

電子計算機による配管系の熱応力解析

Thermal Stress Analysis of Piping System with Digital Computer

二 宮 敏*
Satoshi Ninomiya

内 容 梗 概

IBM 7070 により配管系の熱応力解析を行なうプログラムを作成した。本プログラムにより普通に表われるほとんどの配管系の熱応力解析は手計算をなんら加えることなく解くことができる。またさらに複雑化した配管系については多少の人力計算を加えれば同様なプログラムで解くことができる。

計算時間は枝分かれ数 5 本、配管の構成要素 54 という実際に火力プラントに表われるかなり複雑な配管の場合で約 200 秒である。また計算途中の誤差はおおよそ 0.1% 以下である。

1. 緒 言

火力発電設備の高圧高温化、あるいは石油精製などの化学プラントの巨大化に伴い配管系の熱応力解析の重要性が増大しつつある。この問題は早くより理論的にはほとんど解決済の問題であるが、手計算で行なうと簡単な配管系でも数十時間、大形配管では 2～3 週間、専任の計算者をあてる必要があり、実際問題としては使用困難なものであった。そのため従来は簡単に行なえる近似計算が多用され、上記の厳密解はほとんど使用されなかった。しかし近年デジタル計算機の発達普及によりようやくこの解析法を配管の設計に利用することが可能になった。

日立製作所においても一昨年末 IBM 7070 が導入されたのでこの問題を電子計算機にプログラミングすることが企てられ、今回完成を見たのでその概要を報告し、この種のプログラムを企画されておる各位の参考に供したい。

2. 配管系の熱応力解析理論

今回のプログラム作成に際しその基礎となった解法は米国ケロッグ社にて開発した方法⁽¹⁾である。次に以後の説明に必要な程度に簡単にその理論を要約する。

理論には次のような若干の仮定を含んでいる。

- (1) 配管素材は等方性でフックの法則に従うものとする。
- (2) 熱膨張量は配管系の大きさに比べて無視できるものとする。

第 1 図に示すように配管の一端を固定した状態で他端の固定をはずして自由にした場合、熱膨張による変位を生じ点線の状態になったものとする。ここでふたたび B 点を A 点に一致させるように外力（力およびモーメント）を加えたとしてその外力を求めれば、それは配管系が熱膨張により伸びたとき固定端より受ける反力およびモーメントに等しい。上に述べたことから当然わかるようにこの考え方は熱応力に限らず配管系を自由な状態から変位を与えて拘束するようすすべての問題に適用できる。

配管系には外力を加えたときのひずみエネルギーは

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l Q(M_b^2 + M_b'^2 + 1.3 M_t^2) dl \dots \dots \dots (1)$$

ここに W : ひずみエネルギー

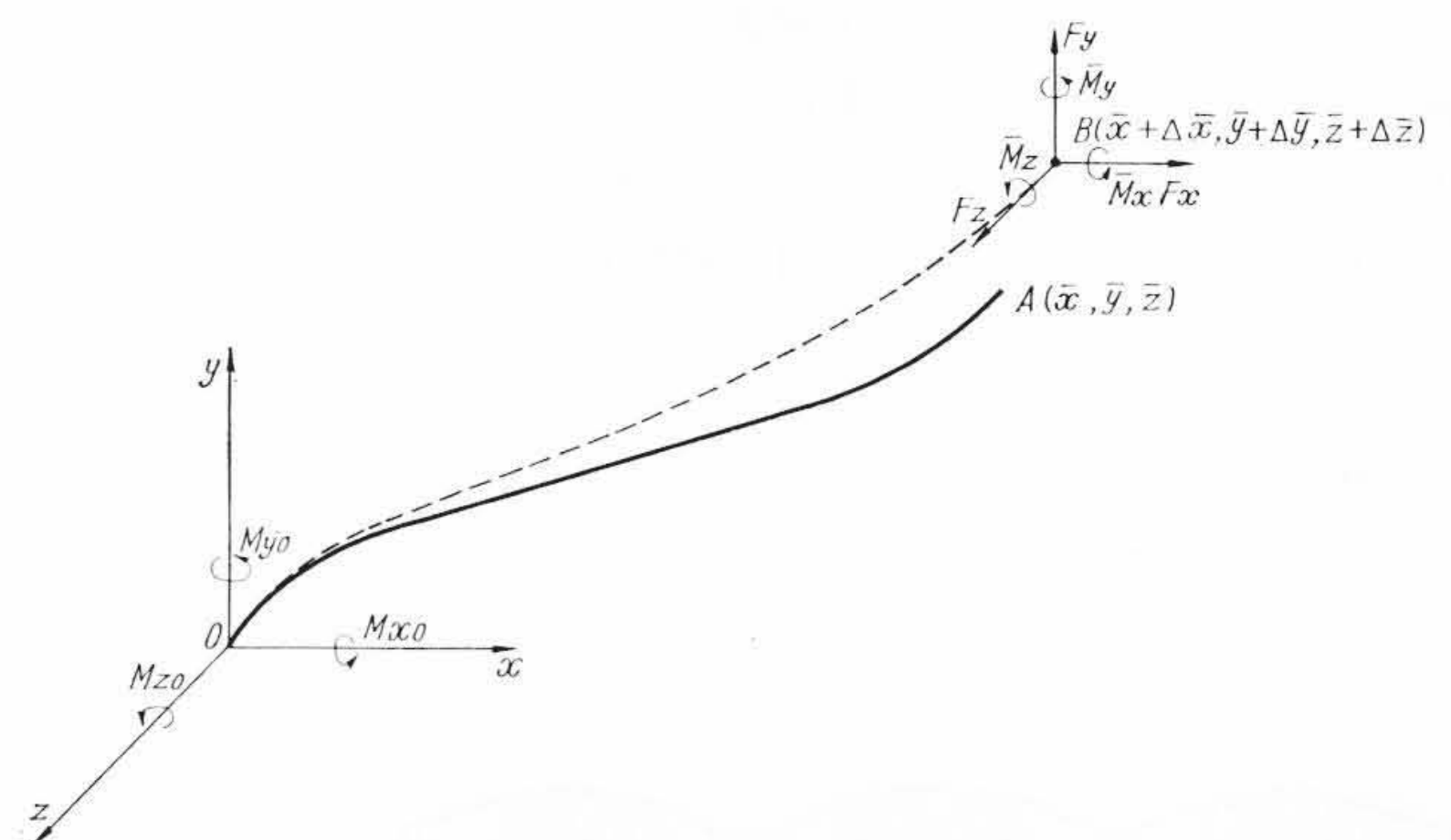
E : 基準点のヤング率

I : 基準点の断面二次モーメント

l : 配管の軸に沿ってとった線座標

$Q = \frac{EI}{E'I'}$

E' : l の点のヤング率



第 1 図 配管の熱応力解析理論の原理図

I : l の点の断面二次モーメント

M_b : l の点の曲げモーメント

M_b' : M_b に直角な方向の曲げモーメント

M_t : l の点の軸方向ねじりモーメント

B 点に加える外力を図のように $F_x, F_y, F_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ とし、座標 (x, y, z) の点の M_b, M_b', M_t を $F_{x(y,z)}, \bar{M}_{x(y,z)}$ にて表わして (1) 式に代入し、 W を $F_{x(y,z)}, \bar{M}_{x(y,z)}$ で偏微分してカステリリアノの定理を適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{M}_{x(y,z)}} &= -\Delta \bar{\theta}_{x(y,z)} \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{F}_{x(y,z)}} &= -\Delta \bar{x}(y, z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

これを整理すれば

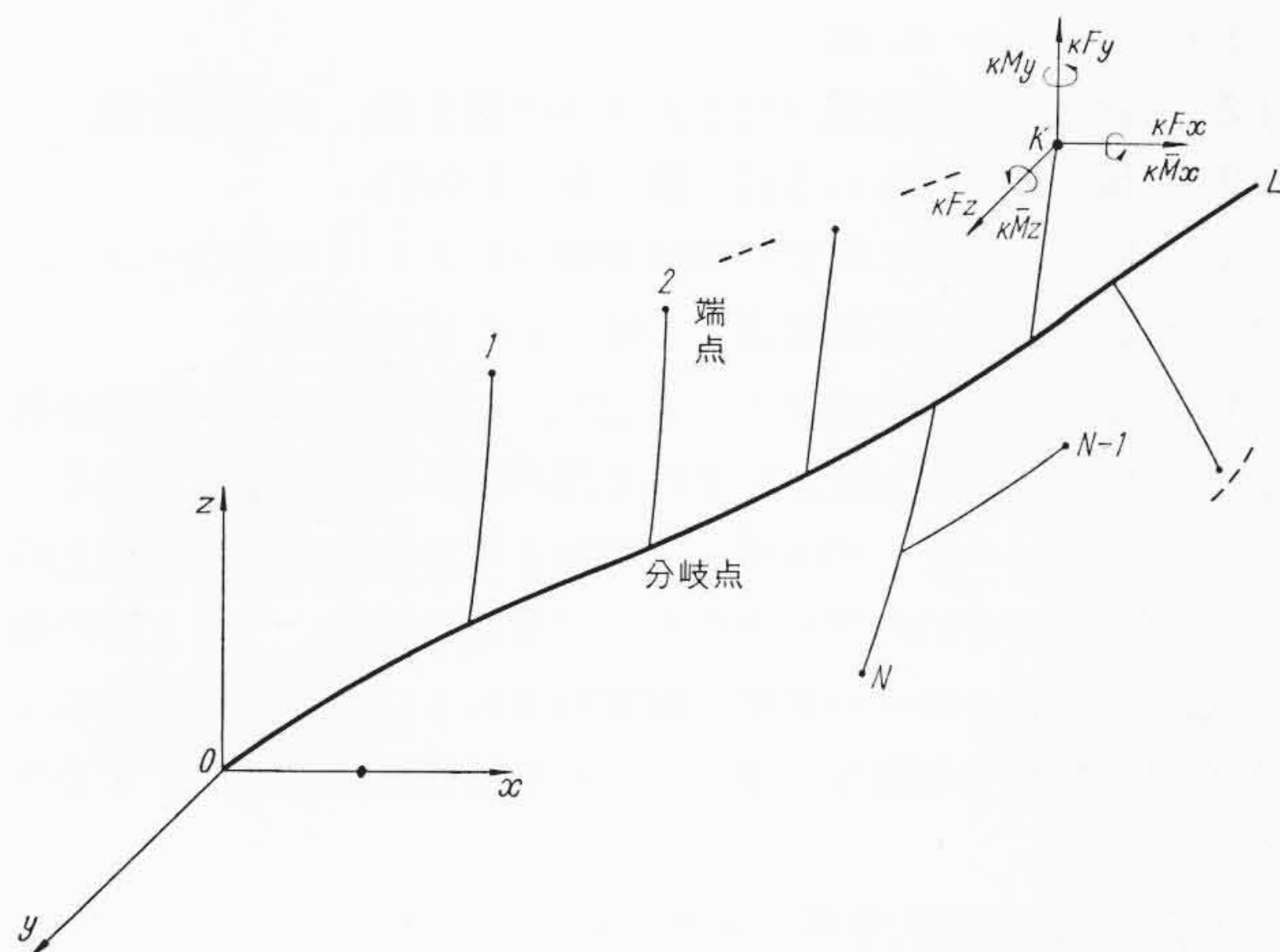
$$[a_{ij}][p_i] = -EI[\Delta_i] \dots \dots \dots (3)$$

ここに $[a_{ij}]$: 配管を構成する各要素の形、座標上の位置およびヤング率により定まる (6×6) 元の行列である。

$$[\Delta_i] = -EI \begin{bmatrix} \Delta \bar{\theta}_x \\ \Delta \bar{\theta}_y \\ \Delta \bar{\theta}_z \\ \Delta \bar{x} + \bar{y} \cdot \Delta \bar{\theta}_z - \bar{z} \cdot \Delta \bar{\theta}_y \\ \Delta \bar{y} + \bar{z} \cdot \Delta \bar{\theta}_x - \bar{x} \cdot \Delta \bar{\theta}_z \\ \Delta \bar{z} + \bar{x} \cdot \Delta \bar{\theta}_y - \bar{y} \cdot \Delta \bar{\theta}_x \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

$$[p_i] = \begin{bmatrix} \bar{M}_x - F_y \cdot \bar{z} + F_z \cdot \bar{y} \\ \bar{M}_y - F_z \cdot \bar{x} + F_x \cdot \bar{z} \\ \bar{M}_z - F_x \cdot \bar{y} + F_y \cdot \bar{x} \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x0} \\ M_{y0} \\ M_{z0} \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

* 日立製作所日立工場



第2図 枝分かれN本の配管系

(5)式の $M_{x(y,z)0}$ は原点の配管に加えられるモーメントである。
(3), (4), (5)式において両端固定の場合は $\Delta\bar{\theta}_{x(y,z)}$ が零となるから $M_{x(y,z)0}$, $F_{x(y,z)}$ を未知数とする6元連立一次方程式が得られる。またA点が単なる支持の場合には $\Delta\bar{\theta}_{x(y,z)}$ が未知数として残るが(5)式の上半分で $\bar{V}_{x(y,z)}$ が零となるのでこの3式をも考えに入れて $\Delta\bar{\theta}_{x(y,z)}$, $M_{x(y,z)0}$, $F_{x(y,z)}$ を未知数とする9元連立一次方程式となる。

配管の枝分かれがある場合にはたとえば第2図においてK点に加えた外力によるK点の変位とK点以外の点に加えた外力によるK点の変位の和を、K点を自由にしたときのK点の熱膨張変位の符号を逆にしたものに等しいと置けば6個の式をうる。これをKが1からNまで求めると6N個の式((3)式に相当するもの)をうる。

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,L} & \cdots & A_{1,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{K,1} & \cdots & A_{K,L} & \cdots & A_{K,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,L} & \cdots & A_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_K \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = -EI \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_K \\ \vdots \\ D_N \end{bmatrix} \quad \text{..... (6)}$$

ここに A_{KL} : 原点からK枝およびL枝に至る経路において共通の部分の(3)式 $[a_{ij}]$ に相当する行列

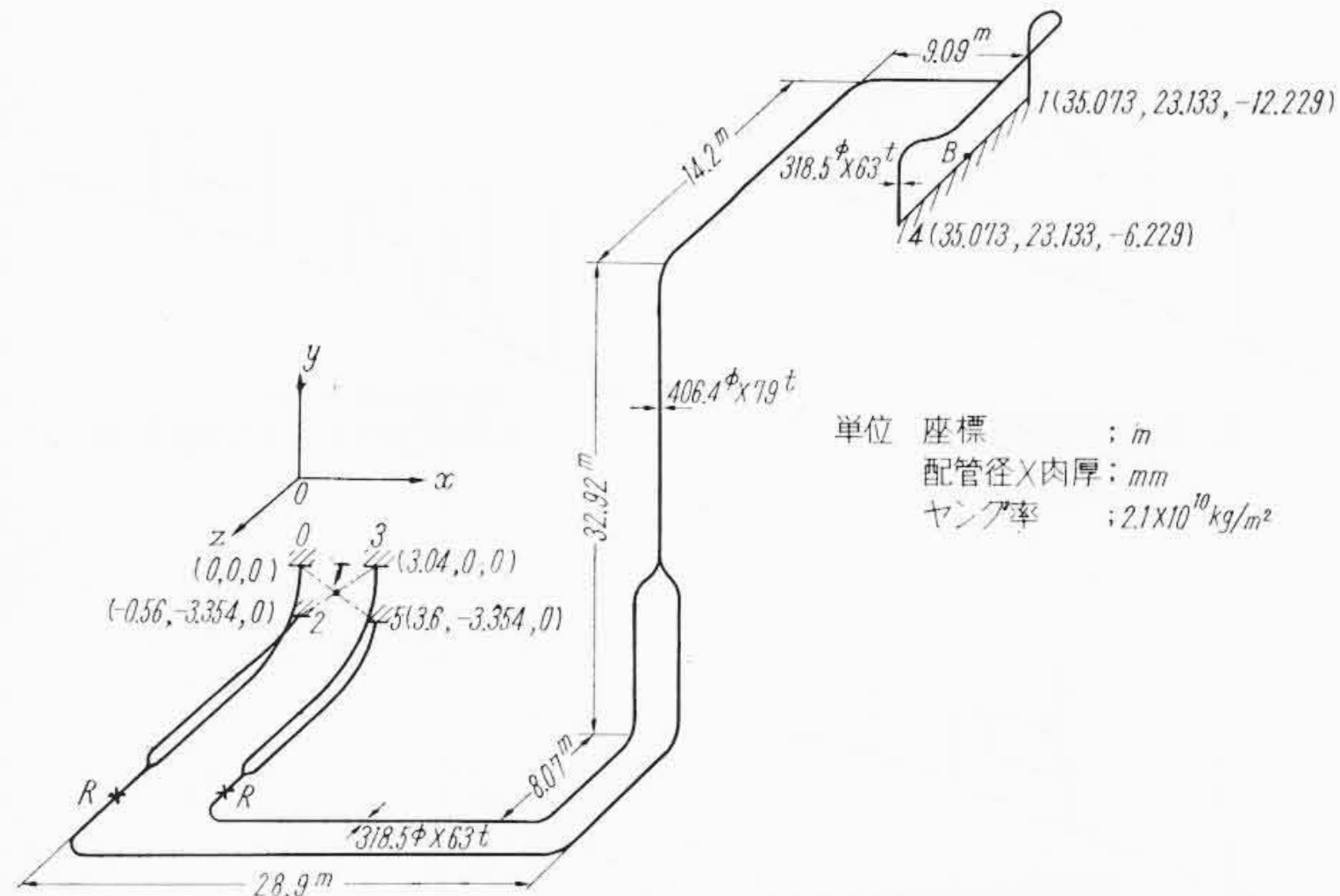
P_K : K点の変位により原点に生ずるモーメントおよびK点に生ずる反力((5)式に相当する)

D_K : K点の熱膨張変位((4)式に相当する)

したがってここでも次式は成立する。

$$KM_{x(y,z)0} = K\bar{M}_{x(y,z)} - KF_{y(z,x)} \cdot K\bar{z}(\bar{x}, \bar{y}) + KF_{z(x,y)} \cdot \bar{y}(\bar{x}, \bar{z}) \quad (K=1 \sim N) \quad \text{..... (7)}$$

結局一般に(6), (7)式に適当な拘束条件を入れて(6N+3N)元



第3図 火力プラント主配管の一例(枝分かれ数5, 第2種)

の連立一次方程式が得られるのである。

上記の式を解けば端点の反力およびモーメントが求められる。これが求まると各点の移動量を求めることができる。これは基本的には移動量を求めようとする点に仮想的に外力(力およびモーメント)を加え、この外力によるこの点の変位および他の配管にかかる外力によるこの点の変位の和を求め、しかるのちこの点に加えた仮想外力を零と置けばよい。したがって今変位を求めたい点を第2図の(N+1)点とすると

$$EI[D_{N+1}] = [A_{N+1,1} \cdots A_{N+1,K} \cdots A_{N+1,N}] \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_K \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} \quad \text{..... (8)}$$

このうち右辺はすべて既知であるからこの6個の式より6個の変位量 $\Delta\theta_{x(y,z)}$, $\Delta x(y,z)$ が求められる。

また配管中の任意の点 (x, y, z) にかかるモーメントは

$$M_{x(y,z)} = \sum_{K=1}^N (KM_{x(y,z)0} + KF_{y(z,x)} \cdot Z(x, y) - KF_{z(x,y)} \cdot y(z, x)) \quad \text{..... (8)}$$

として求められる。

3. プログラム概要

前章に述べたところからもわかるように配管の熱応力解析は大きく分けて次の四つの部分に分かれる。

- (1) (6×6) 行列 $A_{K,L}$ を求めて連立方程式を作成する。
- (2) 連立方程式を解き各点の反力およびモーメントを求める。
- (3) 配管各部の応力を求める。

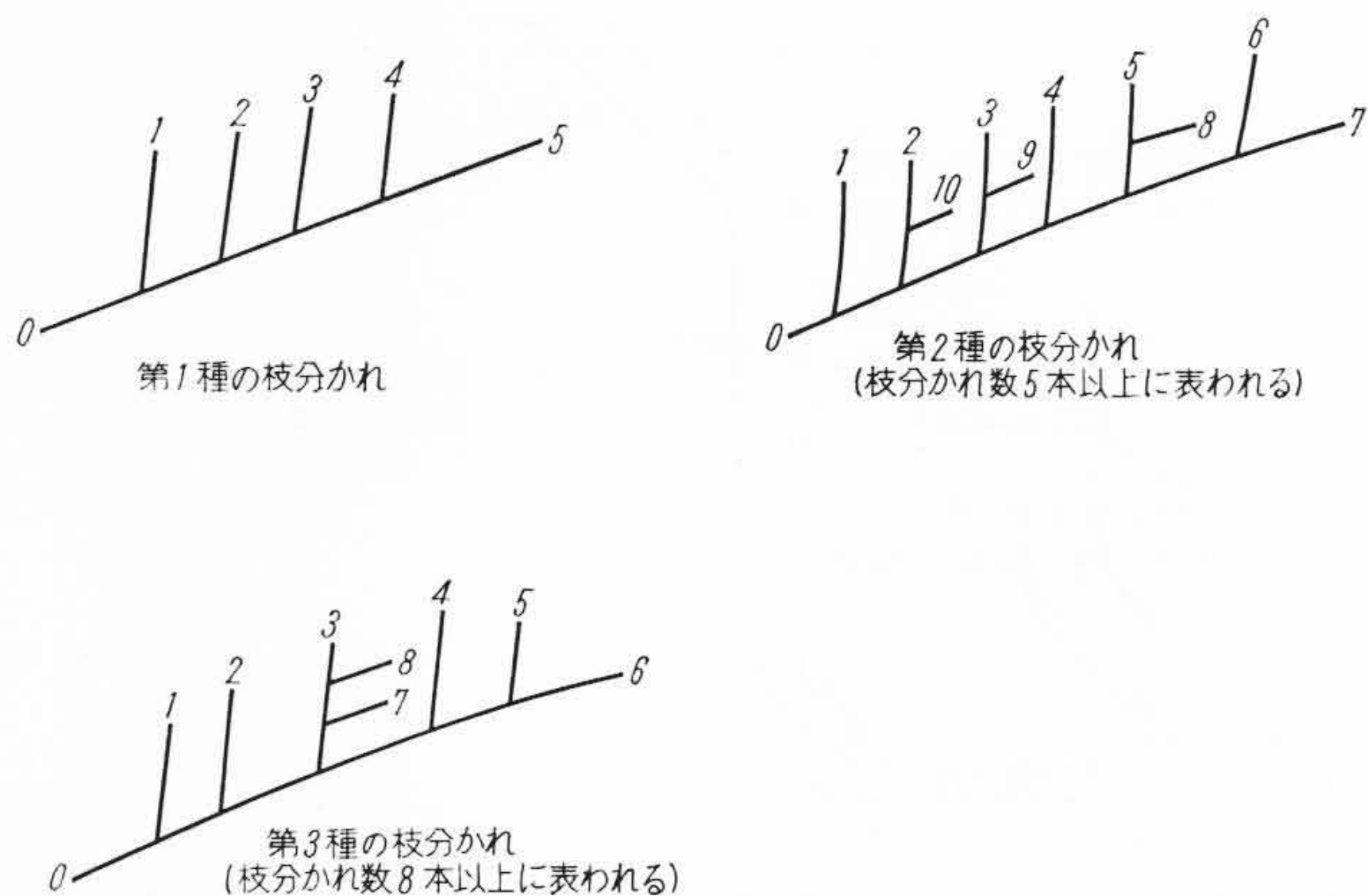
第1表 第3図についての解析例(ただし $\bar{M}_{x(y,z)T}$, $\bar{M}_{x(y,z)B}$ はそれぞれT点, B点が配管より受けるモーメント)

(30元連立方程式の解) (コールド・スプリング 2/3 を取った場合のコールド状態での解)

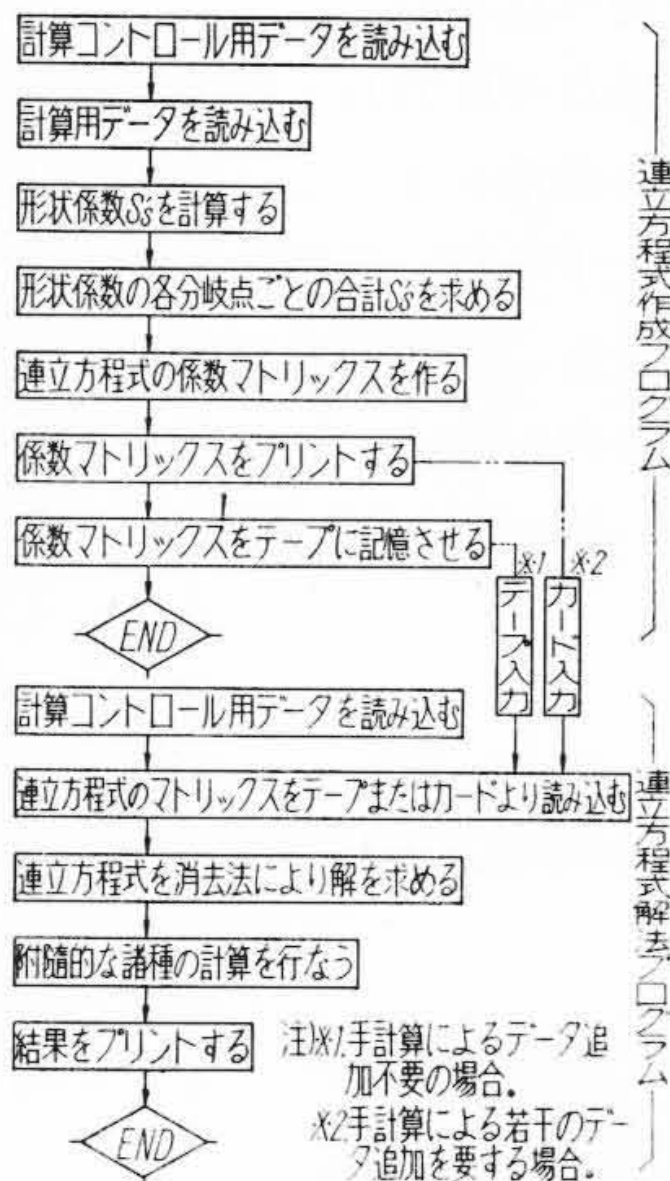
配管端点番号	Mx_0 (kg-m)	My_0 (kg-m)	Mz_0 (kg-m)	Fx (kg)	Fy (kg)	Fz (kg)
1	-0.281094×10^4	0.139073×10^4	-0.546385×10^4	-0.192173×10^3	-0.299269×10^3	0.308490×10^2
2	-0.755386×10^4	-0.171396×10^4	-0.298182×10^4	0.271630×10^2	0.418228×10^3	0.160615×10^4
3	0.122595×10^4	-0.622663×10^2	0.771969×10^2	-0.182902×10^1	-0.659111×10^2	-0.292261×10^2
4	0.334942×10^3	0.207783×10^4	0.999048×10^4	0.500212×10^3	0.649715×10^3	-0.145065×10^3
5	0.362758×10^3	0.131497×10^3	-0.538909×10^3	-0.491496×10^2	-0.689708×10^2	0.409158×10^2

(配管の受ける反力) (コールド・スプリング 2/3 を取った場合のコールド状態での反力)

配管端点番号	$\bar{M}x$ (kg-m)	$\bar{M}y$ (kg-m)	$\bar{M}z$ (kg)	Fx (kg)	Fy (kg)	Fz (kg)
0	-8,441.2	1,823.8	1,083.1	-284.2	-633.8	-1,503.6
1	135.2	122.6	9,478.0	} Fx, Fy, Fz は連立方程式の解そのままである。		
2	-2,166.8	-2,613.4	-2,838.7			
3	1,226.0	826.2	277.6			
4	-356.3	-6,125.9	-1,225.6			
5	500.0	278.8	-125.7			
T	14,214.8	-456.2	-3,588.3			
B	3,068.1	3,156.3	-8,252.4			



第 4 図 配管系の枝分かれの種類



第 5 図 配管系の熱応力解析のプログラム

(4) 配管系各部の変位を求める。

今回のプログラミングでは(1)，(2)を計算することを目的としてプログラムを作成したが将来(3)，(4)をプログラムするときも多少の変更で容易に今回のプログラムと有機的に関連しうようになっている。

第 3 図の例について本プログラムにより解くと第 1 表のようになる。この場合配管は 5 本の枝分かれであって 30 元の連立方程式が得られるのであるが簡単のために記載は省略する。なお第 1 表中 $\bar{M}_{xt}$ が多少大きく出ている。許容値がこれより小さい場合にはたとえば第 3 図の R 点に y 方向の拘束を入れるなど、適当な拘束条件を追加することによって配管の反力を許容値に入れることができる。本プログラムでも多少の手計算を加えればこのような問題も解くことができるようになっている。

3.1 連立方程式作成プログラム

プログラムの作成にあたり枝分かれの仕方を分析すると第 4 図のようになる。これは(6)式の A_{KL} なる $[6 \times 6]$ 行列を求める際計算のステップをコントロールするために必要となる。今回のプログラムでは 6 本以下の枝分かれを考慮したので第 2 種の枝分かれ中小枝のついた枝が 1 本だけあるような配管系までをプログラムの対象とした。

以下本プログラムを第 5 図のブロック線図の順を追って説明する。

3.1.1 入力プログラム

入力としてはコントロール用データと行列 A_{KL} を求めるための配管の形状、座標上の位置、ヤング率などの計算用データとがある。コントロール用データは次のようなものである。

- (1) 枝分かれ数
- (2) 枝分かれの種類 (たとえば 1 は第 1 種，2 は第 2 種)
- (3) K 枝より分かれる枝の数 ($K=1 \sim N$)
- (4) 原点から順に配管の構成要素 (たとえば 1 個のベント，1 本の直管などで以下配管素子と呼ぶ) に付けた番号

(1) は連立方程式の大きさを規定し，(2)(3)(4) は形状係数の積分値である行列 A_{KL} を求める際の積分の限界を規定する。

計算用データとしてはヤング率および各配管素子の座標上の形状を決定するためのデータたとえば両端の座標，ベント管の曲率中心の座標およびその角度，配管の径および厚さ，熱膨張により各端点が移動する量など要するに形状係数計算に必要とするデータである。

3.1.2 連立方程式作成プログラム

入力プログラムの段階で与えられたデータにより各分岐点および端点までの形状係数の和を求め順次テープに記憶させる。これが終わるとふたたびテープに入れた形状係数を呼び出し(6)式の条件に従って A_{KL} を計算する。結果として(6)式の左辺の行列 $[A_{KL}]$ が得られるからこれを出力としてプリントするとともに次の連立方程式を解くプログラムでデータをパンチカードで入力する必要がないようにテープに記憶させる。

3.2 連立方程式解法プログラム

連立方程式は普通用いられる消去法により解くが行列の元数が非常に大きいので消去しようとする列のうちで絶対値が最大のものを選んでそれを基準行としこれにより他の行を消去する方法を用いている。

3.2.1 入力プログラム

カードにより読み込むデータはコントロール用のデータとしてあらかじめわかる方程式の元数のみである。計算の対象となる行列はさきに連立方程式作成プログラムで，テープに入れたデータをそのまま読み込む。

3.2.2 連立方程式計算プログラム

普通に用いられる消去法である。詳しくは文献⁽²⁾を参照されたい。

4. 計算の誤差および所要時間

IBM 7070 は有効数字 8 けたの状態で計算が続けられる。

したがって連立方程式作成プログラムのように単純な 4 則演算と若干の三角関数の計算を数回あるいは数十回繰り返すことによって得られる結果はデータとして与える入力の誤差に比べて無視して支障はない。

誤差を生じるのは連立方程式解法の途中に現われる加減算が主である。 N 元の連立一次方程式を消去法で解く場合，行なわれる加減算は $\frac{1}{3}N(N+1)(N-1)$ 回，乗除算は $\frac{N}{6}(N+1)(2N+1)$ 回であるが，1 個の解を計算するときその数値がこうむる計算は乗除算は N^2 回，加減算は $N(N-1)/2$ が最大である。一方計算機の記憶装置は 8 けたであるから，たとえば 100 元の連立方程式を解く場合でも乗除算により積算される誤差は 0.1~0.01% である。加減算の場合には誤差はこのように一意的に計算できない。すなわち一回の演算の結果その絶対値が減少する場合には誤差は増大し，絶対値が増加する場合には誤差は減少するか，あるいは元のままである。したがって加減算による誤差はその連立方程式の特性により異なるので一概にいけないのであるが，得られた解を最初の連立方程式に代入して左辺の値を求めそれを右辺の値と比較してみる。すなわち，

$$[a_{ij}][x_i] = [c_i] \quad (i=1 \sim N, j=1 \sim N) \dots\dots\dots (9)$$

を連立方程式とするとき，これを解いて得た解 $[x_i]$ を用いて

$$\varepsilon = \left[\frac{\sum_{i=1}^N \left\{ \left| \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot \bar{x}_j \right| - |c_i| \right\}^2}{\sum_{i=1}^N c_i^2} \right]^{\frac{1}{2}} \times 100 \quad (\%) \quad \dots\dots (10)$$

なる ε を誤差の目安として考える。これを実際の主蒸気配管（4本の枝分かれ，24元連立一次方程式）の場合の解について計算してみると約0.03%となった。この程度の値ならば実用上支障ないものと考えられる。

また計算時間は枝分かれ5本，配管素子総数54で第2種の枝分かれの場合，30元の連立方程式を求めるのに90秒，連立方程式を解くのに50秒を要した。

5. 拘束条件

以上述べたように配管系の熱応力は一応求められるのであるがここでは配管途中の拘束条件についてはなんら触れなかった。しかしながら実際の配管においては途中にハンガー，サポートなど好むと好まざるとにかかわらず配管系に拘束を与えるもの，あるいは拘束を意図して入れるストップ，ガイドなどがはいる⁽³⁾。このような条件をどのように見込むかについて以下に述べる。

いかなる拘束条件にも共通する点は拘束点を一つの枝分かれと考え，枝分かれしたのちの配管素子が無限に小さくなって枝の端点が枝の起点に一致したと考えるのである。したがって今このようにして(6)，(7)式に相当する連立方程式が求められたものとして以下の議論を進める。

4.1 ロッド

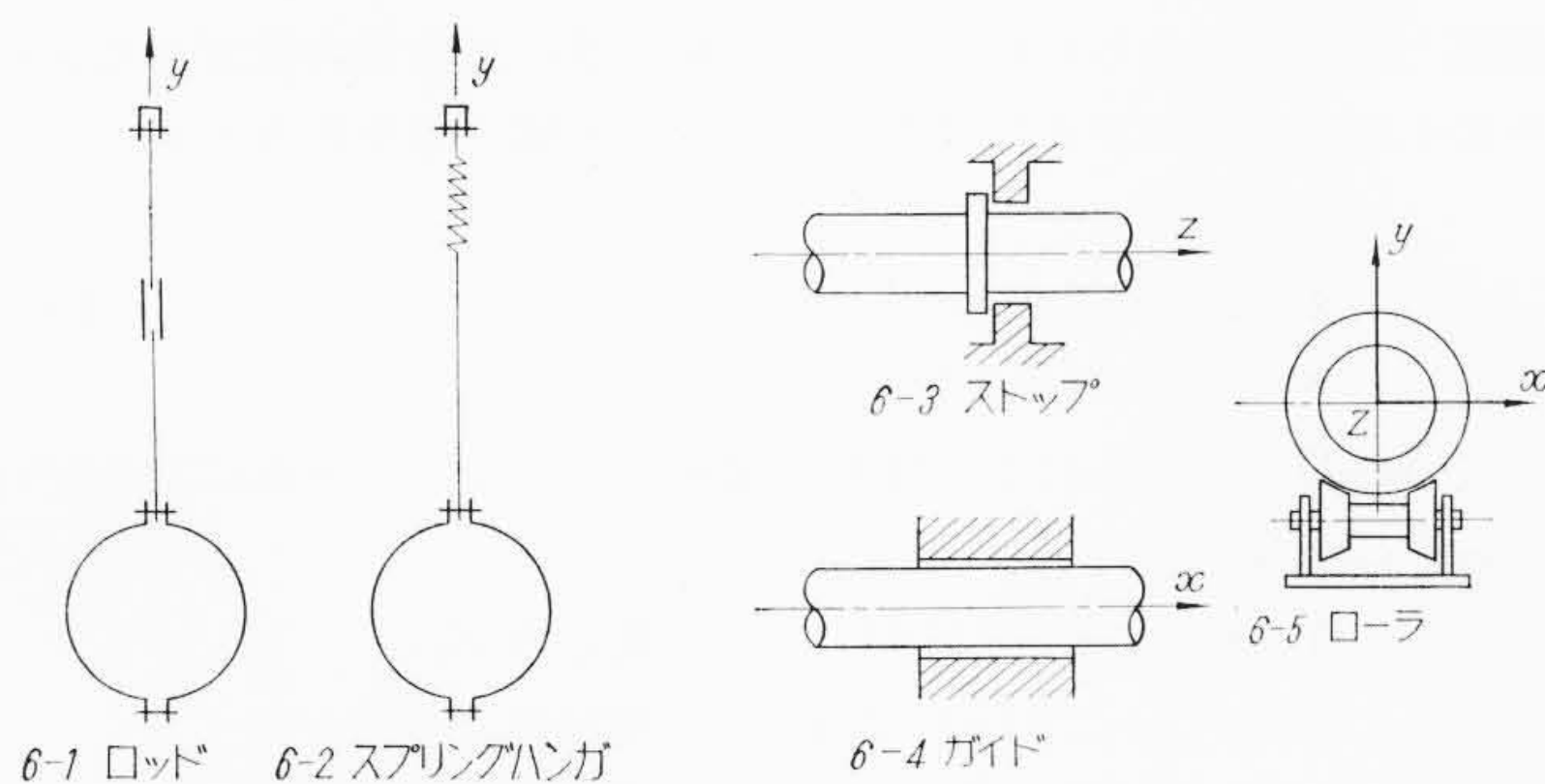
第6-1図の場合 $F_{x(y,z)}$ ， $\bar{M}_{x(y,z)}$ ， $M_{x(y,z)0}$ ， $\Delta x(y,z)$ ， $\Delta \theta_{x(y,z)}$ の15個のうち $\bar{M}_{x(y,z)}$ ， $F_{x(z)}$ は零， Δy は端点と同様にして計算できるから未知数は9個となり方程式を解くことができる。

4.2 スプリングハンガ

第6-2図に示すような配管の場合， $\bar{M}_{x(y,z)}$ および $F_{x(z)}$ を零とし， k をスプリングのバネ定数とし

$$F_y = -k \Delta y \quad \dots\dots (11)$$

と置けばロッドの場合と同様15個のうち9個の未知数が残るから連立方程式を解くことができる。スウェー・ブレースの場合も同様である。



第6図 配管系に拘束を与える支持装置

4.3 ストップ，ガイド，ローラ，その他

ストップは回転は許すが軸方向の移動は零またはある既知の値以上許さないようなものである。したがって図の場合なら，

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{x(y,z)} &= 0 \\ \Delta x(y) &= \text{配管を自由にしたときの熱膨張移動量} \\ \Delta z &= (\text{熱膨張移動量} - D) \quad (D \text{ は既知}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (12)$$

と置けばよい。

ガイドの場合はたとえば x 方向のガイドとすると，

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(z) &= \text{配管を自由にしたときの熱膨張移動量} \\ F_x &= 0 \\ \Delta \theta_{y(z)} &= 0 \\ \bar{M}_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

ローラの場合も図のようにローラの軸方向にすべりのないものでは

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(y) &= \text{配管を自由にしたときの熱膨張移動量} \\ \bar{M}_{x(y,z)} &= 0 \\ F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (14)$$

またローラ軸の方向にローラが自由にすべる場合には上式中 Δx が未知数となりその代わりに F_x が零となる。

以上拘束を与える条件の数例について列挙したが上記以外のものについても同様に考えればよい。なおコンスタントハンガの場合には拘束は考慮しなくてもよい。

したがってこれらの条件を今回のプログラムに適用する場合には連立方程式作成プログラムにおいて拘束点も一本の枝と考え配管素子の長さを零と与えて方程式を求め，これに多少の手を加えて上記の条件を入れたデータをカードにパンチして連立方程式解法プログラムにデータとして与えれば解くことができる。

6. 結 言

従来使用困難であった配管系の熱応力解析も電子計算機の発達により設計業務の一部として十分使えるようになった。手計算によれば数週間を要し，しかもその結果を確実にチェックしようとするればさらにそれに倍する時間を要する問題がわずか2～3分で解けるということはまことに驚異的である。

いまだ改良すべき点（たとえば連立方程式解法の精度をは握できないことなど）も多少残されているがこれらは本質的なものではない。

最後に本プログラムの作成にあたりその原理となった解析理論や計算機の使用法などにご援助いただいた多数の人々に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- (1) The M. W. Kellogg Company: Design of Piping System (1951 New York, John Wiley & Sons, Inc.)
- (2) 電気学会東京支部：電子計算機の使用法とその応用(電気工学専門講習会予稿)
- (3) 船戸民雄：配管技術，Vol. 3, No. 1, 2, 3 (昭36年1, 2, 3月)