

指 針 静 止 時 間

Time for Pointer to Reach the Final Value

北 川 栄*
Sakae Kitagawa

内 容 梗 概

振れはじめて静止するまでの計器の指針の運動は、制動常数および単位回転力が指針の回転角に関連して変化する場合には、非線形二次常微分方程式にて表わされる。これを Runge-Kutta の方法で数値積分して指針の静止時間を計算した。その結果、指針の静止する位置付近が不足制動の領域にあるかぎり、その変化の影響は少なく、それらが変化しないと仮定して前に筆者が求めた計算式で計算できることを明らかにした。

$$T = \frac{2I}{N} \log \frac{\theta_0}{\theta_s} \quad \text{ここに } T: \text{ 静止時間} \quad \theta_0: \text{ 最初の指針回転角}$$

$$I: \text{ 可動部の回転慣性能率} \quad \theta_s: \text{ 目で見える回転角の限度}$$

$$N: \text{ 制動常数}$$

1. 緒 言

計器の指針が振れはじめてより静止するまでの時間（以下静止時間と称する）を合理的に近似計算する式をさきに筆者は発表した⁽¹⁾。しかし、この式はたとえば直流計器のように制動常数および単位回転力が指針の回転する目盛範囲において不変なものに対するもので、それらが指針の回転中に変化する場合、たとえば、絶縁抵抗計のような場合は厳密に言えば適用できない。しかし、このような場合も静止点付近の運動は制動常数および単位回転力がほぼ一定として、目安をつけるための近似の計算として利用できるであろうと述べておいた⁽²⁾。

電子計算機の出現により、前述の推論がどのくらい当るものであるかを計算で確かめたいことと、さらにこれにより数値計算以外には解を知ることの不可能な微分方程式を解く手法を具体的に知っておくことは、今後の研究に必要と思って Runge-Kutta 法によって数値計算を行なったのでここに報告するものである。

2. 前に発表したものの概要

本論にはいる前に、既発表⁽¹⁾の内容の概略を再記する。軸受部の摩擦を省略すると指針の運動は次の微分方程式で示される。

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + N \frac{d\theta}{dt} + M\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに I : 可動部の回転慣性能率
 N : 制動常数
 M : 単位角当りの制御回転力
 θ : 指針の回転角
 t : 任意の時間

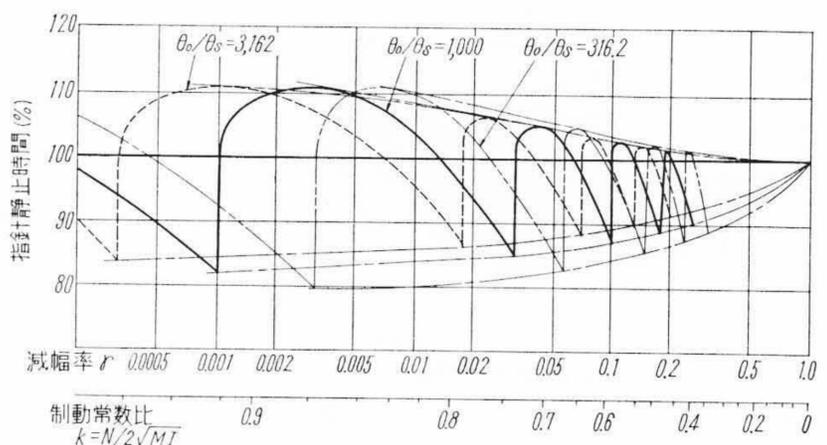
I, N, M が常数であれば、この方程式は簡単に解け、 $N < 2\sqrt{MI}$ (不足制動), $N = 2\sqrt{MI}$ (臨界制動), $N > 2\sqrt{MI}$ (過制動) の条件で下記の3式になることはよく知られていること⁽³⁾⁽⁴⁾である。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \\ \theta &= \theta_0 e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \\ \theta &= \theta_0 e^{-\alpha t} \left(\cosh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$\alpha = \frac{N}{2I} \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{N}{2I}\right)^2 - \frac{M}{I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{I} - \left(\frac{N}{2I}\right)^2} \quad \theta_0 = \text{最初の回転角}$$



第1図 不足制動における指針静止時間

筆者は前にこの式を用いて不足制動の場合について、それ以下は見えないと考えられる一定回転角、たとえば目盛板上 0.1 mm に相当する回転角 θ_s に達するまでの時間 T を計算し、横軸に減幅率 r および制動常数比 k 、縦軸に静止時間 T を下式で

$$T_s = \frac{2I}{N} \log \frac{\theta_0}{\theta_s} \quad \dots\dots\dots (3)$$

示される T_s にて除した T/T_s をとり図示すると第1図のようになるので、計算の出発点になった微分方程式には摩擦が省略されていることや、 θ_s にも視力による個人差があるなどを考えると指針静止時間は本質的に厳密な計算ができないことを認めて、+10%、-20% の誤差が出ることを容認し、第1図の 100% 線すなわち下式を採用すべきことを述べた⁽¹⁾。

$$T = T_s = \frac{2I}{N} \log \frac{\theta_0}{\theta_s} \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、臨界制動付近ではこのような一般式がなく、さらに制動常数が増して 150% 以上の過制動になれば、-10%、+0% の誤差を認容すれば次式で静止時間を計算できることも示した。

$$T = 2k^2 \frac{2I}{N} \log \frac{\theta_0}{\theta_s} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに $k = \frac{N}{2\sqrt{IM}}$

3. 指針の運動を示す微分方程式の整理

3.1 微分方程式の無次元化

I, N, M が回転角 θ の関数である微分方程式の数値計算をする準備として、計算に便利のように(3)式に示される T_s を時間の単位にとって、時間の無次元化を図ることとする。

* 日立製作所日立研究所 工博

(1)式の両辺を I にて除し、下記をうる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{N}{I} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{M}{I} \theta = 0 \dots\dots\dots(6)$$

次に τ を無次元化された時間とする。すなわち

$$t = \tau \times T_s$$

これを上式に代入して整理すれば下記のとおりになる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{T_s N}{I} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{T_s^2 M}{I} \theta = 0 \dots\dots\dots(7)$$

3.2 制動常数および単位回転力が常数でない場合

一般に制動常数 N は空げき磁束密度の自乗に比例し、単位回転力 M は磁束密度 B に比例するので、永久磁石可動線輪形比率計（絶縁抵抗計もこの一種である）は空げき磁束密度が一定でないゆえ、制動常数 N および単位回転力 M は常数ではない。

これらの最も簡単な場合として磁束密度が回転角の一次の関係になる場合を考える。

$$N = N_0(1 + c\theta)^2$$

$$M = M_0(1 + c\theta)$$

ここに N_0 : 静止点における制動常数

M_0 : 静止点における単位回転力

c : 空げき磁束密度が回転角により変化する場合の比例常数（以下空げき磁束密度変化率と呼ぶ）

なお

$$P = \frac{T_s N_0}{I} \quad Q = \frac{T_s^2 M_0}{I} \dots\dots\dots(8)$$

とすると(7)式は下記のとおりになる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + P(1 + c\theta)^2 \frac{d\theta}{dt} + Q(1 + c\theta)\theta = 0 \dots\dots\dots(9)$$

なお静止点付近の減幅率を r とすると公知⁽⁴⁾のように

$$r = \exp\left(\frac{-\pi}{\sqrt{\frac{4I_0M}{N_0^2} - 1}}\right)$$

であること、および(3)、(8)式により P 、 Q を次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} P &= 2 \log \frac{\theta_0}{\theta_s} \\ Q &= \left(\log \frac{\theta_0}{\theta_s}\right)^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{\log r^{-1}}\right)^2 + 1 \right\} \\ &= \frac{P^2}{4} \left\{ \left(\frac{\pi}{\log r^{-1}}\right)^2 + 1 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

(9)、(10)式が無次元化された指針の運動方程式である。(9)式中空げき磁束密度変化率 $c = 0$ とすれば二次の線形常微分方程式となるが、 $c \neq 0$ では非線形となり、もはや一般解を数式で表わすことができず、数値積分による数値解しか得られない。以下数値解を求める。

4. 常微分方程式の数値解法の概要

4.1 数値解法の種類

数値解を求める実用的方法は大別して

(1) 積分進行法

(2) Runge-Kutta の法

の2種類があり、(1)には Adam-Bashforth の公式、Levy の公式があり、これらは計算の出発点として正確な微分値が5個または4個、 x の等分点で与えられていることが必要である。

出発点を求める方法として級数展開法、Runge-Kutta の方法、Milne の方法がある。「積分進行法は所要の労力が少なく、人手で計算するのに適している。Runge-Kutta の方法は積分進行法に比

べ出発点を必要とせず、積分間げきの変更がまったく自由であるが、労力を多く必要とする欠点がある」。

以上は文献⁽⁸⁾の所説であるが、Runge-Kutta の方法は出発点に対する準備が不要で、簡明である特長があり、電子計算機を使用すると「労力を多く必要とする欠点」もなくなるので、この方法で計算を進めることにした。

4.2 計算に使用した Runge-Kutta の公式

Runge-Kutta の方法にはいろいろの形式があるが、使用したものは文献⁽⁷⁾に記述されている下記のようなものである。

筆者が解かんとする微分方程式では横座標は τ 、縦座標は θ であるが、文献のノーションそのままをとり、それぞれ x 、 y で、積分間隔は h で表わす。

解を求むべき微分方程式が

$$\frac{d^2y}{dx^2} = G(x, y, y')$$

の形で表わされるときは、その解は次式で示される。

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h}{6} (m_0 + m_1 + m_2)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{6} (m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)$$

ここに $m_0 = h G(x_n, y_n, y'_n)$

$$m_1 = h G\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h y'_n, y'_n + \frac{1}{2}m_0\right)$$

$$m_2 = h G\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h y'_n + \frac{1}{4}h m_0, y'_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$

$$m_3 = h G\left(x_n + h, y_n + h y'_n + \frac{1}{2}h m_1, y'_n + m_2\right)$$

4.3 Runge-Kutta 法の計算誤差

4.3.1 予備的検討

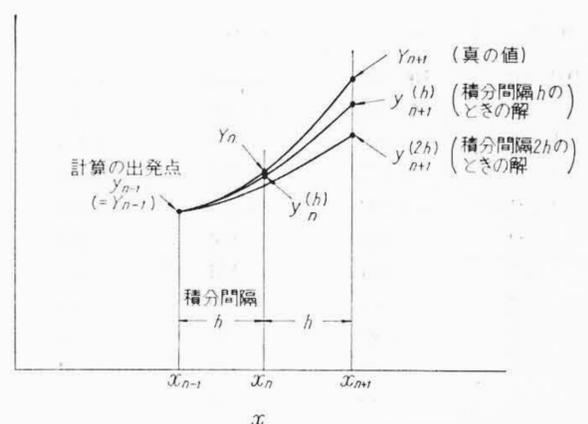
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad (\text{正しい解は } y = a \cos x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \quad (\text{正しい解は } y = a \exp(x))$$

を Runge-Kutta 法で、 x の積分間隔として 0.1 をとって積分を行なった結果は前者では $x = 2.0$ の点にて $a = 1$ として y が小数点以下7位目に誤差を生じ、後者では $x = 1.0$ および 2.0 の点にて y が小数点以下第6位および第5位で誤差を生ずるといふ未発表の社内の資料がある。いま筆者がここに計算せんとする問題は、この両者の混合に近いものと予想されるので、振動の一周期につき50区分くらいの積分間隔にすればよいと、大体的見当がつけられる。なお積分間隔についてはさらに具体的に次章で検討する。

4.3.2 計算誤差の算定

文献⁽⁷⁾⁽⁸⁾によれば第2図の y_{n-1} を基点として、 x の間隔、すなわち積分間隔を h で $y_n^{(h)}$ を求め、次に $y_n^{(h)}$ より間隔 h で $y_{n+1}^{(h)}$ を求めた場合と、 y_{n-1} を基点として2倍の間隔 $2h$ で求めた結



第2図 Runge-Kutta 法による計算値と積分間隔との関係説明図

果, $y_{n+1}^{(2h)}$ を比較すると当然前者のほうが正確で真値を Y_{n+1} とすると次の関係がある。

$$Y_{n+1} \div y_{n+1}^{(h)} + \frac{y_{n+1}^{(h)} - y_{n+1}^{(2h)}}{15} \dots\dots\dots (11)$$

したがって、同一計算方式で初期条件および間隔を変えて $y_{n-1} \rightarrow y_{n+1}^{(h)}$ および $y_{n-1} \rightarrow y_{n+1}^{(2h)}$ を求め、これらの値と誤差項である(11)式の第二項の計算値を100倍したものを念のためならべてプリントしておくようにした。

$$\tau, y_n^{(h)}, y_{n+1}^{(h)}, y_{n+1}^{(2h)}, \text{ERROR}$$

注: τ は横座標で、無次元化した時間, y は縦座標で(9)式の最初の回転角を1.0とした無次元化した回転角 θ にあたる。

5. 計算結果および検討

5.1 積分間隔

指針の最初の回転角 θ_0 を1.0, 減幅率 r を0.1として、回転角の減衰振動を計算したものに付き検討する。

第3図は積分間隔 $W=0.01$ として計算した結果で第5列の11行目までに、プリントされた絶対値で0.00001~2 (実際にはこの100分の1の値)の誤差が見える程度で、全部の計算結果が小数点第6位まで正確であることを物語っている。

第4図は積分間隔 $W=0.02$ として計算した結果で、誤差は $W=0.01$ の場合に比べて大きく、最後のけた2けた (実際にはこの100分の1の値)の誤差を生じているが、符号が正負であり、誤差は集積されないことが明らかである。

第1表は積分間隔 W を0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05の5種類について同様の計算をした結果の摘録である。

求めんとするものは、指針の回転角が眼で見えない値、たとえば $\theta_s=0.001$ を最後に通過する時間で、およその時間は余裕をみて、 $\tau=0.70\sim 1.20$ であるので、この付近の数値をとり、積分間隔 $W=0.01$ の場合との差をプロットしたものが第5図でこれより積分間隔は $W=0.03$ で十分であることが明らかになった。

この例における減幅率 $r=0.1$ ということは、半周期の振動について1/10に減衰することであるから、回転角が0.001になるのは1.5周期後である。

制動がよくない例として $r=0.316$ まで計算するとすれば $0.316^6=0.001$ であるから、半周期の6倍、すなわち3周期の振動の計算をすることになる。このときは積分間隔を前期の半分すなわち0.015にすれば、同程度の精度が得られることがわかる。

このような観点と積分間隔としてはんばな数値を避けるため、減幅率 $r=0.1$ 以下は積分間隔 $W=0.02$ とし、 $r=0.1$ をこえるものは $W=0.01$ として計算を進めることにする。

第1表 指針回転角 θ の減衰振動計算結果 (摘録)
(回転角の単位 0.00001)

時間 t	積分間隔 W				
	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000
0.12	47,535	47,535	47,532	47,527	
0.24	-1,385	-1,387	-1,395	-1,417	
0.36	-9,572	-9,573	-9,576	-9,586	-9,612
0.48	-3,294	-3,294	-3,292	-3,289	-3,284
0.60	599	600	601	606	617
0.72	851	851	851	852	856
0.84	202	202	202	201	199
0.96	-87	-87	-87	-88	-89
1.08	-71	-71	-71	-71	-71
1.20	0	0	0	0	0

注: (1) 指針の最初の回転角を1.0とし、減幅率0.1である場合の計算である。
(2) 表中実線以下は数値が一致している範囲、点線以下は最後のけたで1, すなわち0.00001の誤差で一致している範囲を示す。

5.2 制動常数および単位回転力が常数でない場合の計算

減幅率 $r=0.03$ (良好), 0.1 (普通), 0.3 (不良) の3種につき、空げき磁束密度変化率 c を $-0.5\sim +1.0$ の7段階に変え、合計21の場合につき回転角が最初の値の0.001になる時間、すなわち静止時間

0.020	0.99348	0.97515	0.97515	-0.00002
0.040	0.94677	0.90999	0.90998	-0.00001
0.060	0.86635	0.81731	0.81732	-0.00000
0.080	0.76419	0.70819	0.70819	-0.00000
0.100	0.65040	0.59177	0.59177	0.00000
0.120	0.53313	0.47535	0.47535	0.00000
0.140	0.41893	0.36444	0.36444	0.00000
0.160	0.31236	0.26301	0.26301	0.00001
0.180	0.21668	0.17357	0.17357	0.00001
0.200	0.13381	0.09747	0.09747	0.00001
0.220	0.06458	0.03812	0.03812	0.00002
0.240	0.00901	-0.01385	-0.01385	0.00000
0.260	-0.03358	-0.05034	-0.05034	0.00000
0.280	-0.06429	-0.07565	-0.07565	0.00000
0.300	-0.09454	-0.09122	-0.09122	0.00000
0.320	-0.09986	-0.09671	-0.09671	0.00000
0.340	-0.09992	-0.09671	-0.09671	0.00000
0.360	-0.09625	-0.09572	-0.09572	0.00000
0.380	-0.09231	-0.09216	-0.09216	0.00000
0.400	-0.08342	-0.07823	-0.07823	0.00000
0.420	-0.07271	-0.06656	-0.06656	0.00000
0.440	-0.06114	-0.05527	-0.05527	0.00000
0.460	-0.04945	-0.04375	-0.04375	0.00000
0.480	-0.03824	-0.03294	-0.03294	0.00000
0.500	-0.02791	-0.02318	-0.02318	0.00000
0.520	-0.01876	-0.01467	-0.01467	0.00000
0.540	-0.01092	-0.00752	-0.00752	0.00000
0.560	-0.00448	-0.00173	-0.00173	0.00000
0.580	0.00066	0.00273	0.00273	0.00000
0.600	0.00451	0.00599	0.00599	0.00000
0.620	0.00721	0.00818	0.00818	0.00000
0.640	0.00892	0.00945	0.00945	0.00000
0.660	0.00980	0.00997	0.00997	0.00000
0.680	0.00999	0.00989	0.00989	0.00000
0.700	0.00967	0.00935	0.00935	0.00000
0.720	0.00896	0.00851	0.00851	0.00000
0.740	0.00800	0.00746	0.00746	0.00000
0.760	0.00689	0.00631	0.00631	0.00000
0.780	0.00572	0.00514	0.00514	0.00000
0.800	0.00456	0.00401	0.00401	0.00000
0.820	0.00347	0.00296	0.00296	0.00000
0.840	0.00247	0.00202	0.00202	0.00000
0.860	0.00160	0.00121	0.00121	0.00000
X 0.880	0.00086	0.00054	0.00054	0.00000
X 0.900	0.00026	0.00001	0.00001	0.00000
X 0.920	-0.00021	-0.00039	-0.00039	0.00000
X 0.940	-0.00055	-0.00068	-0.00068	0.00000
X 0.960	-0.00079	-0.00087	-0.00087	0.00000
X 0.980	-0.00093	-0.00097	-0.00097	0.00000
1.000	-0.00099	-0.00100	-0.00100	0.00000
X 1.020	-0.00099	-0.00098	-0.00098	0.00000
X 1.040	-0.00095	-0.00091	-0.00091	0.00000
X 1.060	-0.00087	-0.00082	-0.00082	0.00000
X 1.080	-0.00076	-0.00071	-0.00071	0.00000
X 1.100	-0.00065	-0.00059	-0.00059	0.00000
X 1.120	-0.00053	-0.00048	-0.00048	0.00000
X 1.140	-0.00042	-0.00036	-0.00036	0.00000
X 1.160	-0.00031	-0.00026	-0.00026	0.00000
X 1.180	-0.00022	-0.00017	-0.00017	0.00000
X 1.200	-0.00013	-0.00000	-0.00000	0.00000
ZZ 1.200				0.00000

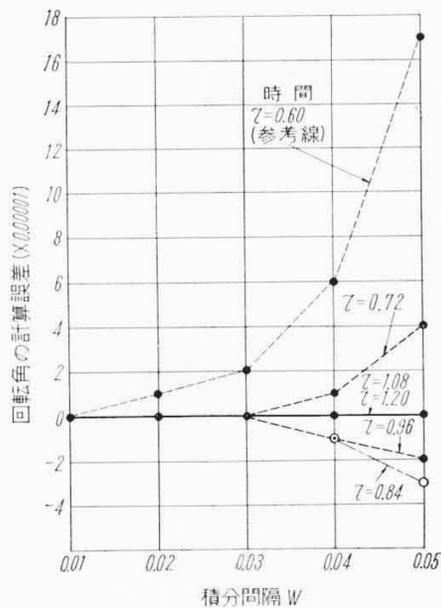
第3図 積分間隔 W を0.01として計算した場合の指針回転角の時間的経過

注: 最初の回転角1.0, 減幅率0.1

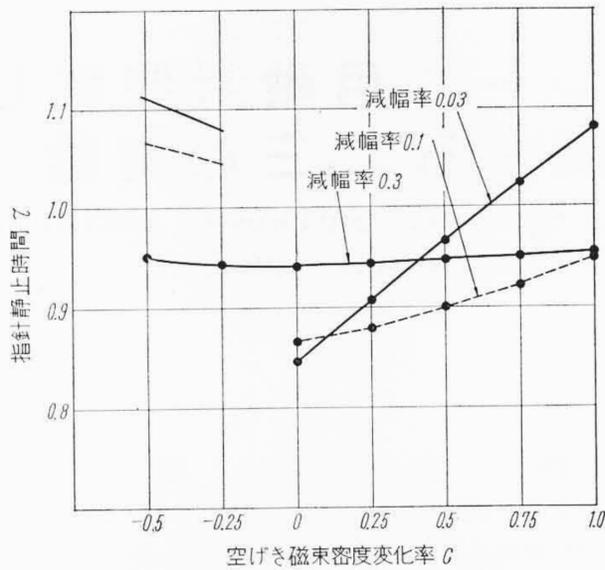
0.040	0.97516	0.90999	0.91010	-0.00074
0.080	0.81732	0.70819	0.70822	-0.00019
0.120	0.59177	0.47534	0.47532	0.00015
0.160	0.36444	0.26300	0.26295	0.00033
0.200	0.17355	0.09746	0.09740	0.00037
0.240	0.03510	-0.01387	-0.01392	0.00034
0.280	-0.05036	-0.07564	-0.07568	0.00026
0.320	-0.09123	-0.09872	-0.09875	0.00018
0.360	-0.09971	-0.09573	-0.09574	0.00000
0.400	-0.08816	-0.07823	-0.07823	0.00004
0.440	-0.06698	-0.05526	-0.05526	0.00000
0.480	-0.04375	-0.03294	-0.03294	-0.00003
0.520	-0.02317	-0.01466	-0.01466	-0.00004
0.560	-0.00751	-0.00173	-0.00172	-0.00004
0.600	0.00274	0.00600	0.00600	-0.00003
0.640	0.00819	0.00946	0.00946	-0.00002
0.680	0.00997	0.00989	0.00989	-0.00001
0.720	0.00935	0.00851	0.00851	-0.00000
0.760	0.00746	0.00631	0.00631	-0.00000
0.800	0.00514	0.00400	0.00400	0.00000
0.840	0.00296	0.00202	0.00202	0.00000
X 0.880	0.00121	0.00054	0.00054	0.00000
X 0.920	0.00000	-0.00040	-0.00040	0.00000
X 0.960	-0.00068	-0.00087	-0.00087	0.00000
1.000	-0.00097	-0.00100	-0.00100	0.00000
X 1.040	-0.00098	-0.00091	-0.00091	0.00000
X 1.080	-0.00082	-0.00071	-0.00071	0.00000
X 1.120	-0.00059	-0.00048	-0.00048	-0.00000
X 1.160	-0.00036	-0.00026	-0.00026	-0.00000
X 1.200	-0.00017	-0.00000	-0.00000	-0.00000
ZZ 1.200				0.00000

第4図 積分間隔 W を0.02として計算した場合の指針回転角の時間的経過

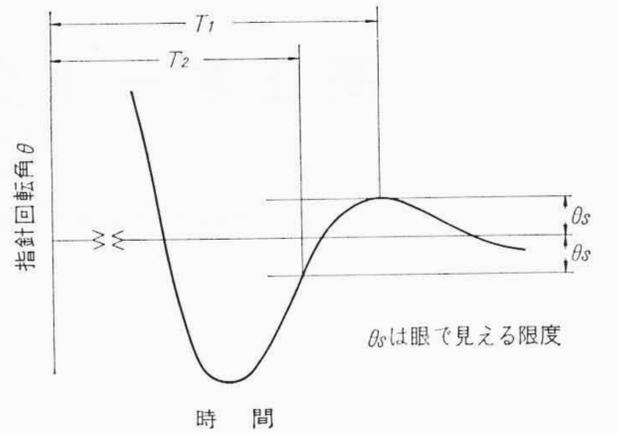
注: (1) 最初の回転角1.0, 減幅率0.1
(2) ERRORの列, 上から9行目は0.00010のミスプリントである (プリンターのミス)



第5図 積分間隔と計算誤差



第6図 制動常数および単位回転力が指針の回転により変化する場合の指針静止時間



第7図 指針静止時間の飛躍説明図

第2表 指針始動点における制動常数比

減幅率 r	制動常数比 k	磁束密度変化率 c						
		1.00	0.75	0.50	0.25	0	-0.25	-0.50
0.03	0.75	2.12	1.74	1.38	1.05	0.75	0.49	0.27
0.10	0.59	1.67	1.37	1.08	0.82	0.59	0.38	0.21
0.30	0.35	0.99	0.81	0.64	0.49	0.35	0.23	0.13

注：(1) 制動常数比 $= N/2\sqrt{MI}$
 1.0 をこえるものは過制動
 1.0 に等しいものは臨界制動
 1.0 未満のものは不足制動である。
 (2) 第1列および第2列の減幅率、制動常数比は静止点における値である。

を計算した結果を図示すれば第6図となる。

減幅率 $r=0.03$ の場合は c の変化による指針静止時間の変動が大きく、 $r=0.1$ の場合はこれより小さいが、そのいずれも不連続性*が見られる。 $r=0.3$ の場合は連続で、かつ変動が少ない。

この第6図よりいえることは、 $r=0.03$ 、 $c=-0.5$ の一点以外はいずれも $\tau=0.8\sim 1.1$ の範囲にはいつていることである。

すなわち、指針の始動位置における制動常数および単位回転力がそれぞれ静止位置における値の $1/4\sim 4$ 、 $1/2\sim 2$ に変動しても、静止点付近で不足制動であれば、静止時間は制動常数および単位回転力が指針の回転によって変動しない場合と同じ考え、換言すれば同じ式で計算してよいことを示している。

なお、始動位置では第2表のようにかなりの過制動状態にあることは注目すべきことで、計算結果があまり大きく影響を受けないことは、指針が過制動の状態を始動初期の短時間で脱するためであると考えられる。

ここに求めたものは $\theta_s=0.001$ とした場合であるが、 $\theta_s=0.00316$ 、 0.000316 の場合にもあてはまることは、 $c=0$ のときの $\theta_s=0.00316$ 、 0.001 、 0.000316 の静止時間を示す第1図よりも明らかである。このことはさらに拡張してこの範囲ならば θ_s に無関係に成立すると考えてよい。

また本論は制動常数および単位回転力が $(1+c\theta)^2$ および $(1+c\theta)$ に比例して変化する場合についてのものであるが $(1+c\theta+d\theta^2+\dots)$ のような回転角に関し複雑な変化をしても、この結論に変更を要しないことも推察できると思う。

絶縁抵抗計の指針静止時間は、目盛板上 0.1 mm に相当する回転角を θ_s としてとれば、設計値が実測値とよく一致することは、製造の実際より経験のあることであるが、これは以上の推論の妥当性を

* 第7図において振動の半周期の整数倍で回転角がちょうど眼で見えない限度 θ_s に等しい場合の静止時間は T_1 であるが、もしその点においてわずかにこの限度に達しなければ、静止時間は T_2 に飛躍して小さくなるので、不連続性ができるわけである。

示しているものとみる。

6. 結 言

以上述べたことは総括すれば

(1) 制動常数および単位回転力が指針の運動中に変化しても、その影響は少ないことが明らかとなった。したがって指針が静止する位置付近が不足制動の領域であるかぎり、 $+10\%$ 、 -20% の誤差を認容し制動常数および単位回転力を常数として求めた静止時間の計算式(4)にて計算して実用上十分であることが確認できた。

$$T = \frac{2I}{N} \log \frac{\theta_0}{\theta_s} \dots \dots \dots (4)$$

ここに T : 静止時間 (s)

I : 可動部の回転慣性能率 ($\text{g}\cdot\text{cm}^2$)

N : 指針静止位置における制動常数 ($\text{dyne}\cdot\text{cm}/\text{rad}\cdot\text{s}$)

θ_0 : 最初の回転角

θ_s : それ以下は見えないと考えられる回転角 (たとえば目盛板上 0.1 mm にあたる回転角)

(2) Runge-Kutta 法によれば、一般解の得られぬ非線形の二次微分方程式も電子計算機で希望の精度で計算することは大した苦勞なくしてできる。

昭和22年に指針の静止時間の計算法を発表して以来なんらかの方法により制動常数および単位回転力が変数の場合についても求めたいと念願したことがここに明らかにすることができた。

指針の静止時間は計器の品位を表わす一要素であるだけに、計算式の重みを増したことは計器の設計に益するところがあると信ずるとともに、非線形の微分方程式の数値解を得ようとする方々の参考になれば幸いである。

筆者は数値積分の経験がないので、中央研究所島主任研究員、新谷氏、日立研究所越智氏に教えを受けた。また日立研究所木村氏には電子計算機によるテストランやデバッキングなどの労をとってもらった。ここに記してこれらの諸氏に厚く謝意を表するものである。

参 考 文 献

- (1) 北川: 電気評論 35, 144~147 (昭22-9)
- (2) 北川: 絶縁抵抗計 109~114 (昭29-9 コロナ社)
- (3) たとえば Drysdale & Jolley: Electrical Measuring Instruments, 1, 73~89 (1923)
- (4) 青木, 友田: 電気計器上巻 121 (昭13)
- (5) 柴垣: 常微分方程式の数値解法 (昭17-5 岩波)
- (6) 柴垣: 実用数字 197~201 (昭33-8 共立)
- (7) F. B. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, 236~239 (1956 Mc Graw-Hill)
- (8) 乗松: 数値計算法 184~223 (昭33-6 電気書院)