は最初 2,676 rpm で L.P., H.P., B.R. 左右とも振幅が大きい。また 3,210 rpm でも振幅が大きくなっている。これに対し, 第8図(b)の減速時はこれらがそれぞれ 2,754 ~ 2,814 rpm, および 3,186 ~ 3,216 rpm となっている。この振動は軸受が左右方向に弾性支持になっているための軸受の共振で, 真のロータの危険速度ではない。このように軸受がロータにより加振されて生ずる共振の振動数(これを軸受の共振速度と名づけ, ロータの危険速度と区別することにする)は, 各部多少バラツキがあるので算術平均をとり

軸受1次 共振速度: 2,740 rpm

軸受2次 共振速度: 3,210 rpm

とする。つぎは第8図(a), (b)より, L.P. 上下がピークになるのは 3,672 rpm および 3,630 rpm であることがわかる。これは B.R. の振れがピークにならないところから, 計算の危険速度に対応するロータの1次の危険速度と考えてよい。この平均値は 3,650 rpm となる。つぎは 4,300 rpm 付近のピークであるが, これは2次危険速度とみられ, 平均をとると 4,310 rpm となる。

つぎに中軸受および左軸受のクランプ装置のボルトを自由にした場合の第9図(a), (b)を調べる。軸受の左右方向の剛性が著しく減じたから, 軸受共振速度ならびに左右方向ロータ危険速度は常識的には, すべてクランプ装置のボルトを締め付けた場合より低下すると考えられるが, 実際は予想どおりにならない。前記同様にして

軸受1次共振速度: 1,500 rpm

軸受2次共振速度: 2,210 rpm

となることがわかる。ロータの危険速度は現われ方が複雑である。1次では L.P. ロータ上下の振れが大きく, 次が L.P. の左右である。これと同時に H.P. が大きく振れるはずであるのにこれは比較的小さい。そこで L.P. の振れの最大のときの回転速度をもって危険速度とする。

ロータ1次危険速度: 3,400 rpm (上下), (振幅は L.P. 上下が大, H.P. のピークは低い)。および 3,720 rpm (左右),

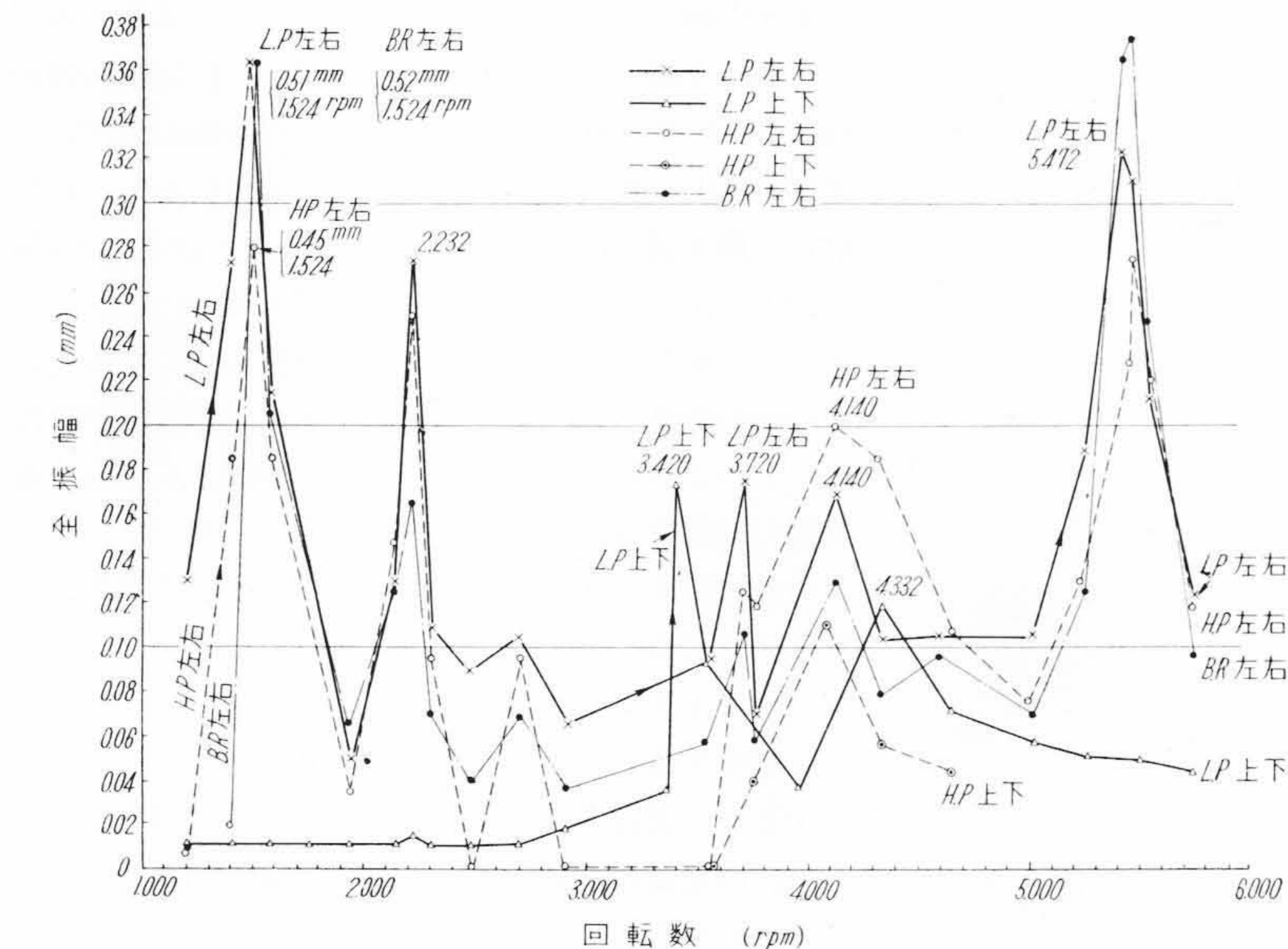
(振幅は L. P. 左右が大, H. P. のピークは低い)。

つぎにロータ 2 次危険速度では H. P., L. P. とも振幅が大になるが, 必ずしも同時に等しい振動数でピークが生じないという特長がある。

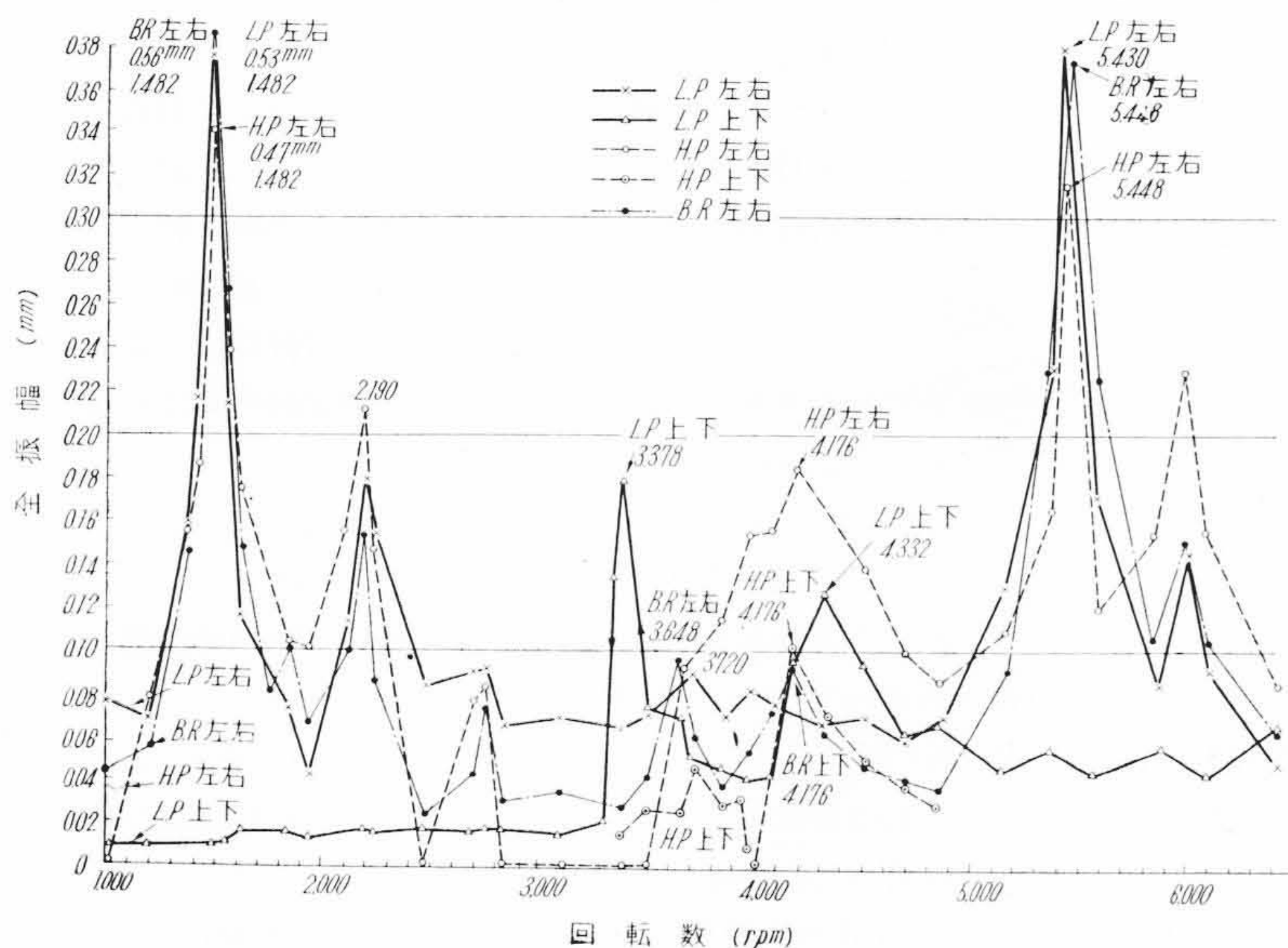
ロータ 2 次危険速度: 4,176 および 4,332 rpm (上下), (H. P. 上下の振動数が低く, L. P. 上下が高い) および 4,160 rpm

軸 ク ラ ン プ 受 ブ	軸受共振速度			ロータ危険速度		備 考
	1次	2次	3次	1 次	2 次	
固定	2,740	3,210	不明	3,650	4,310	危険速度計算値 1次3,550, 2次 4,665
自由	1,500	2,210	5,470	{ 3,400 3,720	{ 4,176 4,332 4,160	危険速度は L. P. 上下のピーク時の回転数
						危険速度は L. P. 左右のピーク時の回転数
						危険速度は H. P. 上下のピーク時の回転数
						危険速度は L. P. 上下のピーク時の回転数
						危険速度は H. P., L. P. 左右のピーク時の回転数

備考: 軸受共振速度 5,470 の振動数は 1,500/60=25c/s で速度と振動数は異なっている。他はいずれの速度も振動数と一致している。



第 9 図 (a) 軸受を自由にした場合のロータおよび中間軸受の振動 (速度上昇)



第 9 図 (b) 軸受を自由にした場合のロータおよび中間軸受の振動(速度下降)

(左右), (H. P., L. P. 同時に振幅大となる)。

なお第 9 図 (a), (b) において約 5,470 rpm でロータ, B. R. とも振幅がきわめて大になっている。これは B. R. の 3 次の共振速度とみなされる。これらの結果を表示すると第 2 表のようになる。

以上のように実験結果の整理の関係上, 共振速度, 危険速度など推定を加えて分類したが, これらが実際はどういう性質のものかについては次節に論ずる。

5. 結果の検討

5.1 ロータの危険速度 (軸受クランプを固定した場合)

第 2 表においてまずロータの危険速度について検討する。1 次は実験値 3,650 rpm に対して, 計算値は 3,550 rpm であるから 3,650-3 550/3,550=0.028 となり, 計算値を基準にして実験値は 2.8% 高くなるが, 計算値とほぼ一致するとみてよいであろう。実験値がやや高くなったのは計算において, 削り出し車盤部における軸の直径を車盤がない部分の直径と等しくしたからであろう。計算上車盤部分の軸直径として車盤の直径をそのまま採用することはもちろん不可で

あるが, これを車盤がない部分の直径に等しいとすると軸を細く計算してしまうから不可であること明白である。しかればこの軸直径に対し適当な直径の補正をどれほどにすべきかについては一般に不明である。本実験結果からは, 危険速度が実験上 2.8% 高くなりすぎたということより判断すれば, この種タービン車軸では車盤のない部分の直径を振動数において 2.8% 高くとして前記の計算をすればよいことになる。すなわち車軸の振動数を近似的に質量のない均一な単純支持の軸に荷重が分布したものと考え, 振動数は軸の断面 2 次モーメントの平方根に比例する。すなわち, 直径の 2 乗に比例するとみなし, 軸の車盤のない部分の直径を D とし, これに車盤部の剛性上昇を考慮した直径を $D+\Delta D$ とし, それぞれに対し, これまでと同様にして求めたときの危険速度を f_D および $f_{D+\Delta D}$ とすれば近似的に

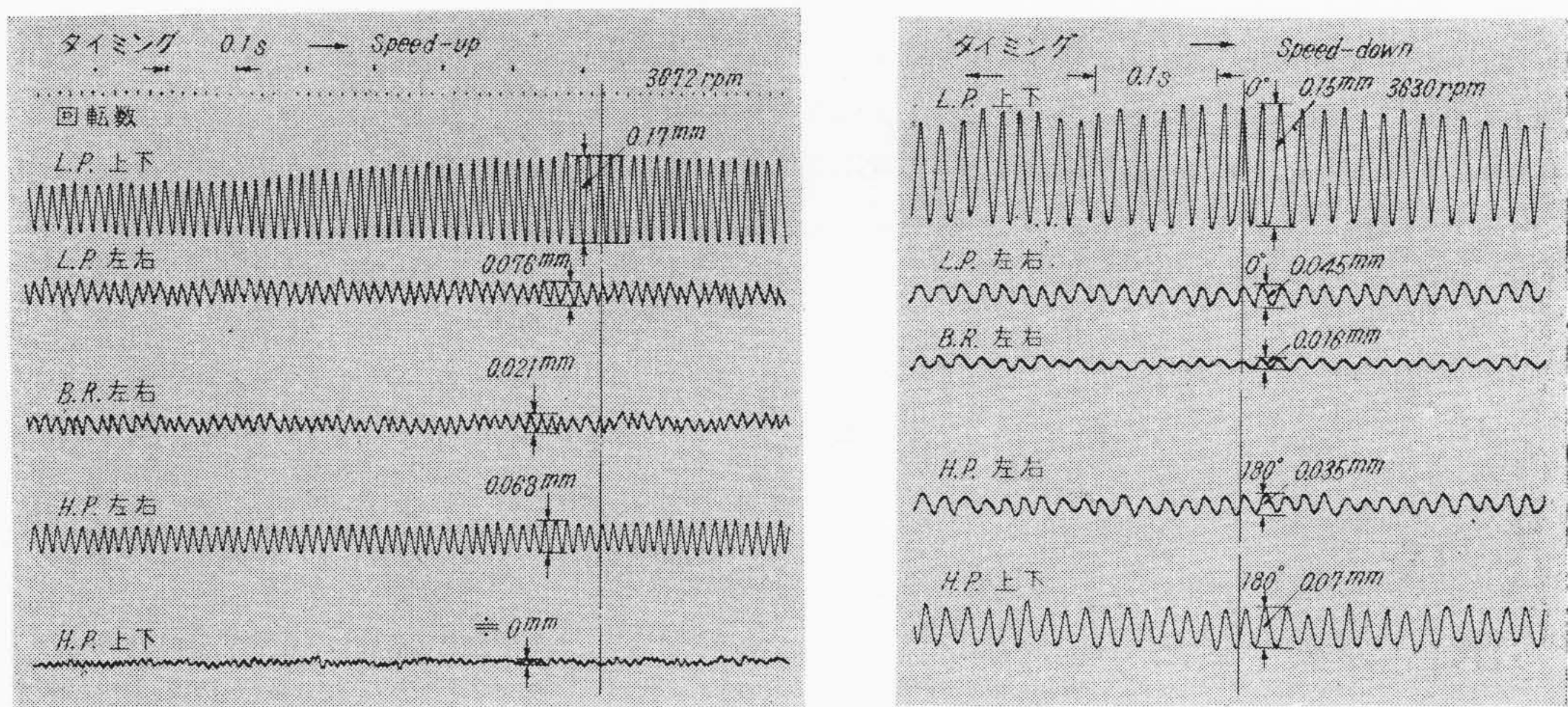
$$\frac{f_{D+\Delta D}-f_D}{f_D}=\frac{(D+\Delta D)^2-D^2}{D^2}$$

$$\div \frac{2\Delta D}{D}=0.028$$

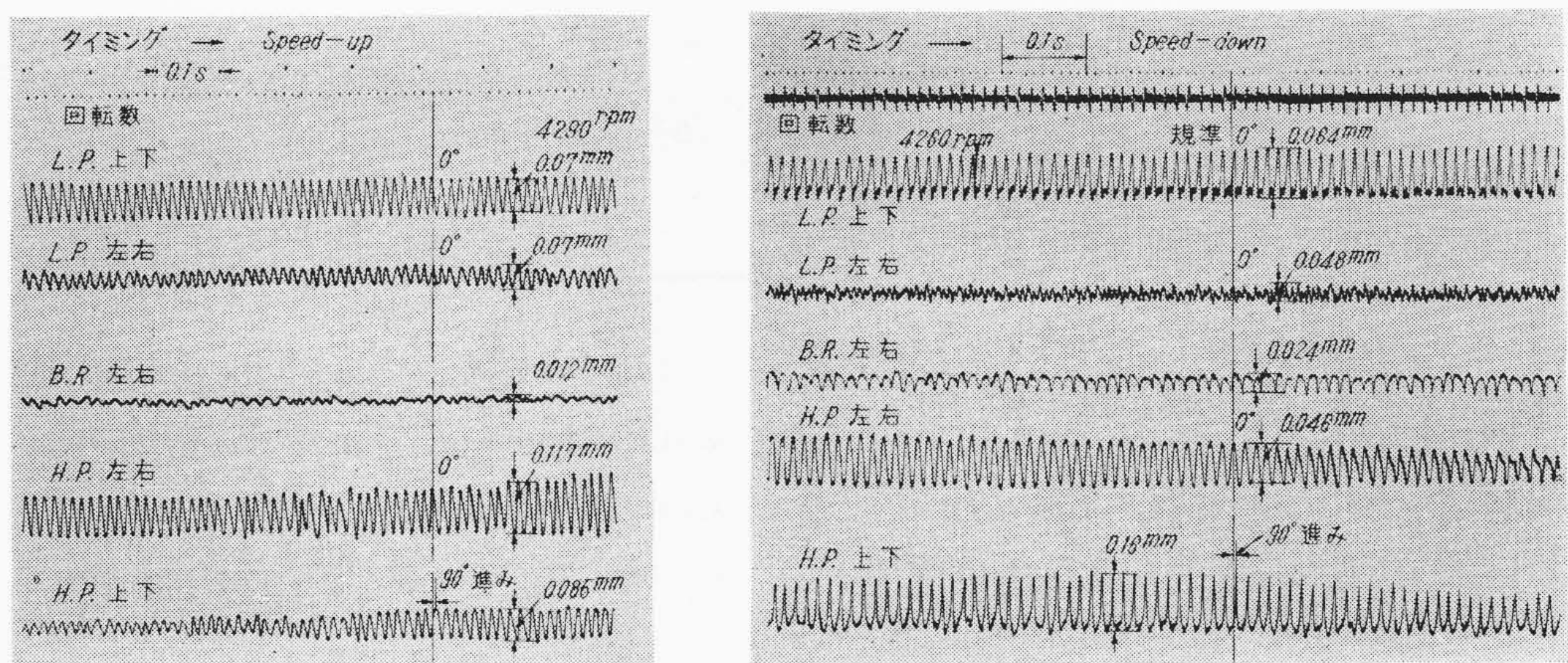
ということになる。これより補正すべき量は $\Delta D=0.014D$, これだけ直径を太くして計算すれば計算値と実験値が一致することになる。

3,650 rpm がロータの 1 次危険速度であることは, 軸のたわみ形から考えて, 中間軸受がほとんど振れないこと (この点がフードになるから), オシログラム (第 10 図 (a) 参照) において L. P. 上下, H. P. 上下がたがい位に位相が 180° ずれていることから明らかである。

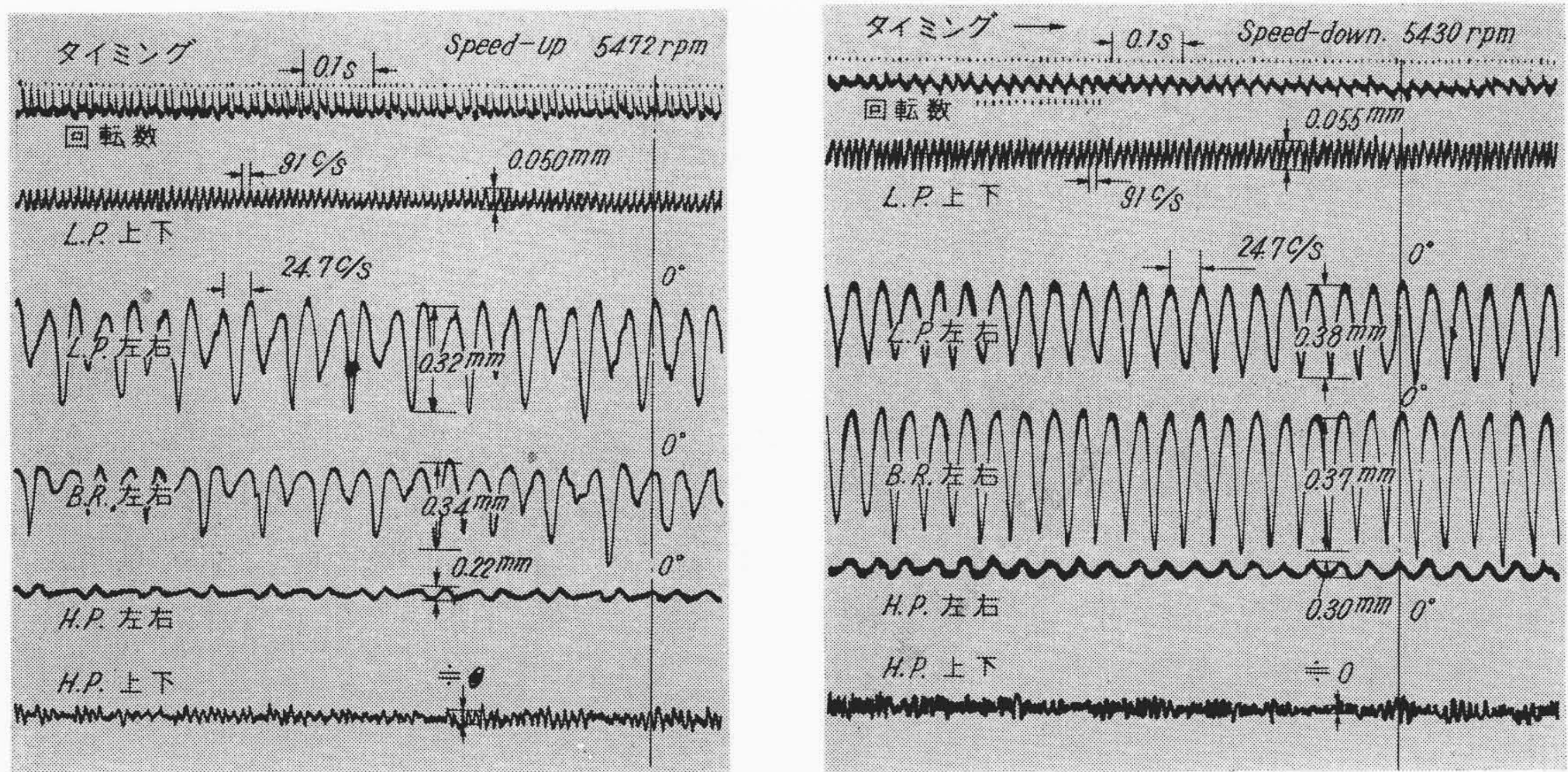
つぎに 2 次の危険速度を調べる。2 次は実験値 4,310 rpm に対し計算値は 4,665 rpm であるから, 実験値は計算値を基準にして, 4,310-4,665/4,665=-0.075 で 7.5% 低かったことになる。この理由としては軸受の剛性 (軸受台, 遊びき, 球面座を含め) 不足が考えられる。特に中間軸受がその位置で, 軸の屈曲に対し完全な単純支持を与えていないためであろう。本来ならば L. P. 上下と H. P. 上下の振れ位相差はないはずであるが, 第 10 図 (b) のように実際はこれが零でなく, L. P. 側が 90 度進んでいる。すなわちロータが完全な



第10図 (a) ロータ1次危険速度付近における振動オシログラム



第10図 (b) ロータ2次危険速度付近における振動オシログラム



第10図 (c) 軸受3次共振速度付近における振動オシログラム

2次の固有振動のモードをとるには軸受の拘束力が不十分であったとみてさしつかえない。本実験では各軸受の剛性をさらに高めて実験することはできなかった。剛性を高めるには軸受台を剛にすることはもちろん、遊びきを縮少し、球面座を廃止し、完全に剛な単純支持にする必要がある。かくしうれば危険速度計算値ははじめて実験値と一致するであろう。相対的には軸受をそのままとし、1次、2次の危険速度をさらに低くすればよいと考えられる。

5.2 ロータの危険速度 (軸受クランプを自由にした場合)

1次では第2表のように実験値は3,400 rpm と 3,720 rpm でそれぞれ L.P. 上下, 左右がピークになる。常識的には軸受は上下にこわいから、上下が高いほうの 3,720 で、左右が低いほうの 3,400 rpm が合理的と思われるが、事実はこの逆である。この理由はよくわからないが、各軸受の質量が比較的大きく、これの影響が現われたのではないと思われる。

要するに、結果的には軸受剛性が低下すると危険速度は計算値を境にして、これより $3,550-3,400/3,550=0.042(4.2\%)$ 低いものと、 $3,720-3,550/3,550=0.048(4.8\%)$ 高いものと 2 分して現われるということである。かかる結果は設計上、軸受剛性の低いロータの危険速度はその範囲を計算値に対し、最小限 200 rpm すなわち 5.5% にとり、これに計算値と実験値との差異を加味して最少 8% は引離すべきことを示している。

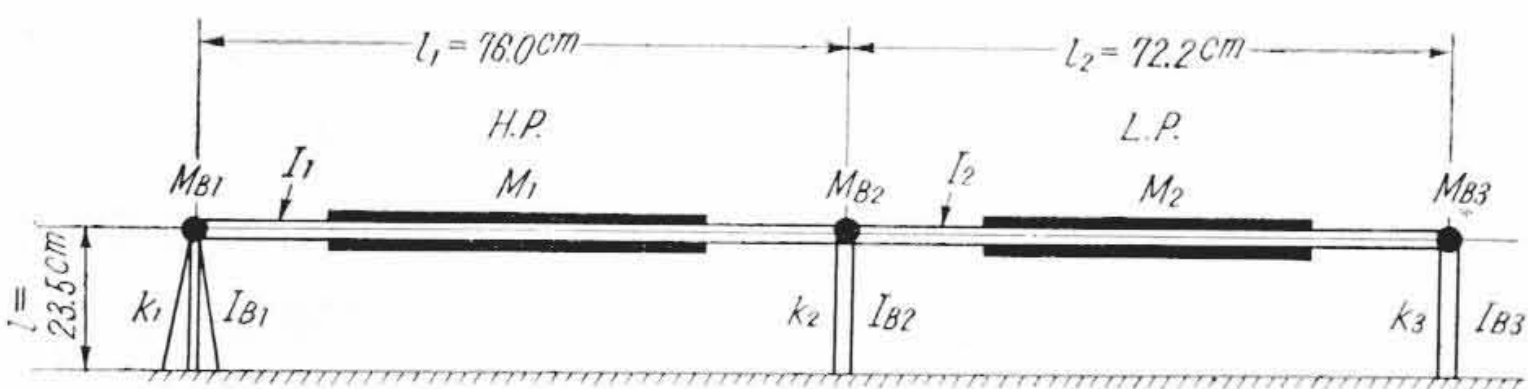
つぎに 2 次振動では 4,116 rpm から 4,332 rpm にわたってピークを生じている。この場合は軸受をクランプした場合に比べ、危険速度はクランプした場合と同様および 4% 以下の範囲にわたって生じている。この結果は、2 次の危険速度は軸受剛性が低下した場合は剛性が高い場合より 4% だけ範囲を低い側に広くとる必要のあることを示している。なお、ロータの危険速度としては 1 次、2 次のほかに 3 次、4 次……なども考えられるが、本模型の構造より 3 次以上が 2 次よりはるかに高いところ（たとえば 1 次の 3 倍以上）にあることは容易に想像される。後述するが 5,500 rpm 付近でロータ、軸受とも振幅がピークになる速度がある（第 9 図 (a), (b), 第 10 図 (c) 参照）。これは危険速度の 3 次を与えるものでなく、軸受共振速度の 3 次である。

5.3 軸受の共振速度（軸受クランプを固定した場合）

計算上軸受のたわみ剛性は無限大で、軸受はその位置で完全な単純支持の条件を与えるとした。軸受クランプ装置を固定すると実際上 1 次危険速度に対してはこの条件を満足するとみなされ、その結果 1 次危険速度の計算値が実験値とほぼ一致する。しかし軸受はクランプ装置で固定されても多少たわみ性を保留しているから、ロータとは別に軸受の質量ばね系としての性質をもつ。第 2 表に示すようにクランプを固定した場合は自由にした場合より、共振速度は 1,500 rpm から 2,740 rpm とかなり上昇するが、やはりある回転速度で共振現象が現われる。軸受のたわみ性を考慮したロータの危険速度計算については R. A. Ditalanto による Myklestad⁽⁴⁾ および Prohl の方法を発展させたものがあり⁽⁵⁾、この方法より軸受の共振速度も求められると思われるが計算が非常に煩雑である。ここでは実験上軸受の共振が 2,740 rpm あるいは 3,210 rpm で起ったという結果につき検討するため、系を 3 個の質量と 5 個のバネよりなる質点系の振動系に置きかえて、固有振動数を計算し、実験値の説明を試みる。

第 11 図は第 4 図の車軸系を単純化したもので、各部の質量、曲げこわさあるいはばね常数は第 3 表に示してある。図で H. P. スパンと L. P. スパンは均一な軸系に換算してある。この換算は H. P. および L. P. 単独の固有振動数が一致するよう、それぞれのスパンの中央に質量 M_1 および M_2 の半分が集中荷重として加わったものという仮定がはいっている（この場合均一な等価軸の直径は H. P. および L. P. スパンでそれぞれ 3.445 cm および 3.97 cm となる）。

第 11 図の系でも M_{B1} , M_{B2} , M_{B3} の振動数方程式を作るにはまだ複雑なので、各軸受の剛性は車軸の剛性に比べて十分大きくかつ振動は主として軸に直角方向にのみ起り、回転振動はしないと仮定して、第 11 図を第 12 図のように置き換える。ここではばね定数 $k_1 \cdots k_3$ はすべて第 11 図のバネ定数と同一であるが軸受の質量 m_1 , m_2 , m_3 は第 11 図の M_{B1} , M_{B2} , M_{B3} に対応しない。第 11 図



図中の各諸元については第 3 表参照、 $k_1 \gg k_2 = k_3$ となっている。
第 11 図 軸受の共振速度を求めるための等価車軸系

の M_1 および M_2 の一部を適当に $M_{B1} \cdots M_{B3}$ 部分に配分しなくてはならぬ。この配分は軸受系の振動モードによって異なるであろうが、低次振動形では M_1 および M_2 の各 50% をそれぞれ隣接の軸受の質量に加えればよいであろう。そこで、 m_1 , m_2 , m_3 は第 3 表のようにきまる。

第 12 図を参照して振動数方程式を作る。

$$2T = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2 \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$2U = kx_1^2 + k_{12}(x_2 - x_1)^2 + k_{23}(x_3 - x_2)^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 \cdots \cdots (2)$$

$$2L = 2(T - U), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

また $x_1 = A \sin \omega t$, $x_2 = B \sin \omega t$, $x_3 = C \sin \omega t$ とおくことより振動数方程式として

$$\begin{aligned} & m_1 m_2 m_3 \omega^6 - (\beta m_1 m_2 + \alpha m_2 m_3 + \gamma m_1 m_2) \omega^4 \\ & + (\beta \gamma m_1 + \beta \alpha m_2 + \gamma \alpha m_3 - m_1 k_{23}^2 - m_3 k_{12}^2) \omega^2 \\ & - (\alpha \beta \gamma - \alpha k_{23}^2 - \beta k_{12}^2) = 0 \cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

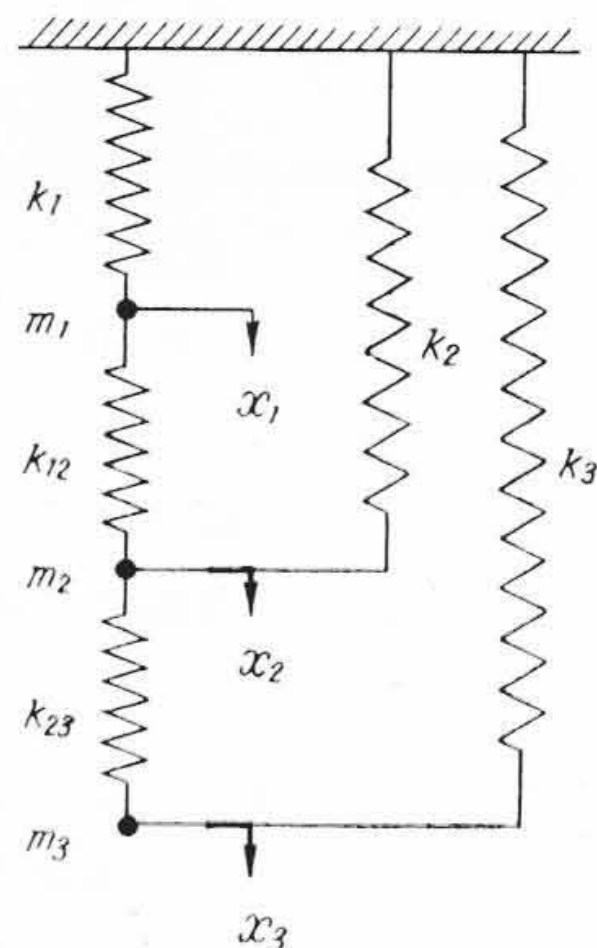
ただし両クランプ条件に対し、

$$\alpha = \begin{cases} \text{共通に} \\ k_1 + k_{12} \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} k_{3c} + k_{23} \\ k_3 + k_{23} \end{cases} \text{ または } \gamma = \begin{cases} k_{2c} + k_{12} + k_{23} \\ k_2 + k_{12} + k_{23} \end{cases} \text{ または}$$

(3) 式の $m_1 \cdots m_3$, $\alpha \cdots \gamma$, k_{12} , k_{23} などは第 3 表により既知である

第 3 表 等価車軸系の各諸元（第 11 図参照）

諸 元	説 明
$k_1 = 1.238 \times 10^5 \text{ kg/cm}$	左軸受 M_{B1} 点のばね定数 $k_1 = \frac{3EI_{B1}}{l^3}$, I_{B1} は底より $l/3$ の位置の値
$k_2 = 1.023 \times 10^3 \text{ kg/cm}$	中軸受 M_{B2} 点のばね定数 $k_2 = \frac{3EI_{B2}}{l^3}$, クランプ自由の場合
$k_3 = k_2 = 1.023 \times 10^3 \text{ kg/cm}$	右軸受 M_{B3} 点のばね定数 $k_3 = \frac{3EI_{B3}}{l^3}$, クランプ自由の場合
$k_{2c} = 3.61 \times 10^3 \text{ kg/cm}$	中軸受 M_{B2} 点のばね定数, クランプ固定の場合 (k_2 にクランプ装置の曲げこわさを加えたもの, 概算である)
$k_{3c} = k_{2c} = 3.61 \times 10^3 \text{ kg/cm}$	右軸受 M_{B3} 点のばね定数, 値は k_{2c} と同じ
$k_{12} = 100 \text{ kg/cm}$	$k_{12} = \frac{3EI_1}{l_1^3}$, M_{B2} が M_{B1} に軸を通じて及ぼす曲げこわさ
$k_{23} = 201 \text{ kg/cm}$	$k_{23} = \frac{3EI_2}{l_2^3}$, M_{B2} が M_{B3} に軸を通じて及ぼす曲げこわさ
$M_{B1} = 5.73 \text{ kg}$ $M_{B2} = 18.83 \text{ kg}$ $M_{B3} = 14.13 \text{ kg}$ $M_1 = 29.32 \text{ kg}$ $M_2 = 34.60 \text{ kg}$ $I_1 = 6.96 \text{ cm}^4$ $I_2 = 12.01 \text{ cm}^4$	左軸受の重量 中軸受の重量 右軸受の重量 H. P. スパンの車盤の重量 L. P. スパンの車盤の重量 H. P. スパンの軸の断面 2 次モーメント (均一軸に換算してある) L. P. スパンの軸の断面 2 次モーメント (均一軸に換算してある)
$m_1 = 0.0208 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ $m_2 = 0.0518 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ $m_3 = 0.0321 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	ロータの質量を加えた右軸受の等価質量 $m_1 = \frac{M_1/2 + M_{B1}}{g} = \frac{14.65 + 5.73}{g}$ $m_2 = \frac{(M_1 + M_2)/2 + M_{B2}}{g} = \frac{14.65 + 18.83 + 17.30}{g}$ $m_3 = \frac{M_2/2 + M_{B2}}{g} = \frac{17.30 + 14.13}{g}$



第 12 図 軸受に対する等価振動系（第 3 表参照）

から固有振動数 $f_1 = \omega_1/2\pi$, $f_2 = \omega_2/2\pi$, $f_3 = \omega_3/2\pi$ が (3) 式の ω^2 に関する 3 次方程式の根として定まる。

まず中軸受と左軸受を固定した場合について解いてみる。(3) 式に各数値を入れると

$$\omega^6 - 6.15 \times 10^6 \omega^4 + 1.163 \times 10^{12} \omega^2 - 5.122 \times 10^{16} = 0 \dots (4)$$

を得る。これを解くと $\omega_1 = 41.8 \times 2\pi$, $\omega_2 = 55.2 \times 2\pi$ および $\omega_3 = 388 \times 2\pi$ としてきまる。これに対し実験値は第 2 表より $\omega_1 = 2\pi \times 2,740/60 = 45.7 \times 2\pi$, $\omega_2 = 2\pi \times 3,210/60 = 53.5 \times 2\pi$ であるから、大体一致する。計算で 1 次が実験より低く出たのは軸受を固定したときのばね定数 k_{2c} , k_{3c} を低く見積りすぎたためであろう (クランプ装置にあるリブの剛性を考慮せず, ボルト位置は軸心位置まで高くなっていると仮定した)。また計算で 2 次がやや高目になったのは, ロータの危険速度の場合と同様このモードの振動を維持する上に実際の軸受構造は (たとえばクランプのボルト) 剛性不足であったり, あるいはロータの軸剛性のおおざっぱな仮定は 1 次に対しては成立つが, 2 次以上には成立たなかったためと思われる。

5.4 軸受の共振速度 (軸受クランプを自由にした場合)

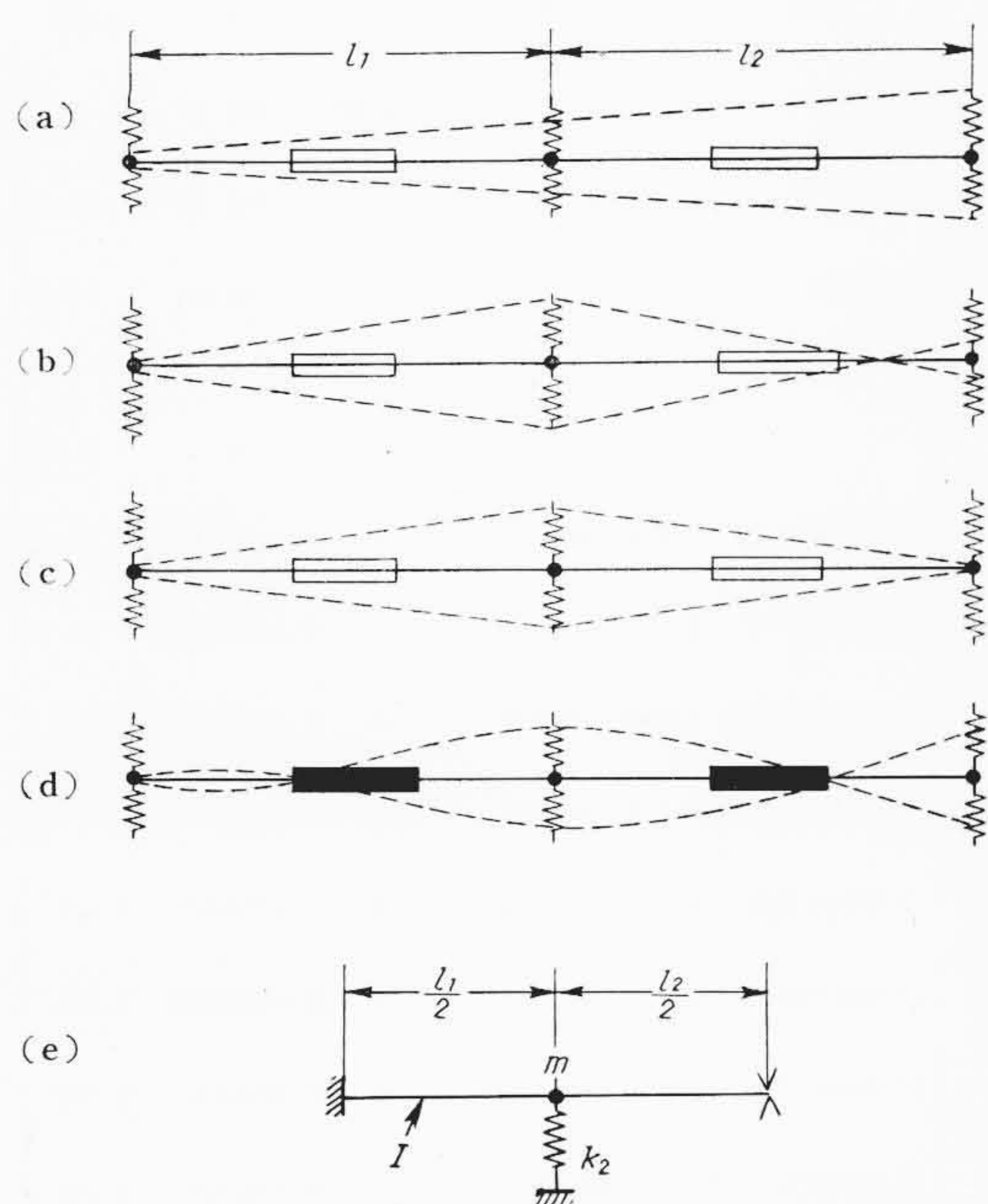
軸受のクランプ装置で締付ボルトを自由にした場合は (3) 式を計算するに当り, ばね定数を k_{2c} , k_{3c} の代りに k_2 , k_3 を用いればよい。計算式は

$$\omega^6 - 6.020 \times 10^6 \omega^4 + 0.3806 \times 10^{12} \omega^2 - 5.667 \times 10^{15} = 0 \dots (6)$$

となる。これを解くと

$$\omega_1 = 24.6 \times 2\pi, \quad \omega_2 = 31.0 \times 2\pi, \quad \omega_3 = 376 \times 2\pi$$

となる。これに対し実験値は $\omega_1 = 2\pi \times 1,500/60 = 25.0 \times 2\pi$, $\omega_2 = 2\pi \times 2,210/60 = 36.8 \times 2\pi$, $\omega_3 = 2\pi \times 5,470/60 = 91.2 \times 2\pi$ となり, 1 次はかなりよく計算値と一致するが, 2 次は前の場合同様低くなり, 3 次は計算値よりはるかに低くなり, 全然一致しない。このことは (3) 式が 3 次以上の高次振動に対しては適用されないことを示している。(3) 式より求めた振動数に対応する振動モードは第 13 図 (a)~(c) のとおりで, 1 次, 2 次で各軸受がロータと同位相で振動していることはオシログラムからもわかる。5,470 rpm, 91 c/s の 3 次振動でも軸受とロータの位相が同じであることから, このモードとしては第 13 図 (d) が考えられる。この振動は中軸受のみにつ



$$l_1 = 76 \text{ cm}, \quad l_2 = 72 \text{ cm}, \quad k_2 = 1.023 \times 10^8 \text{ kg/cm}, \\ m = \frac{MB^2}{g} = 0.01923 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^2, \quad I = \frac{I_1 + I_2}{2} = 9.46 \text{ cm}^4$$

第 13 図 軸受の振動モードならびに中間軸受の振動系 (クランプ自由)

いて考えれば, 近似的には第 13 図 (e) のように置きかえられる。この固有振動数を計算した結果では 91.4 c/s となり, 実験値 91 c/s とほぼ一致する。ここで注意を要するのは, この 3 次共振速度では, 振動数と回転速度とがこれまでの共振速度や危険速度のように一致していないことである。すなわち, 回転速度は 91 c/s であるが, 振動数はこれより低い。1 次共振振動数に等しい約 25 c/s であることである。なぜかかる現象が生ずるのか説明困難である。この場合 3 次共振速度と 1 次共振速度の比は 3.65 で 2 とか 3 とか 4 という簡単な値ではなく, 19/7 という比になっている。なお第 9 図には記していないが, やはり同様な性質の 4 次振動がちょうど 8,000 rpm にも生じている。この場合の速度の比は 16/3 となる。要するに実験結果は軸受のたわみやすい 3 軸受ロータでは, ロータの 2 次危険速度を越えた高速運転速度では軸受のたわみ性から予期しがたい軸受の共振振動が生じやすいということを示している。

付記: 実際のタービン発電機では振動の大小の判定は軸受の振動振幅をもってする。この振動は本実験結果からわかるようにロータのつりあいから生ずるものと, 軸受のたわみから生ずるものと両方含んでいる。振幅が大きくて対策を要する場合, 前者に対してはロータのバランスをやり直し, 後者に対しては剛性を変化し, 運転速度での振幅が小さくなるようにすることが必要になるのである。これに関しては別の機会に述べる。

6. 結 言

35,000~156,000kW クラスのタービン発電機ロータのタービン側の危険速度に関して, タービン側を 3 軸受車軸系よりなると仮定し, 実物近似の模型を用いて実験を行ない, 計算値と比較してみた。結果は第 2 表に示すとおりである。

(1) 1 次の危険速度の実験値は, Prohl の方法による計算値とほぼ一致する。計算値は実験値より約 2.8% 高くなるが, これは計算において車盤削り出し部分の剛性上昇を無視したためと推定される。設計上は車軸直径を平均約 1.8% 大きく見積り, 削り出しのない軸に車盤が荷重として付加しているものとすれば妥当な危険速度が求められる。

(2) 2 次の危険速度の実験値は計算値より約 7.5% 低くなる。これは軸受系が 2 次振動に対し完全な単純支持条件を与えるだけの剛性を有しないからであろう。

(3) 軸受の支持をたわみやすくすると, 1 次の危険速度は軸受支持がたわみやすすくない場合の値を境にして上下に 2 分し, その開きはいずれも 4~5% である。2 次の危険速度は軸受支持がたわみやすい場合は, たわみやすすくない場合より, 低い側に生じやすく, この下り方は H. P., L. P. ロータについて, またその振動方向についてまちまちであり, 量は 0~4% 程度である。

(4) 軸受の共振は軸受のたわみ性, 質量に関係していろいろな速度に現われる。この速度に関し, 軸受系を 3 個の質量と 5 個のばねよりなる質点系と仮定し, 振動数方程式を導き振動数を求めた。その結果, 1 次, 2 次の振動数については実験値と比較的一致するが, 3 次の振動数は一致しなかった。3 次以上の共振は両危険速度より高い回転速度において生じ, その振動数は 1 次の軸受共振速度に等しかった。

本研究にあたり, 当実験室大森基次氏およびその他の諸氏に実験, 計算とも終始熱心な協力を, また実験装置の完成に当っては日立工場綿森部長および桑野課長の協力を, また日立研究所今尾技師長ならびに北川部長からは直接間接のご指導, ごべんたつを賜わった。厚くお礼申しあげる。

参 考 文 献

(1) M. A. Prohl: JI' of Applied Mechanics 65, A 142 (1945)

(2) J. M. Macduff and J. R. Curreri: Vibration Control 253-

268 Mc Graw Hill (1958)

(3) S. チモンエンコ (谷下, 渡辺訳): 工業振動学 247-258 (昭

付録第1表 車 軸 の 重 量 な ら び に こ わ さ の 分 布																			
諸 元	車 盤 No.	左 軸 受			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	スパン No.	0-1	1-2	2-3	3-4			4-5			5-6		6-7						
車 盤 重 量 (kg)					0.8472	0.7618	0.7618	0.7618	0.7618	0.7618	0.7618	3.357	1.931	1.497	1.410	1.468	1.808	1.834	1.859
ス パ ン 間 軸 重 量		0.0345	0.246	0.427	0.863			0.818			0.868		1.511						
集中荷重としての重量 (kg)		0.0173	0.140	0.336	2.458			3.861			5.634		6.535		10.56				
軸 直 径 (cm)		2.0	2.6	3.5	3.8			3.8			3.8		4.2						
ス パ ン 長 L_x (cm)		1.4	5.9	5.65	9.7			9.19			9.75		13.9						
たわみ係数 $\beta \times 10^6 = \frac{J_x}{EI} \times 10^6$ (1/kg×cm)		0.8486	1.253	0.3653	0.4514			0.4275			0.4535		0.4332						

付録第2.1表 危 険 速 度 計 算 表 (H. P. 側)																	
Sheet (I) H.P.Span																	
仮想速度 4,500 rpm=471.2 rad/s, $\alpha_n = \frac{W_n}{g} \omega^2 = 226.5 W_n$																	
条件	n	αy	$\frac{dM}{dx}$	記入 $\frac{dM}{dx} \times J_x$	M	$\frac{1}{3}M$	$\frac{1}{6}M$	M'	$\beta \times 10^6$	$\beta M'$	$\frac{J_y'}{J_x}$	記入 $\frac{dy'}{dx} \times J_x$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$	$\frac{J_y' + J_y''}{(J_x)_n}$	記入 $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx}$
I	0	0	0	—	0	0	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1	44.43	0	1.4	0	0	0	0	0.8486	0	0	1.4	0	1.4	1.4	31.75	1,000
	2	556.0	44.43	5.9	262.1	87.37	43.68	87.37	1.2525	0.0000547	0.0000547	5.9	0.0003227	5.9	7.300	76.14	
	3	7,205	600.4	5.65	339.3	113.75	56.62	696.57	0.0002545	0.0004608	0.0004186	5.65	0.002365	5.65	12.95	556.5	
	4	19,850	780.5	9.7	75,700	252,350	126,175	14,444	0.00652	0.012215	0.0073994	9.7	0.07177	9.7	22.72	874.2	
	5	41,330	27,650	9.19	254,150	84,717	42,358	82,036	0.03507	0.05318	0.054684	9.19	0.5026	9.19	32.41	1,276	
	6	65,800	68,985	9.75	672,500	224,167	112,083	278,836	0.12643	0.17725	0.2343	9.75	2.285	9.75	44.445	1,481	
	7	164,850	134,785	13.9	1,873,500	624,500	312,250	815,252	0.3531	0.4883	0.76465	13.9	10.626	13.9	68.971	2,390	
	8	136,100	299,635	10.91	3,267,000	1,089,000	544,500	1,984,200	0.6742	0.8593	1.92715	10.91	21.01	10.91	100.89	1,348.5	
	9	8,620	435.735	8.1	3,529,000	1,176,333	588,167	3,661,400	4.676	5.428	7.46245	8.1	60.43	8.1	169.42	50.88	
	10		444,355	1.5	666,300	222,100	111,050	4,948,800	1.8435	1.885	14.734	1.5	22.105	1.5	193.03	13.09	17,619
								Sum	16.619								
II	0	0	1.000	—	0	0	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1	0.000008797	1.000	1.4	1.400	0.4667	0.2333	0.4667	0.8486	0.000003961	0.00000198	1.4	0.000002771	0	0.000002771	31.75	0
	2	0.0012345	1.000	5.9	5.900	2.000	1.000	1.6834	1.2525	0.000002108	0.00000105	5.9	0.00001534	0	0.000016217	76.14	
	3	0.03328	1.00123	5.65	5.654	1.884	0.942	4.592	0.000016775	0.000003338	0.000002702	5.65	0.0000436	0	0.0000517	555.5	
	4	0.1660	1.0345	9.7	10.03	3.376	1.688	8.149	0.00003677	0.000004432	0.000013415	9.7	0.0001301	0	0.00018992	874.2	
	5	0.5183	1.2005	9.19	11.026	3.675	1.837	13.329	0.00005598	0.000006483	0.000023547	9.19	0.0002164	0	0.00040632	1,276	
	6	1.1645	1.7188	9.75	16.76	5.587	2.793	19.799	0.00008978	0.00001024	0.000039008	9.75	0.0003803	0	0.00078662	1,481	
	7	3.977	2.8833	13.9	40.06	13.68	6.84	32.06	0.0001388	0.000016775	0.00006313	13.9	0.0008773	0	0.0016639	2,390	
	8	3.708	6.8603	10.91	74.82	24.60	12.30	53.885	0.00019675	0.00002391	0.00009953	10.91	0.001086	0	0.0027499	1,348.5	
	9	0.2420	10.568	8.1	85.58	28.19	14.09	97.09	0.000124	0.00014225	0.0002475	8.1	0.002065	0	0.004755	59.88	
	10		10.81	1.5	16.21	5.40	2.70	128.32	0.0004778	0.00004878	0.0004375	1.5	0.0006562	0	0.005411	13.09	0.0004863
								Sum	0.0004863								

34-4, オーム社刊)
(4) N. O. Myklestad: 'Trans' of ASME p. p. 61-67 (1946)

(5) R. A. Ditaranto: JI' of Applied Mechanics p. p. 57-63
(1958)

($E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\rho=7.85 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, 第4図参照)

(E=2.1×10 ⁶ kg/cm ² , ρ=7.85×10 ⁻⁶ kg/cm ³ , 第4図参照)																									
16	17	18	19	中軸受				20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	右軸受↓				33
7—8				8—9	9-10	10-11	11-12	12—13		13—14		14—15			15—16		16—17			17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23
2.040	2.094	2.121	2.510					0.624	3.196	4.667	3.267	2.498	2.241	1.996	1.449	1.996	2.241	2.498	3.267	4.667					0.352
1.186				0.392	0.058	0.058	0.372	1.577		1.264		1,399			1.399		1.477			0.276	0.276	0.058	0.058	0.026	0.039
5.955				0.2247	0.578	0.215	3.211	9.103		7.872		6.909			8.857			6.095			0.276	0.167	0.162		0.524
4.2				2.8	2.5	2.5	2.8	4.8		4.8		4.8			4.8		4.8			2.8	2.8	2.5	2.5	2.8	2.8
10.91				8.1	1.5	1.5	7.7	11.1		8.9		9.85			9.85		10.4			5.7	5.7	1.5	1.5	5.5	0.8
0.3398				1.278	0.3725	0.3725	1.214	0.2028		0.1626		0.1799			0.1799		0.190			0.8993	0.8993	0.3725	0.3725	0.8676	

付録第2.2表 危険速度計算表 (L. P. 側)

仮想速度 4,500 rpm = 471.2 rad/s. $\alpha_n = \frac{W_n}{g} \omega^2 = 226.5 W_n$

Sheet (II) L. P. Span

条件	n	αy	$\frac{dM}{dx}$	記入	$\frac{dM}{dx} \times \Delta x$	M	$\frac{1}{3} M$	$\frac{1}{6} M$	$\frac{M'}{M''}$	$\beta \times 10^6$	$\frac{\beta M'}{\beta M''}$	$\frac{\Delta y'}{\Delta x}$	記入	$\frac{dy'}{dx} \times \Delta x$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$	$\frac{\Delta y' + \Delta y'' + y}{(\Delta x)_n}$	記入	$\frac{(I)}{H.P.}$
			$\frac{dM}{dx}$	Δx	ΔM							Δx		$\Delta y'$	$\Delta y'$	y	α	$\frac{dy}{dx}$
I	10	0	0			804,800	268,270	134,130								0	13.09	0.28
	11	31.40	0	1.5	0	804,800	268,270	134,130	402,400	0.3725	0.1499			0.2248	0.4200	0.6448	48.68	
	12	6,447	31.4	7.7	241.7	805,040	268,350	134,170	402,440	1.214	0.4885	0.7883	7.7	6.068	2.156	8.8688	727.2	
	13	55,800	6,478.4	11.1	71,900	876,940	292,310	146,157	426,480	0.20275	0.0840	0.1728	11.1	15.10	3.108	27.077	2,061	
	14	77,040	62,278	8.9	554,300	1,431,200	477,070	238,530	623,230	0.1626	0.10125	1.5336	8.9	13.645	2.492	43.214	1,783	
	15	99,760	139,320	9.85	1,372,000	2,803,200	934,400	467,200	1,172,900	0.1799	0.16985	1.8047	9.85	17.775	2.758	63.75	1,565	
	16	179,760	239,080	9.85	2,354,000	5,157,200	1,719,100	859,530	2,186,300	0.1799	0.3228	1.021	9.85	23.04	2.758	89.55	2,000	
	17	175,900	418,730	10.4	4,353,000	9,511,000	3,170,300	1,585,200	4,029,800	0.190	0.6277	3.3596	10.4	34.94	2.912	127.40	1,381	
	18	11,213	594,600	5.7	3,389,000	12,900,000	4,300,000	2,150,000	5,885,000	0.8993	4.783	8.9082	5.7	50.76	1.596	179.76	62.38	
	19	11,260	605,800	5.7	3,453,500	16,353,500	5,451,200	2,725,600	7,601,200	0.8993	6.317	20.517	5.7	116.9	1.596	298.26	37.75	
	20		617,060	1.5	925,500	17,279,000	5,759,700	2,879,800	8,485,300	0.3725	3.102	30.452	1.5	45.66	0.42	344.34	13.09	33.892
									Sum		33.612							
II	10	0	1.000			0	0	0								0	13.09	0
	11	0.00006797	1.000	1.5	1.500	1.500	0.5000	0.2500	0.2500	0.3725	0.000000931		1.5	0.000001396	0	0.000001396	48.68	
	12	0.01548	1.00001	7.7	7.700	9.200	3.067	1.533	2.033	1.214	0.000007467	0.000002746	7.7	0.00002115	0	0.00002127	727.2	
	13	0.2287	1.0155	11.1	11.27	20.47	6.823	3.412	3.317	0.2027	0.000004027	0.000008057	11.1	0.00008975	0	0.00011104	2,061	
	14	0.3842	1.2442	8.9	11.075	31.545	10.52	5.257	6.479	0.1626	0.000001314	0.000011745	8.9	0.0001045	0	0.0002155	1,783	
	15	0.6040	1.6284	9.85	16.04	47.585	15.862	7.931	12.08	0.1799	0.000002264	0.000017327	9.85	0.0001706	0	0.0003861	1,565	
	16	1.290	2.2324	9.85	21.985	69.57	23.19	11.595	18.45	0.1799	0.000003800	0.000026067	9.85	0.0002567	0	0.0006428	2,006	
	17	1.4535	3.5224	10.4	36.63	106.2	35.4	17.7	27.46	0.190	0.000004940	0.00003943	10.4	0.0004100	0	0.001053	1,381	
	18	0.1013	4.976	5.7	28.36	134.56	44.85	22.43	40.89	0.8993	57.83	0.00010036	5.7	0.000572	0	0.001625	62.38	
	19	0.1090	5.077	5.7	28.94	163.5	54.50	27.25	72.10	0.8993	0.00006482	0.0002214	5.7	0.001262	0	0.002887	37.75	
	20		5.186	1.5	7.779	171.3	57.10	28.55	83.05	0.3725	0.00006916	0.0003215	1.5	0.0004821	0	0.003369	13.09	0.0003529
									84.35		0.00003094							
									Sum		0.0003529							

付録第 2.3 表 危険速度計算表 (ベルト車側)

Sheet [III] Pulley Part										仮想速度 4,500 rpm = 471.2 rad/s, $\alpha_n = \frac{W_n}{g} \omega^2 = 226.5 W_n$								
条件	<i>n</i>	αy	$\frac{dM}{dx}$	<i>Ax</i>	<i>AM</i>	<i>M</i>	$\frac{1}{3}M$	$\frac{1}{6}M$	$\frac{M'}{M''}$	$\beta \cdot 10^6$	$\frac{\beta M'}{\beta M''}$	$\frac{Jy'}{Jx}$	<i>Jx</i>	<i>Jy'</i>	<i>Jy''</i>	<i>y</i>	α	$\frac{dy}{dx}$
I	20	0	1.000			0	0	0								0	13.09	0
	21	0.000005113	1.000	1.500	1.500	1.500	0.500	0.2500	0.2500	0.3725	0.000000931	0.0000001863	1.5	0.0000001396	0	0.0000001396	36.64	
	22	0.001142	1.000005	5.500	5.500	7.000	2.333	1.167	1.667	0.8676	0.000001446	0.000000931	5.5	0.0000009484	0	0.0000009624	118.7	0.000003966
	23		1.0011	0.8					2.583	0.000002241	0.000001725	0.8		0				
									Sum	0.000003960								
II	20	0	0			-221,000	-73,670	-36,830								0	13.09	-2.16
	21	-121.0	0	1.5	0	-221,000	-73,670	-36,830	-110,500	0.3725	-0.04116	-0.04116	1.5	-0.06172	-3.24	-3.302	36.64	
	22	-1,917.5	-121.0	5.5	-665.5	-221,670	-73,890	-36,945	-110,620	0.8676	-0.09595	-0.17825	5.5	-0.98	-11.88	-16.16	118.7	-2.434
	23		-2,038.5	0.8					-110,720	0.8676	-0.09600	-0.17825	0.8		-1.728			
									Sum	-0.27425								

付録第 2.4 表 エキセスモーメントの計算

Sheet [I], [II], [III] を用い次式により実行する

(a) H.P.Span 区分 (0) における条件, Sheet [I] より

$$I \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 1.00 \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_0 = y_0 = M_0 = 0 \end{cases} \quad II \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = y_0 = M_0 = 0 \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_0 = 1.00 \end{cases}$$

Sheet [I] より, 区分 0 および区分 10 について

$$y_{10} = 193.0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 0.005411 \left(\frac{dM}{dx}\right)_0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{10} = 17.62 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 0.0004863 \left(\frac{dM}{dx}\right)_0 \dots\dots\dots (2)$$

$$M_{10} = 10,341,800 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 267.44 \left(\frac{dM}{dx}\right)_0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} = 444.355 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 10.81 \left(\frac{dM}{dx}\right)_0 \dots\dots\dots (4)$$

セクション (10) では H.P. と L.P. とは共通

$$y_{10H.P.} = y_{10L.P.} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{10H.P.} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{10L.P.} \dots\dots\dots (6)$$

$$M_{10H.P.} = M_{10L.P.} \dots\dots\dots (7)$$

(1) で $y_{10} = 0$ より

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_0 = -35.660 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \text{これを(2), (3)に入れ}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{10} = 0.28 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad M_{10} = 804,800 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

(第 7 図に記入してある)

(b) L.P.Span 区分 (10) における条件

$$I \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{10} = 0.28 \\ M_{10} = 804,800 \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} = y_{10} = 0 \end{cases} \quad II \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{10} = y_{10} = M_{10} = 0 \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} = 1.000 \end{cases}$$

(b) Sheet [II] より

$$y_{20} = 344.3 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 0.003369 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{20} = 33.89 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 0.0003529 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} \dots\dots\dots (9)$$

$$M_{20} = 17,279,000 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 171.3 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} = 617,060 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 5.186 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} \dots\dots\dots (11)$$

区分 (20) では L.P. と Pulley と共通

$$y_{20L.P.} = y_{20P.L.} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{20L.P.} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{20P.L.}$$

$$M_{20L.P.} = M_{20P.L.}$$

(8) で $y_{20} = 0$ より

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{10} = -102,200 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

これを(9), (10)に入れ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{20} = -2.16 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

$$M_{20} = -221,000 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

(c) Pulley Span の条件

$$I \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{20} = -2.16 \\ M_{20} = 221,000 \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} = y_{20} = 0 \end{cases} \quad II \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{20} = y_{20} = M_{20} = 0 \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} = 1.00 \end{cases}$$

Sheet [III] より自由端では

$$y_{22} = -16.16 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 0.000009624 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{22} = -2.434 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 0.000003966 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} \dots\dots\dots (13)$$

$$M_{22} = -221,670 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 7,000 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{22} = -121.0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 1,000 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} \dots\dots\dots (15)$$

自由端では下記条件が成立つ

$$\begin{cases} M_{22} = 0 \\ \frac{W_{22}}{g} \omega^2 y_{22} = \alpha_{22} y_{22} = - \left(\frac{dM}{dx}\right)_{22} \\ \left(\frac{dM}{dx}\right)_{23} = \left(\frac{dM}{dx}\right)_{22} + \alpha_{22} y_{22} = 0 \left[\left(\frac{dM}{dx}\right)_{23} \text{ は自由端を越えた位置の Shearing force} \right] \end{cases}$$

$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{22} = 0$, Sheet [III] より

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{23} = -2,038.5 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 1,001 \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{dM}{dx}\right)_{20} = 2,030 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

これを(14)に入れ, 求むる自由端 22 のエキセスモーメントは

$$M_{22} = -221.670 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 16,260 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

$$= -207,400 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

となる。この値が本文第 5 図に記入してある。