

時間的な変動を伴う二次元層流境界層の研究

A Study of Two-Dimensional Laminar Boundary Layers with Time-Dependent Fluctuations

堀 栄 一*
Eiichi Hori

内 容 梗 概

流体機械にしばしば表われるような、定常流に近くて、外部条件の変動によって引き起こされる境界層の時間的な変化を研究した。理論的な計算には、厳密でしかも計算の簡単なべき級数解法を用いた。円柱の境界層をこの理論で計算し、他方振動円柱の風洞実験を行なって比較した。計算と実験の一致はおおむね良好であった。

1. 緒 言

流体が固体表面に沿って流れるときは、摩擦のために流体にブレーキがかかるのであるが、空気や水や水蒸気などのように粘性が小さい流体においては、摩擦の影響の及ぶ範囲は固体表面に近接した流体の薄い層の中に限られる。この流体層を境界層という。

境界層は、ふつう物体の寸法に比べてごく薄いものであるけれども、流れの機構に対して大きな影響を持つので、実用上非常に重要なものである。すなわち、航空機や送風機、タービンなどの翼のように、流線形の物体の流体抵抗は大部分が摩擦抵抗であって、境界層の中の流動状況に大きく左右されるのである。また、熱交換器の管や電線など、非流線形物体の境界層は、固体表面からはがれて物体のうしろに死水領域を作り、大きな圧力抵抗の源となる。この境界層のはがれは、ときには翼にも起こり、送風機やタービンの損失を増大させ、その機能を失わせることがある。

時間的に変化する境界層を非定常境界層と呼ぶことにする。送風機やタービンなどの回転流体機械には、動翼対静翼のように相対運動をする部分があるので、流れは一般に非定常性を持ち、境界層も非定常であろう。たとえば、蒸気タービンの動翼はノズルのすぐうしろにあるため、動翼の通過に伴ってノズル内の流れが時間的に変わり、ノズル翼面上の境界層が周期的にはがれて、いろいろのトラブルの原因になることがある⁽¹⁾。軸流圧縮機の旋回失速の一因として⁽²⁾、迎角が変わったときに境界層内の流れがすぐ追従して変わらないために、翼の迎角と揚力の間位相差が生ずることが上げられている。

本研究の目的は、回転流体機械におけるこれらの非定常境界層問題を解明する基礎として、条件を単純化し、境界層外の流速が有限な平均値のまわりに、微小な振幅で時間とともに正弦的に変化するものとし、その場合の境界層を計算する一般的な方法を確立して実験的に裏付けることである。流体は非圧縮性で、流れは二次元層流と仮定する。

Lighthill⁽³⁾氏は、速度変動が微小であると仮定して、境界層方程式を線形化し、変動流中の物体の非定常境界層を計算した。変動の周波数が高い場合と低い場合を区別して取り扱った。低周波の場合は運動量積分法を用いて近似的に計算し、高周波の場合は周知のshear wave solutionに帰着させた。渋谷氏⁽⁴⁾は高周波解をLaplace変換を用いて計算し、Lin氏⁽⁵⁾は高周波、大振幅変動の場合の平均流の変化を論じた。Glauert氏⁽⁶⁾とRott氏⁽⁷⁾はよどみ点付近の変動境界層を厳密に取り扱い、Lam-Rott両氏⁽⁸⁾は高周波解と低周波解の接続について調べた。Illingworth氏⁽⁹⁾とGribben氏⁽¹⁰⁾は圧縮性の影響を考えた。Kestin-Maeder-Wang三氏⁽¹¹⁾は境界層外の流れの変動の位相が流れの方向に異なる場合を計算した。変動境界層

の実験結果はHill-Stenning両氏⁽¹²⁾と森-船木両氏⁽¹³⁾によって報告されている。

Moore氏とOstrach氏の非定常境界層に関する一連の論文は、上記の変動境界層の理論と取り扱い方は異なるが、本質的には変動境界層の低周波解に相当するものである。Moore氏⁽¹⁴⁾は彼らの方法で非定常境界層のはがれを論じた。

境界層の高周波変動の問題は、比較的単純であって、これまでの研究によって、ほぼ解明されているといえよう。それは、shear wave solutionが物体の形に無関係に成立するためである。これに反し、低周波変動に関する在来の研究には、Lighthill氏のように近似解を求めるものと、Glauert氏とRott氏のように特殊な場合に対する厳密解をうるものがあるが、一般的な場合に対する厳密解は得られていない。

本論文において筆者は、べき級数解法を用いて、任意の形の物体のまわりの低周波変動境界層を、種々の条件下（一樣流中で振動する物体、循環変動を伴う物体、物体の表面がその面内で振動する場合など）で厳密に計算する方法を提案する。べき級数解法そのものについても、論文の中で検討する。また変動の振幅が比較的大きい場合に起こる平均速度の変化や高調波の発生を論ずる。具体例として円柱の境界層を計算するとともに、風洞実験を行なって、計算と実験の結果がかなりよく一致することを示す。

2. 非定常境界層理論の基礎方程式

2.1 境界層方程式

流れは二次元で、流体は縮まないものとする、境界層内の流体の運動を記述する方程式は、

運動の方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (1)$$

連続の方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

である。ここに x は物体の前縁から物体表面に沿って測った距離、 y は物体表面に垂直に測った距離、 t は時間、 u と v はそれぞれ x と y 方向の速度成分、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数である。さらに境界層の外では圧力こう配は

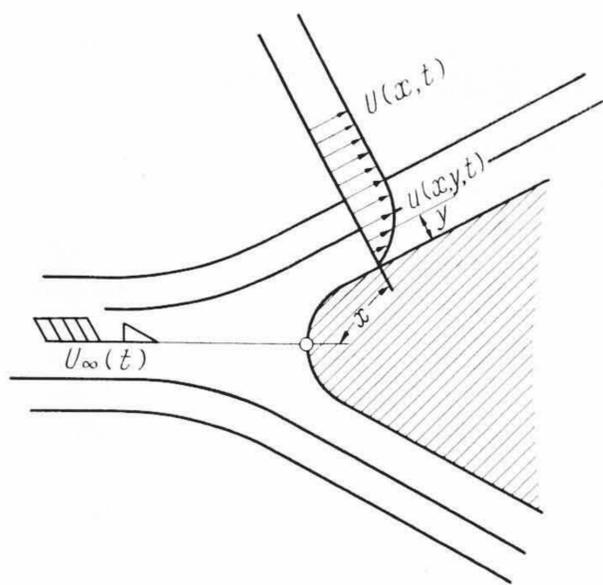
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。ここに U は第1図に示すとおり境界層外縁における流速で、一般に x と t の関数として与えられるものである。 U を層外速度と呼ぶことにする。境界条件は、

$$y=0 \text{ で } u=U_w, v=V_w \dots\dots\dots (4)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ で } u \rightarrow U \dots\dots\dots (5)$$

* 日立製作所中央研究所 工博



第1図 境界層はがれ点付近の流線
(上流に動く壁面, $\omega t = \pi$)

である。 U, U_w, V_w が x と t の関数として与えられたとき、境界層内の流速 u, v を (x, y, t) の関数として求めるのが境界層の計算の目的である。ただし本論文では物体壁が静止している場合 ($U_w = 0, V_w = 0$)、または物体壁がそれ自身の面内で動く場合 ($U_w \neq 0, V_w = 0$) に問題を限定する。 U についても次節で仮定をおく。一般に非定常の問題においては、座標系の選定に注意する必要があるが、Lighthill氏⁽³⁾は流体が非圧縮性であるかぎり一様並進運動をする座標系は互いに等価であることを示した。したがってこの条件下では、境界条件が簡単になるように座標系を選定すればよいのである。

2.2 非定常境界層方程式の線形化⁽¹⁵⁾

層外速度 $U(x, t)$ が次の(6)式で与えられ、 U_w と V_w が零である場合について、境界層方程式を変形する。

$$U(x, t) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) \cos \omega t \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $U_0(x)$ は x なる位置の層外速度を時間について平均した値で、 $\varepsilon U_1(x)$ は変動振幅である。 ε は微小定数であって、方程式を線形にするときに、項の大きさの程度を判別しやすいように導入したものである。 U_0 と U_1 は同じ程度の大きさとする。 ω は角周波数である。

本論文で研究するのは、このように、層外速度が平均値に比べて小さい振幅で単弦変化する場合であるが、速度変動が周期的であるかぎりはそれをフーリエ級数の形に表わして、一般化することができる。境界層内部の流速が微小パラメータ ε のべき級数に展開できるものとする。 u_0, u_1, u_2 などを x, y, t の関数として、

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + O(\varepsilon^3) \dots \dots \dots (7)$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + O(\varepsilon^3) \dots \dots \dots (8)$$

とし、これを運動方程式(1)式の各項に代入し、 ε の各べきの係数を個々に零とおけば、

ε^0 の係数:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = U_0 \frac{dU_0}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \dots \dots \dots (9)$$

ε^1 の係数:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ & = -\omega U_1 \sin \omega t + \left(U_0 \frac{dU_1}{dx} + U_1 \frac{dU_0}{dx} \right) \cos \omega t + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ε^2 の係数:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$+ v_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} = U_1 \frac{dU_1}{dx} \cos^2 \omega t + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \dots \dots \dots (11)$$

などを得る。連続の方程式(2)式は線形であるから、 $(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2)$ の各組に対し、(2)式と同形の式がなりたつ。境界条件は、

$$y=0 \text{ で } u_0 = v_0 = 0, u_1 = v_1 = 0, u_2 = v_2 = 0, \dots \dots \dots (12)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ で } u_0 \rightarrow U_0(x), u_1 \rightarrow U_1(x) \cos \omega t, u_2 \rightarrow \infty, \dots \dots \dots (13)$$

である。

(9)式より (u_0, v_0) を求め、それを用いて(10)式より (u_1, v_1) を、(11)式より (u_2, v_2) を順次求めることができる。 (u_0, v_0) は層外速度 U_0 の定常境界層内の流速を表わす。 (u_1, v_1) は層外速度と同じ周波数 ω で変動する速度を表わし、(10)式よりこれを求めるには、時間関数を複素記号法で書き表わすと便利である。すなわち層外変動速度を $\varepsilon U_1 e^{i\omega t}$ とし、 (u_1, v_1) を $(u_{1a} e^{i\omega t}, v_{1a} e^{i\omega t})$ と表わせば、(10)式より $e^{i\omega t}$ を消去して、

$$\begin{aligned} & i\omega u_{1a} + u_0 \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + u_{1a} \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_{1a}}{\partial y} + v_{1a} \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ & = i\omega U_1 + U_0 \frac{dU_1}{dx} + U_1 \frac{dU_0}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_{1a}}{\partial y^2} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

が得られる。ここでさらに

$$\left. \begin{aligned} u_{1a} &= u_{1s} + (i\omega) u_{1t} + (i\omega)^2 u_{1u} + \dots \dots \dots \\ v_{1a} &= v_{1s} + (i\omega) v_{1t} + (i\omega)^2 v_{1u} + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

と $(i\omega)$ について展開して(14)式に入れ、 ω のべきに従って式を分ければ、 (x, y) のみの関数である $(u_{1s}, v_{1s}), (u_{1t}, v_{1t})$ などを求めるための式が得られる。ここに添付 s, t, u などは $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ の係数であることを示すために順番につけたもので、それぞれ準定常、一次の非定常、二次の非定常と呼ぶことにする。準定常というのは、変動の周波数がごく低くて、今の場合でいえば層外速度がもとの U_0 から少し変わった定常流になっている状態に相当する。

(u_2, v_2) に対する(11)式を複素記号法で取り扱うには、たとえば三角関数 $\cos^2 \omega t$ を $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$ に変形してから $\frac{1}{2}(1 + e^{2i\omega t})$ におきかえるという注意がいる。 (u_2, v_2) そのものも $(u_{2m} + u_{2a} e^{2i\omega t}, v_{2m} + v_{2a} e^{2i\omega t})$ と表わす。変動が大きいときには、境界層内の速度の時間平均値は、定常流における (u_0, v_0) ではなくて、 $(u_0 + \varepsilon^2 u_{2m}, v_0 + \varepsilon^2 v_{2m})$ になるので、 (u_{2m}, v_{2m}) はいわば変動境界層の非線形ひずみを表わすのである。 (u_{2a}, v_{2a}) は非線形によって生ずる高調波成分である。後章において、 (u_2, v_2) についても(15)式と類似の ω に関する展開を行なって解いた結果を示す。

3. 境界層方程式のべき級数解法

境界層方程式と、それを線形化した前章の各式はいずれも偏微分方程式である。それらを常微分方程式に帰着させて、解を一般的な形で求めるために、本論文ではべき級数解法を用いることにする。べき級数解法は、層外速度を x のべき級数で与え、それに応じて層内の速度をも x のべき級数として求める方法で、従来は定常層流境界層に限って用いられ、Blasius 級数⁽¹⁶⁾ がその代表的なものである。

べき級数解法の利点としては、それが厳密な解法であることと、計算が容易であることの二つをあげることができる。

Pohlhausen 法で代表される運動量積分法はしばしば実用される境界層解法であるが、境界層方程式を近似的に満足させるにすぎない。これに対し、べき級数解法は、級数が収束するかぎり、境界層方程式を厳密に満足させるものである。

べき級数法による境界層計算は、普遍関数表を利用することによって、きわめて容易に行なわれる。普遍関数というのは、特定の層外速度分布には無関係に、いいかえれば層外速度を表わす級数の係

数とは無関係に、あらかじめ計算し表に作っておける関数であるという意味である。この数表があれば、算術だけで層内の速度プロファイルや表面摩擦を求めることができる。

さて、本来の Blasius 級数は、物体の前縁がよどみ点をなす場合の境界層計算にしか適用できないが、本論文ではそれをくさび形前縁の場合に一般化する。次に、Görtler 級数⁽¹⁷⁾は、級数解法の一変形で、層外速度条件を満足させやすい利点があるが、円柱のような非流線形物体の境界層計算には適しないので、それに代わるものとして筆者が提案した方法⁽¹⁸⁾について概略を述べることにする。

以上の各級数解法は、いずれも変動境界層の計算にも使用できるものであるが、本論文では Blasius 級数の変動境界層への適用に限って詳述することにする。

3.1 定常境界層のべき級数解法⁽¹⁵⁾⁽¹⁸⁾

変数 x, y を次式によって、無次元の ξ, η に変換する。

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L} \sqrt{a_0 Re} \xi^{\frac{m-1}{2}} \dots\dots\dots (16)$$

ただし L は物体の代表長さ(たとえば円柱の半径), a_0 は層外速度級数 ((18)式) の初項の係数で定数, Re は Reynolds 数で, (17)式で定義する。 m は物体前縁の形を表わす定数で, $(2m\pi)/(m+1)$ がくさび角である。 m が 1 ならば, 前縁はよどみ点で本級数解法は Blasius 級数法に一致する。 U_∞ を無限遠における流速として

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \dots\dots\dots (17)$$

とし、層外速度は

$$U_0(x) = U_0(\xi) = U_\infty \xi^m (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots\dots) \dots\dots (18)$$

とする。 a_0, a_1, a_2 などは定数で物体の形によって異なる。

流れの関数 ϕ_0 を導入して、連続の方程式 ((2)式) を満足させる。境界層内の流速 u_0, v_0 と ϕ_0 の関係は

$$u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \quad v_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \dots\dots\dots (19)$$

である。 ϕ_0 を次の形に書き表わす。

$$\phi_0 = \frac{U_\infty L}{\sqrt{a_0 Re}} \xi^{\frac{m+1}{2}} (a_0 F_0 + a_1 F_1 \xi + a_2 F_2 \xi^2 + \dots\dots) \dots\dots (20)$$

ここに、 F_0, F_1, F_2 などは η のみの関数である。 F_0 と F_1 は普遍関数である。 F_2 以降は a_0, a_1, a_2 などの定数によって変わるが、次式によって普遍関数 f_2, f_{11} などの線形結合で表わすことができる。

$$F_2 = f_2 + \frac{a_1^2}{a_0 a_2} f_{11} \dots\dots\dots (21)$$

$$F_3 = f_3 + \frac{a_1 a_2}{a_0 a_3} f_{12} + \frac{a_1^3}{a_0^2 a_3} f_{111} \dots\dots\dots (22)$$

(19)~(22)式によって、 u_0 と v_0 を普遍関数で表わし、境界層方程式 (9)式 (ただし $\partial u_0 / \partial t = 0$) に代入し、 ξ と定数 a_0, a_1 などの同べきの項を集めて零とおけば、普遍関数を決定するための下記の常微分方程式群が得られる。

$$F_0''' + \frac{m+1}{2} F_0 F_0'' - m F_0'^2 = -m \dots\dots\dots (23)$$

$$F_1''' + \frac{m+1}{2} F_0 F_1'' - (2m+1) F_0' F_1' + \frac{m+3}{2} F_0'' F_1 = -(2m+1) \dots\dots\dots (24)$$

$$f_2''' + \frac{m+1}{2} F_0 f_2'' - (2m+2) F_0' f_2' + \frac{m+5}{2} F_0'' f_2 = -(2m+2) \dots\dots\dots (25)$$

$$f_{11}''' + \frac{m+1}{2} F_0 f_{11}'' - (2m+2) F_0' f_{11}' + \frac{m+5}{2} F_0'' f_{11} = \dots\dots\dots$$

$$= -(m+1) + \left\{ (m+1) F_1'^2 - \frac{m+3}{2} F_1 F_1'' \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ダッシュは η に関する微分を表わす。境界条件は

$$\eta = 0 \text{ で } F_0 = F_1 = f_2 = f_{11} = \dots\dots = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$F_0' = F_1' = f_2' = f_{11}' = \dots\dots = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$\eta \rightarrow \infty \text{ で } F_0', F_1', f_2', \dots\dots \rightarrow 1, f_{11}', f_{111}', \dots\dots \rightarrow 0 \dots\dots\dots (29)$$

である。 $m=1$ の場合には、これらの普遍関数は Blasius 級数における普遍関数に当然一致するはずである。しかし慣用されている Blasius 級数の普遍関数と定義が若干異なり、相互の対応は次のとおりである。添付 B は慣用されている Blasius 関数を意味する。

$$F_0 = f_{1B}, \quad F_1 = 3 f_{2B}, \quad f_2 = 4 g_{3B}, \quad f_{11} = 4 h_{3B}, \quad f_3 = 5 g_4, \dots\dots \dots (30)$$

ここで筆者がさきに提案した⁽¹⁸⁾ 新しい級数解法について簡単にふれておく。Görtler 氏が提案した級数解法⁽¹⁷⁾は、境界層内の x 方向速度についていえば

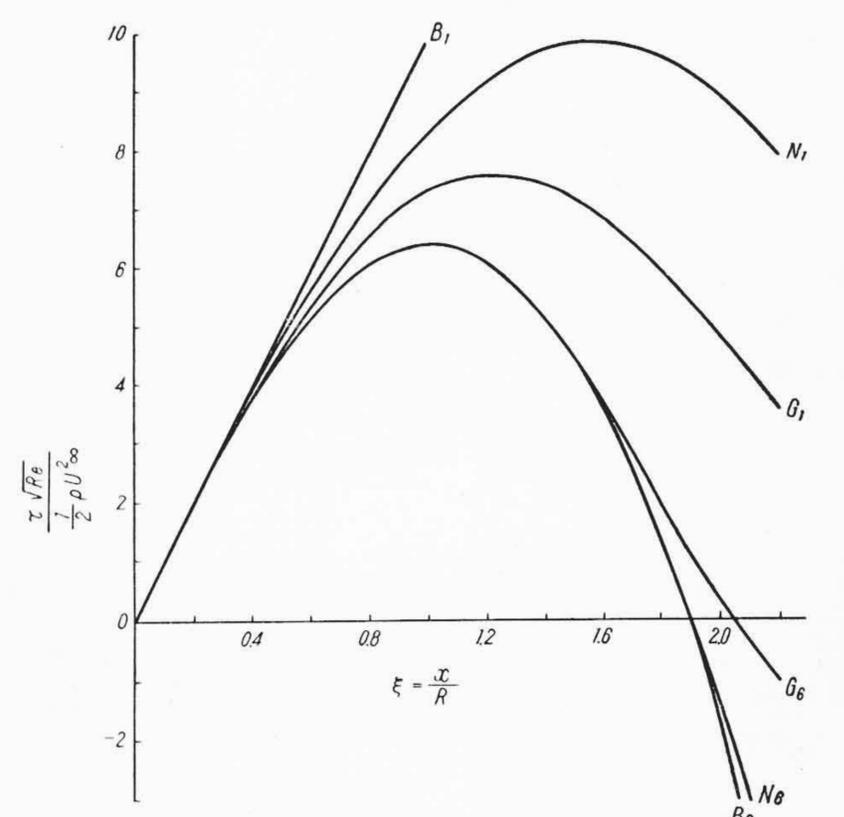
$$u = U_0(x) \times [x \text{ のべき級数}] \dots\dots\dots (31)$$

という形に解を求めようとするもので、これに対し Blasius 級数解を同じように書けば、

$$u = U_\infty \times [x \text{ のべき級数}] \dots\dots\dots (32)$$

となる。解を (31) 式の形に求めることにより、級数の初項のみ採っても、 $y \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow U_0(x)$ という境界条件を満足させられるのである。この点は確かに Görtler 法の利点であるが、Görtler 氏は $U_0(x)$ を含んだ変数変換を行なっているために計算がやや面倒である。また第 2 図に示すとおり、級数の収束性が他の級数解法より劣っている。

筆者は (31) 式の関係を満足する一般解法を求め、種々な変数変換法を検討した結果、最も単純な (16) 式の変数を用いてよい結果が得られることを見いだした。第 2 図は円柱の境界層 ($U_0 = 2 U_\infty \sin x/R$, R は円の半径) を Blasius 級数 (B), Görtler 級数 (G) および筆者の級数 (N) で計算した結果で、級数の初項のみ用いたときと第 6 項まで採ったときの表面摩擦係数の値を示す。 B_6 と N_6 はほぼ収束した解に近いのであるが、 G_6 はまだ収束不十分である。初項のみ採れば確かに Görtler 級数がよいが、収束にはほど遠くて実用にな



第 2 図 新しい級数 (N), Blasius 級数 (B), Görtler 級数 (G) による円柱表面摩擦の計算結果の比較 (添字 1 と 6 は級数を第 1 項または第 6 項で打ち切ったことを示す。)

らない。図には示さなかったが2項採れば筆者の解法が比較的正確に近い結果を与える。

最後に、普遍関数の計算について述べる。さきに述べたとおり、境界層の級数解法は普遍関数表を用いれば、単にそれらの線形結合を作るだけの操作で済む。Blasius 級数の普遍関数は(23)~(26)式のような方程式を(27)~(29)式の境界条件のもとに数値積分して得られる。境界条件の一つが(29)式のとおり無限遠で与えられるため積分は概してむずかしい。 $m=1$ の場合についてはいくつかの表が発表されているが、Tifford の表⁽¹⁹⁾がいちばん完全であろう。Görtler の級数も筆者の級数も普遍関数の満たす微分方程式は(23)~(26)式に類似したものである。Görtler 級数については、いくつかの m に対して完全な普遍関数表⁽²⁰⁾がある。筆者⁽¹⁸⁾は各種の級数解法の普遍関数群の間には線形な関係があることを示し、筆者の方法の普遍関数値の一部を Tifford の表から導いた。新しい級数解法の普遍関数の表を作成する際に、数値積分を省いて、同じ m 値に対する Blasius 級数や Görtler 級数の関数表から簡単に換算できるのである。

3.2 一般化した Blasius 級数の変動境界層に対する適用⁽¹⁵⁾

層外速度が(6)式のように変動する場合、境界層内の速度の変動を、べき級数解法で計算することにする。本節では ε の程度の変動を論じ、 ε^2 の程度の変動は次章で計算例を示すに止める。

層外速度の変動振幅を表わす $U_1(x)$ は、

$$U_1(x) = U_1(\xi) = U_\infty \xi^n (b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots) \dots (33)$$

で与える。 n は定数で、平均速度分布 $U_0(x)$ に表われる定数 m とは一般に異なるものとする。

(15)式で導入した準定常、一次および二次の変動振幅の微分方程式は、それぞれ

$$u_0 \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + u_{1s} \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} + v_{1s} \frac{\partial u_0}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u_{1s}}{\partial y^2} = U_0 \frac{dU_1}{dx} + U_1 \frac{dU_0}{dx} \dots (34)$$

$$u_0 \frac{\partial u_{1t}}{\partial x} + u_{1t} \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_{1t}}{\partial y} + v_{1t} \frac{\partial u_0}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u_{1t}}{\partial y^2} = U_1 - u_{1s} \dots (35)$$

$$u_0 \frac{\partial u_{1u}}{\partial x} + u_{1u} \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_{1u}}{\partial y} + v_{1u} \frac{\partial u_0}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u_{1u}}{\partial y^2} = -u_{1t} \dots (36)$$

であって、連続の方程式は(2)式と同形であり、境界条件は

$$y=0 \text{ で } u_{1s} = v_{1s} = u_{1t} = v_{1t} = u_{1u} = v_{1u} = \dots = 0 \dots (37)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ で } u_{1s} \rightarrow U_1, u_{1t}, u_{1u}, \dots \rightarrow 0 \dots (38)$$

である。線形方程式(34)~(36)式は、もっと制限された形で Lighthill 氏⁽³⁾が始めて導入した。

定常速度 (u_0, v_0) は前節の解法で得られているものとして、(20)式に類似の

$$\psi_{1s} = \frac{U_\infty L}{\sqrt{a_0 Re}} \xi^{-\frac{m+2n+1}{2}} (b_0 F_{s0} + b_1 F_{s1} \xi + b_2 F_{s2} \xi^2 + \dots) \dots (39)$$

$$\psi_{1t} = \frac{U_\infty L}{\sqrt{a_0 Re}} \xi^{-\frac{3m+2n+1}{2}} (b_0 F_{t0} + b_1 F_{t1} \xi + b_2 F_{t2} \xi^2 + \dots) \dots (40)$$

などを導入して、変動振幅に対する連続の方程式を満足させる。

定常流の場合と同様に、

$$F_{s1} = f_{s1} + \frac{a_1 b_0}{a_0 b_1} f_{s10} \dots (41)$$

$$F_{s2} = f_{s2} + \frac{a_2 b_0}{a_0 b_2} f_{s20} + \frac{a_1 b_1}{a_0 b_2} f_{s11} + \frac{a_1^2 b_0}{a_0^2 b_2} f_{s110} \dots (42)$$

とおき、 F_{t1}, F_{t2} などに対しても同形の表示を用いれば、 F_{s0}, f_{s1}, f_{s10} などの関数は η のみの普遍関数(パラメータ m, n を含む)である。

定常流の場合と同様にして、普遍関数の微分方程式群が求められる。ここには F_{s0} に対するもののみ例示するに止める。

$$F_{s0}''' + \frac{m+1}{2} F_0 F_{s0}'' - (m+n) F_0' F_{s0}' + \frac{-m+2n+1}{2} F_0'' F_{s0} = -(m+n) \dots (43)$$

$$\eta=0 \text{ で } F_{s0} = F_{s0}' = 0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } F_{s0}' \rightarrow 1 \dots (44)$$

さて、定数 m と n の差が整数のときは、準定常の普遍関数が定常普遍関数の線形結合で表わされることが多い。それは、準定常の境界層というのは、実は層外速度が $U_0 + \varepsilon U_1$ の定常境界層にほかならないからである。

いま $p = n - m$ が正の整数とし、層外速度が $U_0 + \varepsilon U_1$ の定常境界層を考えれば、層内の速度は

$$u = U_\infty \xi^m \{ a_0 F_0' + a_1 F_1' \xi + \dots + (a_p + \varepsilon b_0) F_p' \xi^p + \dots \} \dots (45)$$

で、その中の ε の係数が準定常速度振幅 u_{1s} であるから、

$$u_{1s} = U_\infty \xi^n (b_0 F_p' + b_1 F_{p+1}' \xi + \dots) \dots (46)$$

となる。一方(39)式から

$$u_{1s} = U_\infty \xi^n (b_0 F_{s0}' + b_1 F_{s1}' \xi + \dots) \dots (47)$$

であるから、(46)式と(47)式の対応する項の比較から $F_{s0} = F_p, F_{s1} = F_{p+1}$ などが得られる。したがって、たとえば $p=1$ ならば、普遍関数の間には

$$F_{s0} = F_1, f_{s1} = f_2, f_{s10} = \frac{1}{2} f_{11}, \dots \dots (48)$$

などの関係があることになる。

$m=n$ のときには、準定常→定常の関数換算がいくらか複雑になる。それは上のやり方において級数の初項の係数が $(a_0 + \varepsilon b_0)$ になり、(16)式によって、 η の定義の中にも $(a_0 + \varepsilon b_0)$ がはいってくるからである。これは、物理的にいえば、 a_0 が増して $(a_0 + \varepsilon b_0)$ になれば、境界層が全般的に $(1 + \varepsilon \frac{b_0}{a_0})^{-\frac{1}{2}}$ 程度に薄くなるということである。

$$\sqrt{a_0 + \varepsilon b_0} = \sqrt{a_0} \left\{ 1 + \frac{b_0}{2a_0} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right\} \dots (49)$$

であるから

$$F_0'(\eta) = F_0' \left(\frac{y}{L} \sqrt{(a_0 + \varepsilon b_0) Re} \xi^{\frac{m-1}{2}} \right) = F_0' \left(\frac{y}{L} \sqrt{a_0 Re} \xi^{\frac{m-1}{2}} \right) + \frac{\varepsilon b_0}{2 \sqrt{a_0}} \frac{y}{L} \xi^{\frac{m-1}{2}} \times F_0'' \left(\frac{y}{L} \sqrt{a_0 Re} \xi^{\frac{m-1}{2}} \right) + O(\varepsilon^2) \dots (50)$$

と書けることに注意して、 $n > m$ の場合と同様に級数の対応する項を比較すれば、

$$F_{s0} = \frac{1}{2} (F_0 + \eta F_0'), f_{s1} = F_1, f_{s10} = \frac{1}{2} (-F_1 + \eta F_1') \dots (51)$$

を得る。Lighthill 氏⁽³⁾は $U_0 = U_1$ の場合を考え、

$$u_s = u_0 + \frac{y}{2} \frac{\partial u_0}{\partial y} \dots (52)$$

という式を導いているが、それは本計算では $a_0 = b_0, a_1 = b_1$ などとした特殊の場合として得られる。

$n < m$ の場合については一般的な関係はまだ見いだされていない。 $m=1, n=0, a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0, a_0 \neq 0, b_1$ 以降 $= 0$ の特殊の場合には⁽²¹⁾

$$F_{s0} = F_0, f_{s20} = 3(f_2' - F_1'), \dots \dots (53)$$

の関係が得られる。

非定常の普遍関数 F_{t0}, f_{t1} などは、一般に既知関数で表わされな

いので、数値積分によって求めなければならない。例外は $m=1$, $n=0$ の場合の F_{10} で

$$F_{10} = \frac{F_0'}{F_0''(0)} + F_0 - \eta \dots\dots\dots (54)$$

で、これは Glauert⁽⁶⁾ がよどみ点付近の変動境界層の解として求めたものである。

以上の諸式をまとめて、境界層内の変動速度 u_1 を書き下せば、

$$u_1 = e^{i\omega t} U_\infty \xi^n \left[b_0 \left(F_{s0}' + \frac{i\omega L}{a_0 U_\infty} \xi^{-m+1} F_{10}' + \dots \right) + b_1 \xi \left(f_{s1}' + \frac{i\omega L}{a_0 U_\infty} \xi^{-m+1} f_{11}' + \dots \right) + \frac{a_1 b_0}{a_0} \xi \left(f_{s10}' + \frac{i\omega L}{a_0 U_\infty} \xi^{-m+1} f_{110}' + \dots \right) + \dots \right] \dots\dots\dots (55)$$

であって、角周波数は無次元パラメータ $\frac{i\omega L}{a_0 U_\infty} \xi^{-m+1}$ にまとめられる。

4. べき級数解法による円柱の非定常境界層の計算

べき級数解法による非定常境界層計算の具体例として、円柱の境界層の計算を行なう。条件を単純にするために、境界層外の流れはポテンシャル流として、層外速度を $2U_\infty \sin x/R$ で与える。ここに R は円柱の半径である。さらに $\sin x/R$ のテイラー展開を2項まで採り、

$$U_0 = 2U_\infty \left\{ \frac{x}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{R} \right)^3 \right\} \dots\dots\dots (56)$$

で定常層外速度を与える。そして、(1)円柱が流れの方向に振動する場合、(2)円柱のまわりの循環が変動する場合、(3)円柱が回転振動する場合の三つの場合につき、必要な普遍関数を求め、それを用いて主として境界層はがれ点付近の流れを検討する。なお(1)の場合には ω^2 の程度の変動の影響および ε^2 の程度の変動の影響をも計算して、それらの影響が比較的小さいことを示す。

4.1 流れの方向に振動する円柱の境界層⁽²²⁾⁽¹⁵⁾

第1章で述べたように、非圧縮流体中では相対並進運動する座標系は等価であるから、第3図のように(1)一様流中で振動する円柱、(2)振動気流中の円柱、(3)振動しながら直進する円柱、の三つは等価である。数学的には(2)の形に問題を扱うのがもっとも簡単である。この場合、層外速度は(6)式で

$$U_0(x) = U_1(x) \dots\dots\dots (57)$$

である。Lighthill 氏⁽³⁾はこの問題を運動量積分法で計算したが、本論文ではべき級数解法で計算するのである。

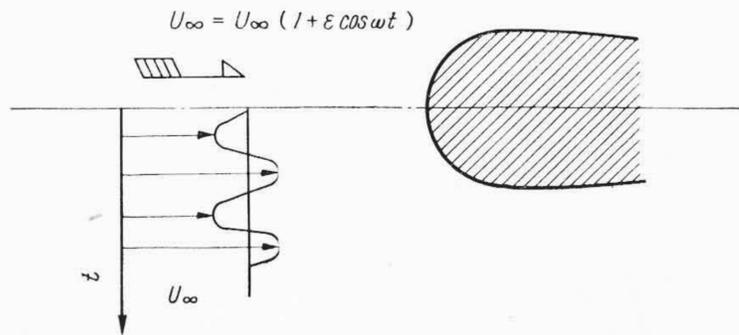
(57)式が成り立つ場合、準定常の普遍関数は(51)式のように、定常の普遍関数で表わされるから計算は比較的容易である。

物体表面に働く摩擦応力は、粘性係数を μ とするとき

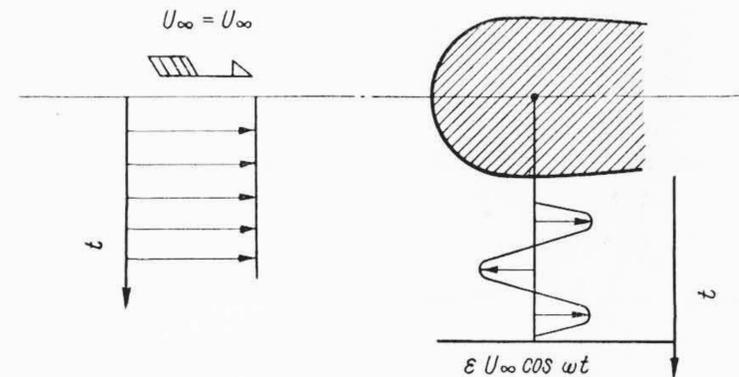
$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \dots\dots\dots (58)$$

で、既出の諸式を用いてこれを無次元表示すれば、いまの場合

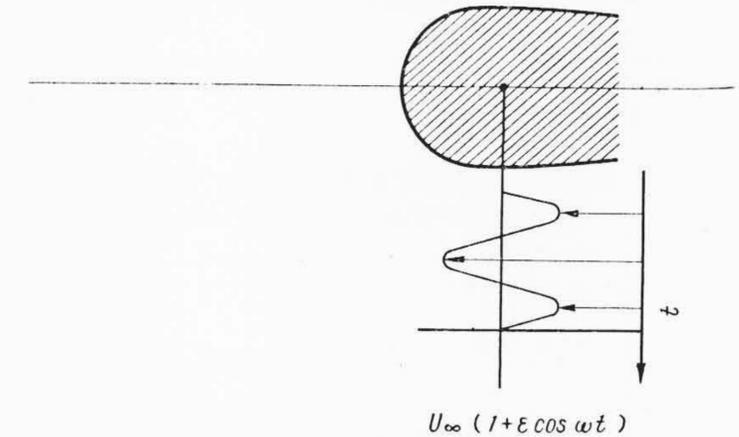
$$\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{2U_\infty R}{\nu}}} = 4 \left(\frac{x}{R} \right) \left\{ 2F_0''(0) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^2 f_2''(0) + \dots \right\} + 4\varepsilon \left(\frac{x}{R} \right) \left\{ 2F_{s0}''(0) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^2 f_{s2}''(0) + \dots \right\} \times \cos \omega t + 4\varepsilon \left(\frac{\omega R}{2U_\infty} \right) \left(\frac{x}{R} \right) \left\{ 2F_{10}''(0) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^2 f_{12}''(0) + \dots \right\} (-\sin \omega t) + \dots + 4\varepsilon^2 \left(\frac{x}{R} \right) \left\{ 2F_{2s0}''(0) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^2 f_{2s0}''(0) + \dots \right\} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) + 4\varepsilon^2 \left(\frac{\omega R}{2U_\infty} \right) \left(\frac{x}{R} \right)$$



第3図(a) 平均速度のまわりに微小変動する流れ



第3図(b) 一様流の中で振動する物体



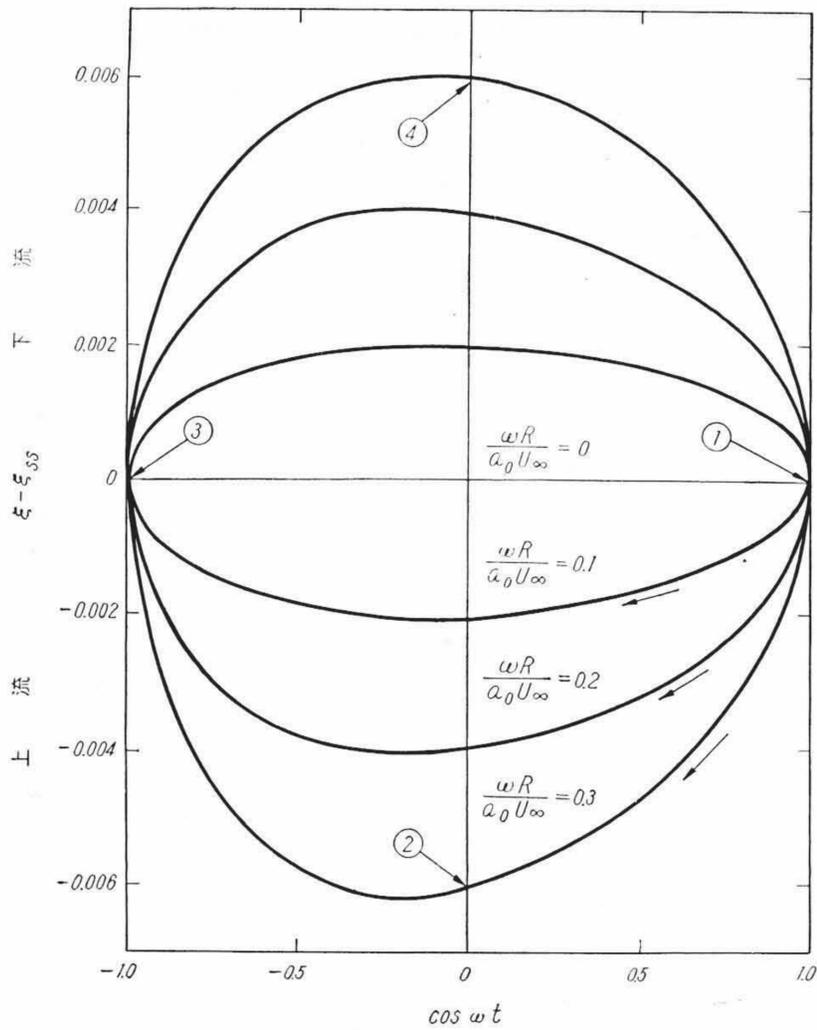
第3図(c) 振動しながら進む物体

$$\times \left\{ 2F_{2t2}''(0) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right) f_{2t2}''(0) + \dots \right\} \times \frac{1}{2} (-\sin 2\omega t) + \dots\dots\dots (59)$$

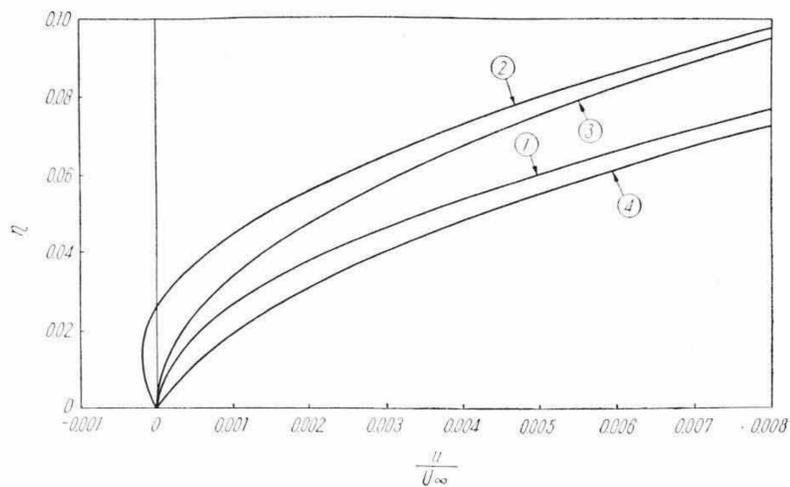
で与えられる。上式に表われる ε^2 の係数の導き方については本論文では省略するが、 ε の程度の計算法と大体似ており、準定常の普遍関数 F_{s0} などはやはり定常の普遍関数で計算できる。

非定常境界層のはがれの定義については、いろいろ説があるが、ここでは τ が零になるところをはがれの位置とまず考える。第4図は ε の程度で ω^2 の程度までとって計算したはがれ点の移動の様態である。図の右端は層外速度が最大になった瞬間を、左端は最小になった瞬間を示す。図の上半は、はがれが定常のはがれ点より下流にあることを、図の下半は上流側にあることを示す。

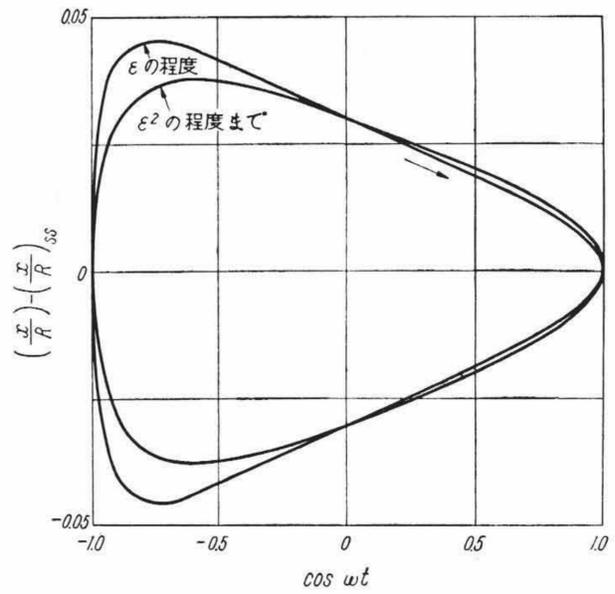
第4図が長円形をしていることから、層外速度の位相とはがれ位置の位相がほぼ90度ずれていることがわかる。層外速度が最大または最小になった瞬間にははがれ点は定常のはがれ点にほぼ一致する。こまかくいえば、いくらかずれがあるが、これは ω^2 の項の効果であって、それが第4図では見いだせないほど小さいことから、 $\omega R/2U_\infty = 0.3$ 程度では ω^2 の効果は無視できることがわかる。層外速度が増加中にはがれは下流に押し流され、減少中には上流にさか上る。これは層外流を加速、減速させるための圧力こう配の影響で、周波数が高いほどはがれの移動幅は大きい。それにしても、 $\varepsilon=0.1$, $\omega R/2U_\infty=0.3$ の場合の移動幅は角度にして20分ほどでごく小さい。第5図は定常はがれ点における速度分布の変化を示したもので①、②などは第4図に対応させてある。



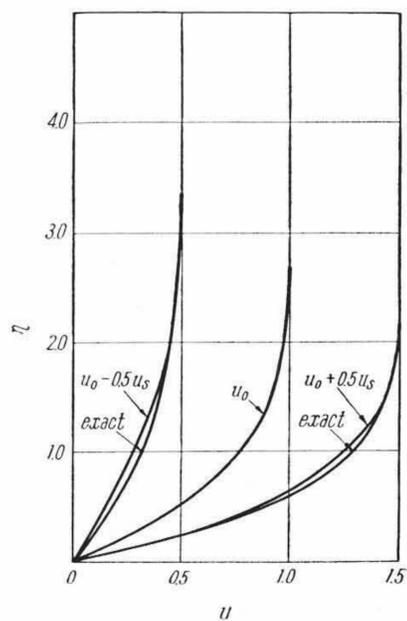
第4図 円柱の境界層はがれ点の移動
(主流速度が変動する場合, $\varepsilon=0.1$)



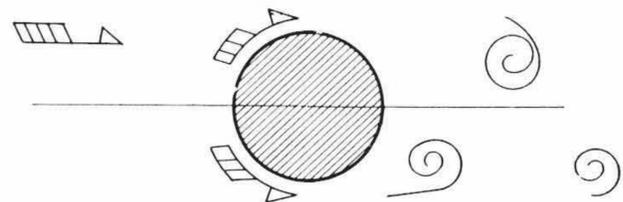
第5図 円柱境界層のはがれの平均位置における速度プロファイル(主流速度変動の場合, $\varepsilon=0.1$)



第6図 境界層はがれ点の移動
($\varepsilon=0.5$, $(\omega R)/a_0U_\infty=0.3$)



第7図 準定常速度の比較



第8図 循環変動を伴う物体の例

第6図は ε^2 の効果を見るために, $\varepsilon=0.5$ として計算したはがれ点移動の様相である。平均流の50パーセントの変動があっても, ε の程度の計算でかなりよい結果を支えることがわかる。

第7図は速度プロファイルについて, ε^2 の程度の変動の影響を見るために, よどみ点近傍の層内速度の準定常値を, その点の層外速度の平均値で割った値を示している。 $\omega t=0$ と π の瞬間における層内速度を $u_0 \pm \varepsilon u_{1s}$ で計算したものと $u_0 \pm \varepsilon u_{1s} + \varepsilon^2 u_{2s}$ で計算したものを描いてある。厳密な準定常速度は, 層外速度を $\omega t=0$ と π における値に凍結させた定常速度であって, それを“exact”と記してある。 ε の程度の計算でも厳密値からの誤差は僅少であり, ε^2 まで採れば厳密値と第7図の上では区別できない。

第6, 7図および表面摩擦値の比較から, 変動が $\varepsilon=0.5$ と大きい場合にも, ε の程度の計算はかなりよい近似を与え, ε^2 の程度の計算はきわめて正確であると結論される。

4.2 循環変動を伴う円柱の境界層⁽²¹⁾

第8図のように, 円柱のうしろにカルマン渦が生じている場合には, 循環は周期的に正負の値を取りながら変動するはずである。こ

れを単純化して, 層外速度の変動振幅が x に無関係で,

$$U_1(x) = b_0 \dots \dots \dots (60)$$

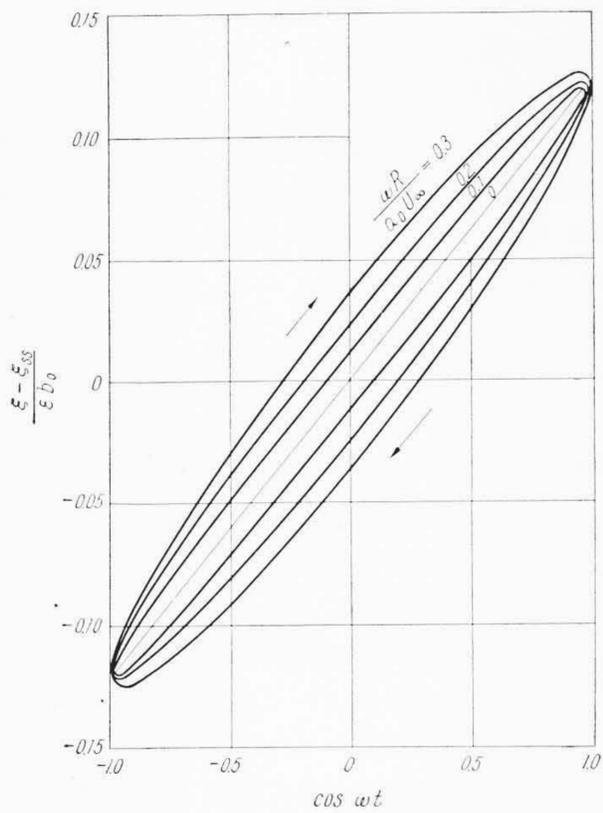
で与えられる場合の計算を行なう。

この場合には, $m=1, n=0$ として, 前章の一般論にしたがって計算することができる。注意を要するのは, よどみ点付近の流れで, 定常速度は非常に小さいのに, 変動は有限であって, 線形化の仮定が破れそうに見える。しかし本計算はよどみ点付近ではGlauert氏⁽⁶⁾のそれに一致して, Navier-Stokes 方程式の厳密解になり, 変動の大きさに無関係に, 正しい解なのである。

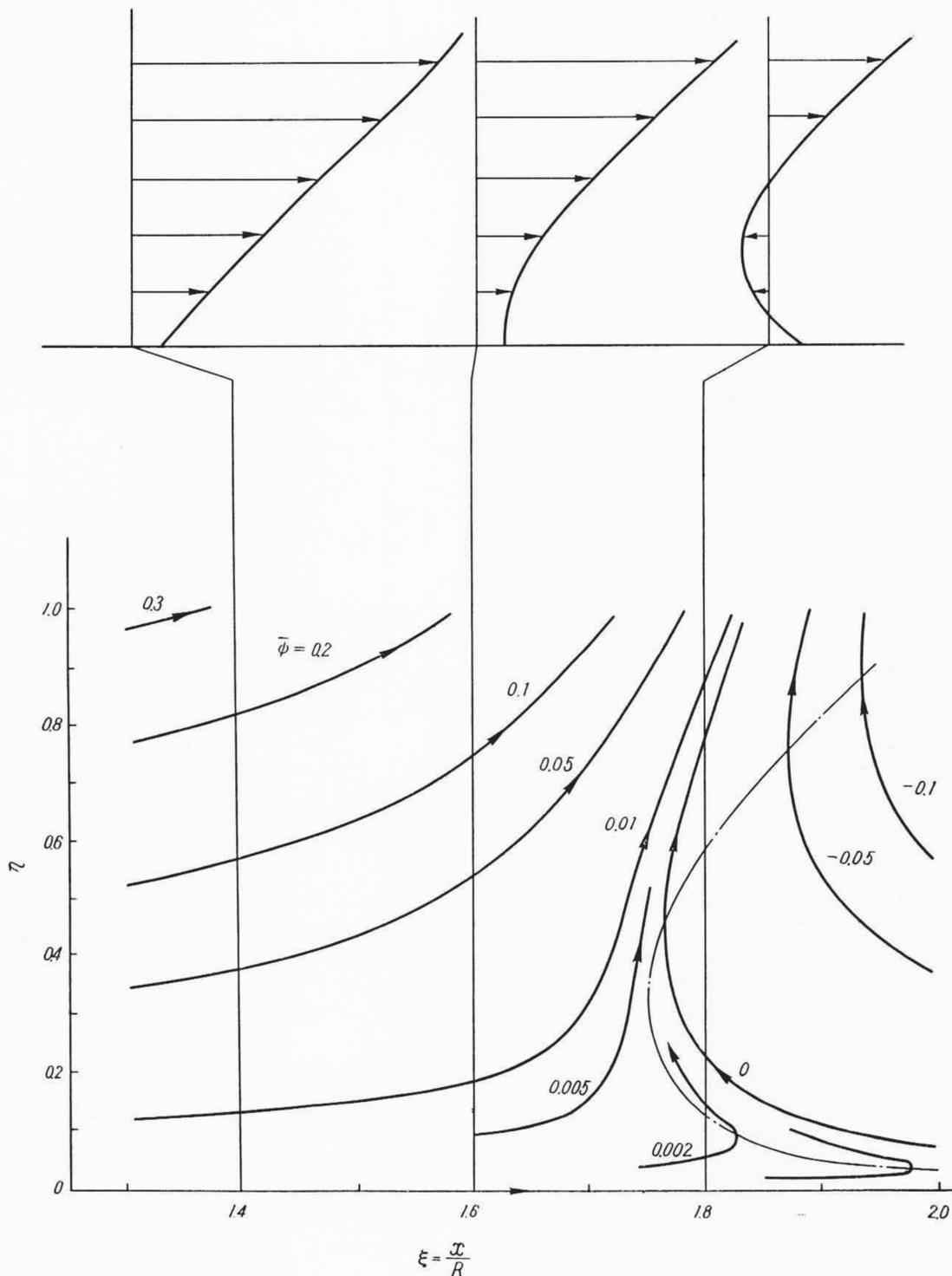
第9図は境界層はがれ点の移動を示したもので, 振動円柱に対する第4図に相当する。 $\omega R/a_0U_\infty$ が零のとき, 第9図のグラフは右上がりの直線となり, 準定常的にはがれ点が移動することを示す。これは振動円柱(第4図)では準定常的には移動が起こらなかったのと対照的である。

$\omega R/a_0U_\infty$ が増すにつれて, グラフは長円形となる。準定常値との差が本来の意味での非定常効果による移動距離である。ただし局部的な(ここでは定常はがれ点における)層外速度振幅と ω の等しい状態で振動円柱と循環変動の場合と比べれば, 循環変動の方がはがれ点の非定常移動幅が約2倍で, 速度分布の形によって非定常境

界層内の流れが異なることがわかる。



第9図 円柱の境界層はがれ点の移動 (循環が変動する場合)



第10図 境界層はがれ点付近の流線図 (下流に動く壁面 $\omega t = 0$)

4.3 回転振動する円柱の境界層⁽²³⁾

層外速度が定常的であって、物体壁の方が運動するために起こる非定常境界層の例として、一様な流れの中に1本の円柱があって、それが中心のまわりに左まわり、右まわりと交互に正弦的に回転振動するときの境界層内の流線の模様を調べてみる。

数学的な取り扱い、循環変動の場合と類似しており、普遍関数に課する境界条件がいくらか違うだけである。

$\varepsilon U_w / U_\infty = 0.1$, $\omega R / \alpha_0 U_\infty = 0.3$ の場合の、はがれ点付近の流線図を第10~12図に示す。Moore氏⁽¹⁴⁾は、非定常境界層のはがれ点について第13図のようなモデルを定性的に提案した。Mooreの説は、境界層内に流速 u と速度こう配 $\partial u / \partial y$ が同時に零になる点があるとき、その x をはがれの位置と定義するものである。第13図(a)の定常境界層の場合に Moore の定義は確かに通常のはがれの定義と一致する。第13図(b)は観測者に対して壁が下流に動き、はがれ点は静止する場合である。第10図はちょうどこれに相当する瞬間の円柱の境界層内の流線を示したもので、Moore の予想図とよく似ている。

ところが、観測者に対して壁が上流に動く場合には、Moore の予想図、第13図(c)と筆者の計算結果第11図とはかなり違う。Moore の定義に従えば第11図にははがれ点がないのである。しかし流線の形からみて、境界層のはがれないとはいいいにくい。第10~12図の曲線のわきに記したのは、流れの関数の値で、それが零とい

うのは壁面にそう流線を表わす。零流線の壁から遠いところにおける移動の様相から、はがれ点を定義すれば合理的であろう。第12図は $\omega t = \pi/2, 3\pi/2$ で、壁が静止した瞬間の流線図で、零流線からが移動していることからみてはがれ点は移動していることになる。

5. 非定常境界層の実験⁽²⁴⁾

前章までの各章において取り扱った変動境界層の理論計算法の仮定の適否を吟味し、結果を検討する目的で、風洞実験を行なった。測定には熱線風速計を用いて、振動円柱の境界層とカルマン渦を伴う円柱の境界層の平均速度と変動速度を測った。

5.1 実験装置

実験はすべて日立製作所中央研究所の低速低乱風洞を用いて行なった。風洞の要目を第1表に、水平断面図を第14図に示す。内圧は常圧で実験した。

実験に用いた円柱は第15図に示すとおりで、鋼管製、外径100mm、長さ700mmである。リンク機構を内蔵し、円柱一端のマイクロメータ・ヘッドをまわせば熱線風速計の円柱表面からの距離が変わるようにしてある。熱線風速計と同一の円柱母線上に直径0.8mmの静圧孔を設けてある。この円柱をゆりわくに取り付け、風洞ドームの天井からつり、小形電動機を用いカムを介して風洞気流の方向に振動させた。円柱は風洞側壁に設けた長円形の孔を貫通させ、貫通部のすぐ外で円柱外周に鏝(つぼ)をつけて空気もれを減らした。円柱の下流にカルマン渦が生ずれば、そのために起こる速度変動が円柱の振動による変動と重なって、実験精度が落ちるので円柱下流に尾状に600mm角の平

板を取り付けて渦の発生を防止した。カルマン渦による変動境界層の実験の際には、もちろん尾板をはずし、円柱は風洞側壁に固定した。

熱線風速計のブロック線図を第16図に示す。平均風速は熱線を一定抵抗に保つための加熱電流値によって測り、速度変動はオシロ

第1表 低乱風洞の要目

測定断面の寸法	0.6 m 角, 閉鎖形, 長さ 1.3 m
風速範囲	0.4 m/s より 48 m/s の間連続可変
内圧	最高 3 kg/cm ² ゲージ
乱れ	0.05% 以下
一様性	測定断面入口にて偏差 0.5% 以下
動力	25 kW 直流電動機ワード・レオナード式制御方式

グラムから読んだ。熱線素子は太さ7ミクロンのタングステン線で、検出部を残して銅メッキして馬てい形に成形し、フォークの先にハンダ付けした。

5.2 実験結果と検討

実験は第2表のように四通りの組み合わせで行なった。

第17図は実験(3)の状態、円柱を振動させた場合と振動させない場合との平均風速の測定値の比較を示す。本実験の精度範囲内では $\epsilon=0.2$ 程度では変動が平均風速に及ぼす影響は見いだされない。これは理論的予測のとおりである。なお、ここで ϕ は角度位置で x/R を度であらわしたものである。

第18図は実験(1)と(2)における境界層内の平均風速の分布を示す。

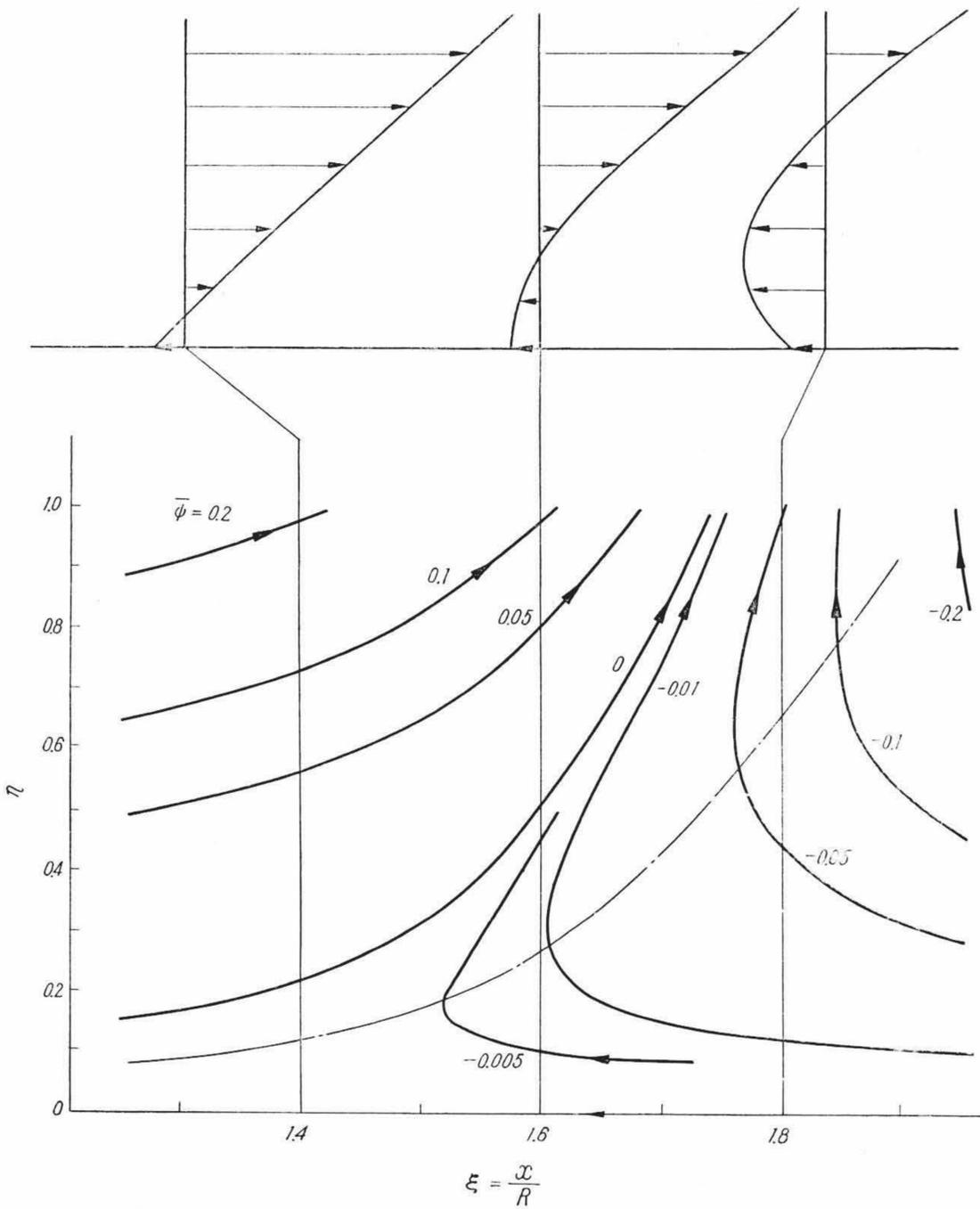
第19図は実験(1)~(3)における境界層内の速度変動振幅を無次元にして比較したものである。速度変動は時間的に多少ふらつくので、長時間の記録の平均値をとった。

第20図は実験(4)の変動振幅分布図である。現象のふらつきが大きく、第19図に比べると測定点のちらばりが大きい。

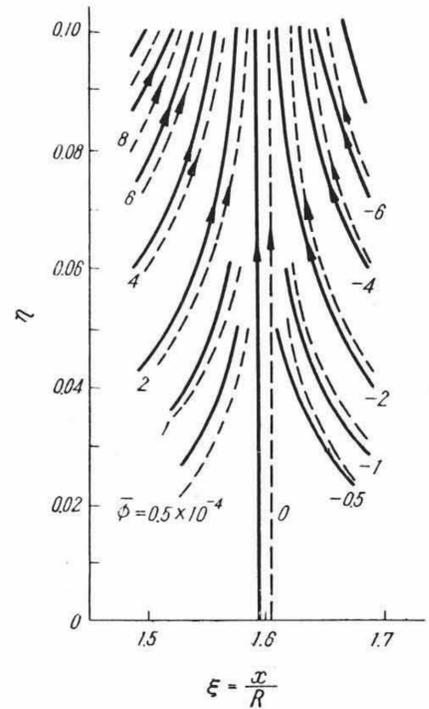
円柱面上の静圧分布から計算した層外速度 U_0/U_∞ の値は実験式

$$\frac{U_0}{U_\infty} = 1.95 \left(\frac{x}{R} \right) - 0.43 \left(\frac{x}{R} \right)^3 \dots\dots\dots (61)$$

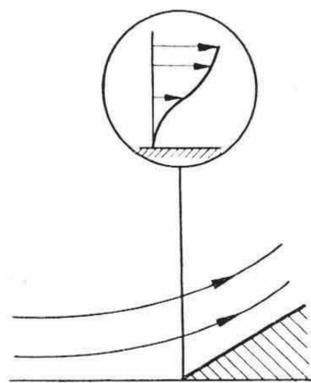
によって、よどみ点から圧力最低点付近までを十分の精度で表わせた。これをもとにして境界



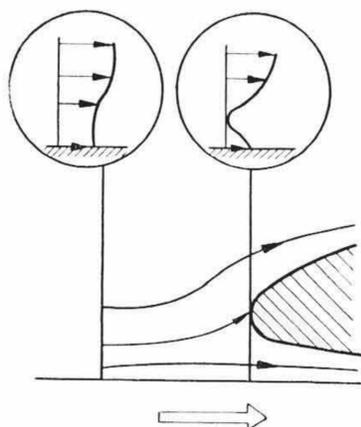
第11図 記号の説明



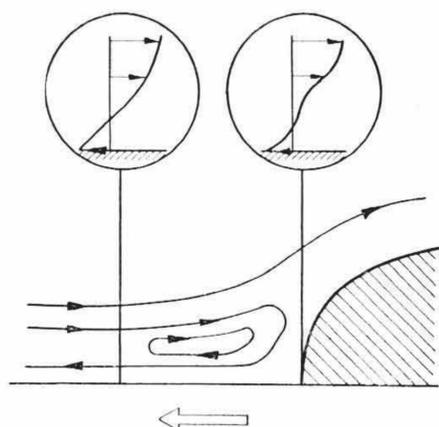
第12図 壁面のごく近くのはがれ流線図 ($\omega t = \pi/2$: 実線, $\omega t = 3\pi/2$: 破線)



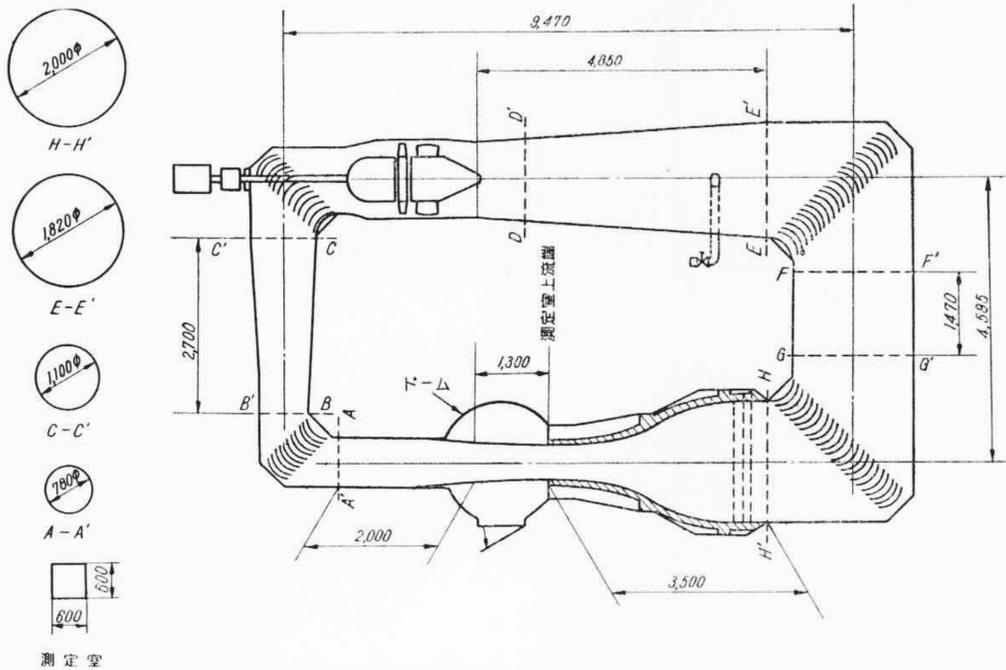
第13図(a) Moore のモデル (定常流)



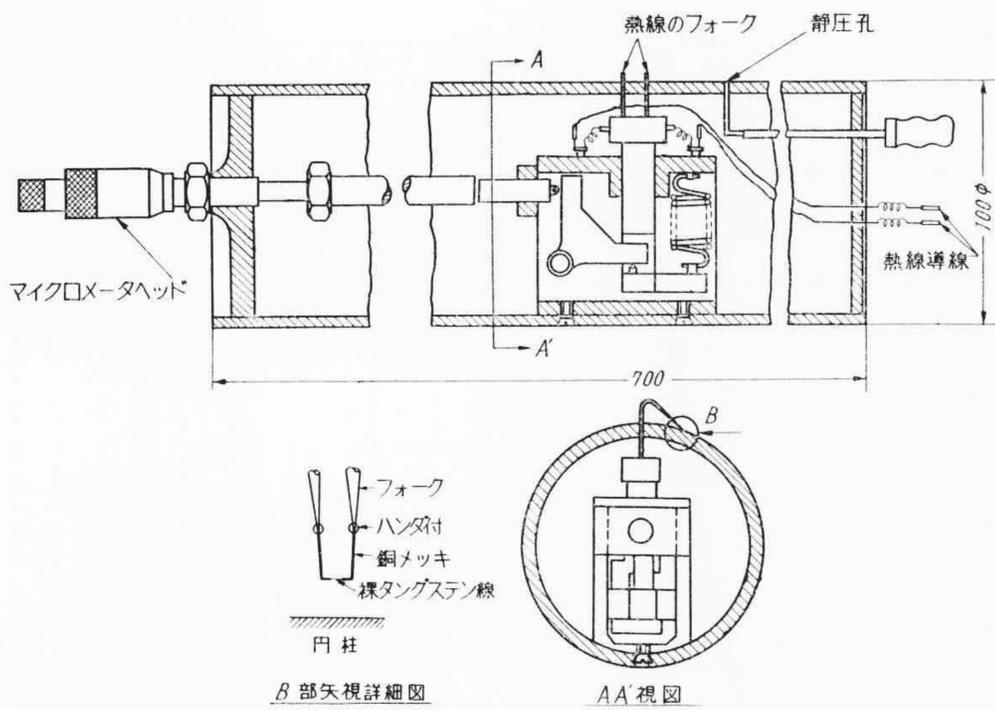
第13図(b) Moore のモデル (下流に動く壁面)



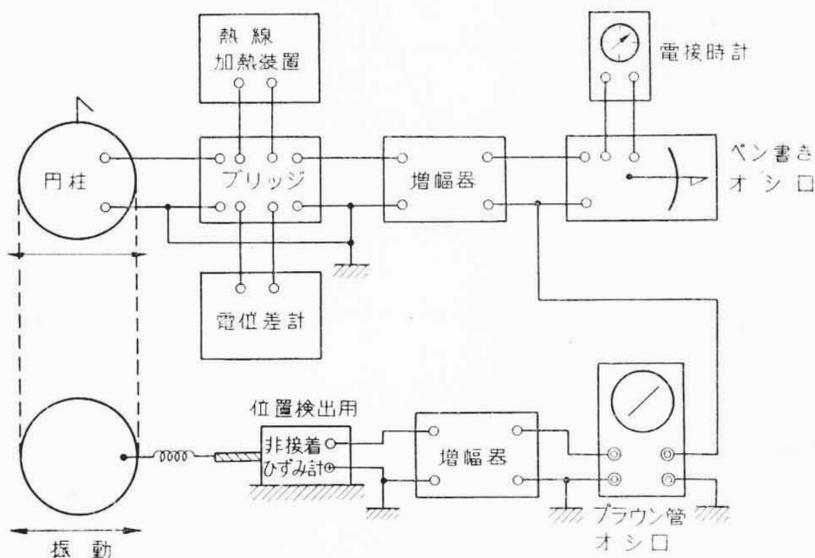
第13図(c) Moore のモデル (上流に動く壁面)



第14図 日立製作所中央研究所の低乱風洞



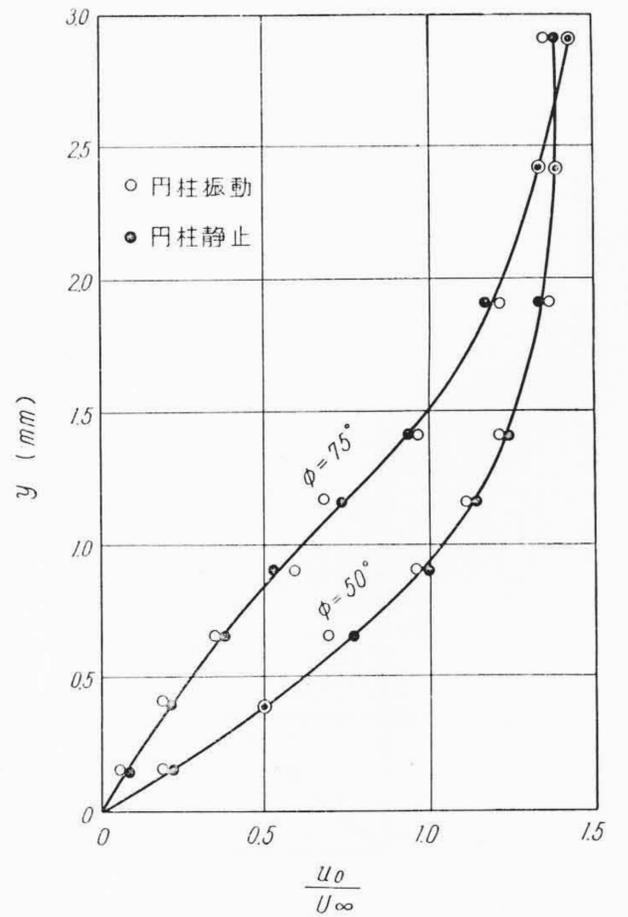
第15図 円柱構造図



第16図 測定回路

第2表 実験一覧表

番号	U_∞ (m/s)	$\frac{2U_\infty R}{\nu}$	n (c/s)	$\frac{\omega R}{a_0 U_\infty}$	ε	尾板
(1)	1.44	9,000	1.1	0.12	0.11	あり
(2)	1.44	9,000	1.5	0.17	0.15	あり
(3)	0.57	3,600	1.1	0.31	0.27	あり
(4)	1.44	9,000	3.5	0.39	—	なし



第17図 円柱振動の平均速度に対する影響 ($Re=3,600$)

層の級数計算を行なって、実験値と比較する。

まず平均速度プロファイルについて、実験値と ξ^{11} の項 (第6項) で打ち切った計算値を比較する。第18図の実線は計算値であって、 $\phi=30, 40, 50, 60^\circ$ では実験と理論は良く一致した。実験の方は Reynolds 数も $\omega R/a_0 U_\infty$ も異なる二通りのものを合わせ示してあるので、円柱のこの角度範囲では理論の仮定が十分実現されているものと考えられる。 $\phi=20^\circ$ と 75° においては実験と理論の一致はあまり良好でない。20度の方は実験に誤差があると思われる。 $\phi=75^\circ$ のところは圧力最低点よりも下流にあって、級数の収束が不十分なために不一致をもたらしたと思われる。

次に速度変動の実験値と計算値とを比較する。層外速度は振動円柱の実験(1)~(3)においては、

$$U = U_0(1 + \varepsilon e^{i\omega t}) \dots\dots\dots (62)$$

と考える。

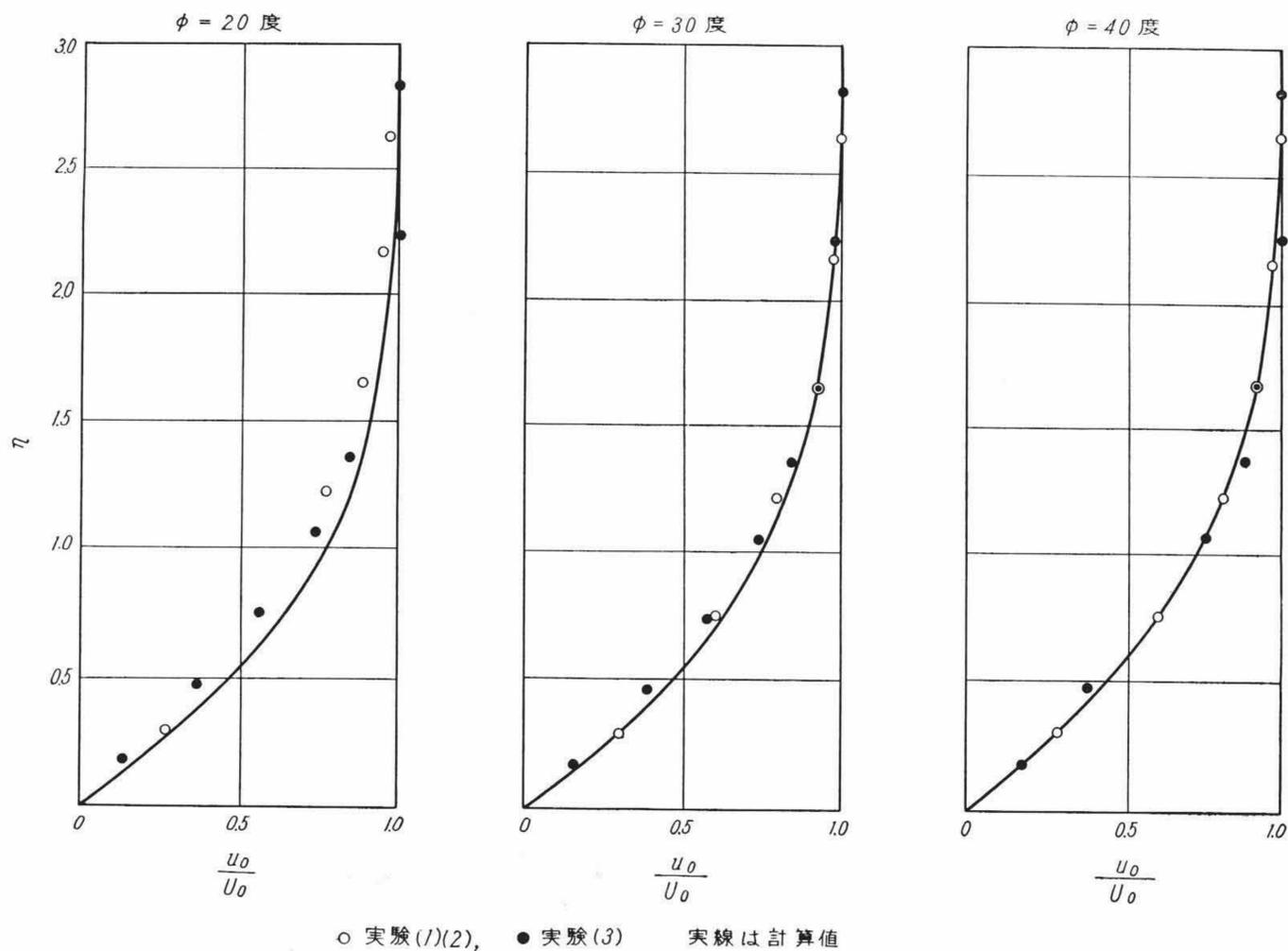
ε の値は、円柱を振動させた振幅(片振幅 22.3 mm) と周波数 n および風洞風速 U_∞ より

$$\varepsilon = \frac{2\pi n \times 22.3}{U_\infty} \dots\dots\dots (63)$$

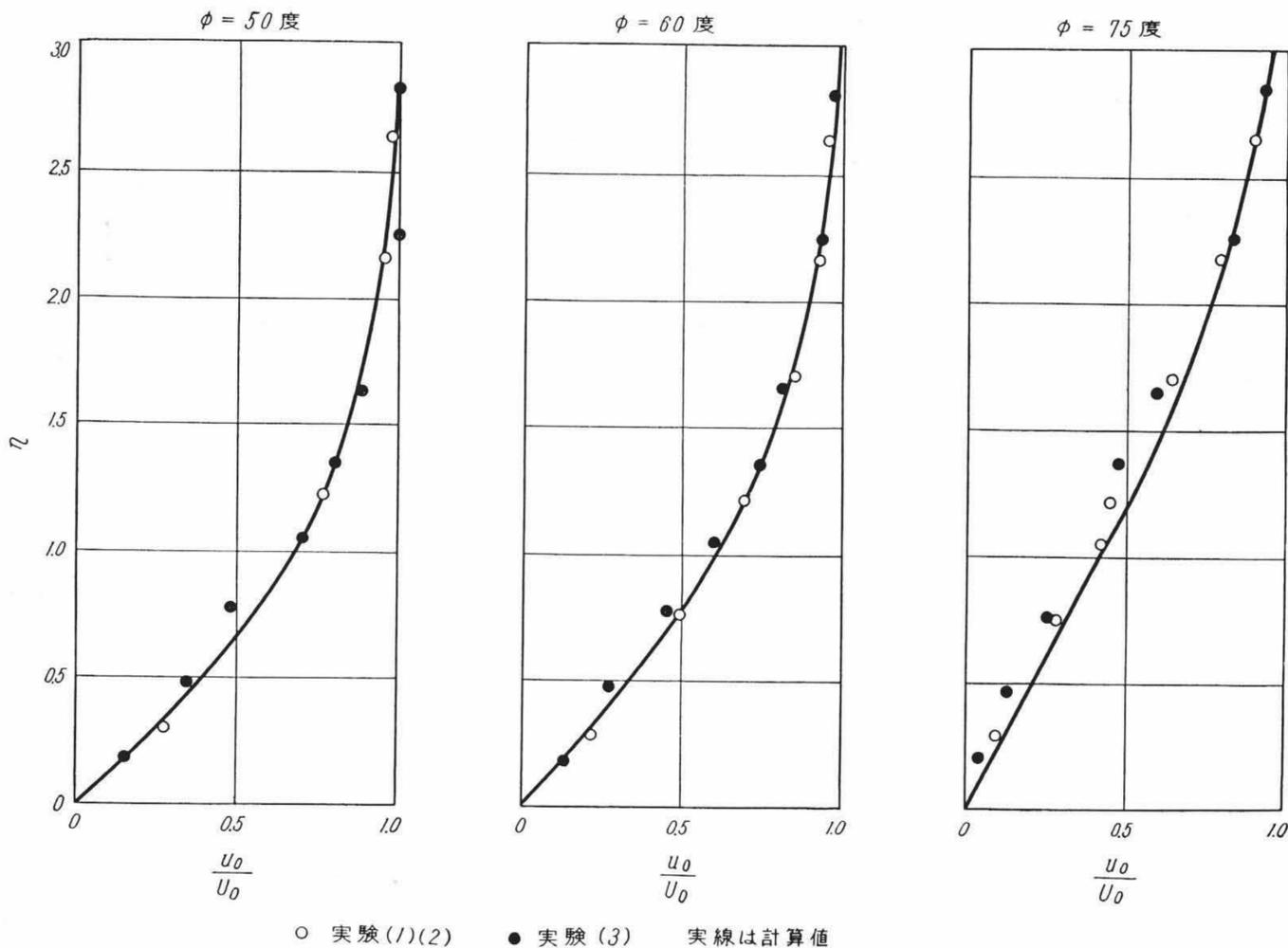
によって計算できる。さらに ε は熱線風速計で層外速度の変動を測って求めることもできる。この両方を第3表に比較したが、圧力最低点の上流ではほぼ一致した。(62)式の仮定は正しいといえる。

速度変動振幅の実験値と、準定常流としての計算値を第19図に比較する。その一致は $\phi=75^\circ$ を除きほぼ満足すべきものである。非定常の速度振幅 ωu_1 は理論的に求めてみると、いまの条件では非常に小さく、無次元周波数がいちばん大きい実験(3)の場合にも準定常振幅の 0.1% にすぎない。したがって実験との比較は準定常振幅について行なえばよい。 $\phi=20\sim 60^\circ$ では、周波数の効果は、 $\omega R/a_0 U_\infty$ が 0.3 程度までならば、無視してさしつかえないことになる。変動振幅の分布形そのものも、この角度範囲内では実験と理論がよく一致すると結論できる。

$\phi=75^\circ$ における実験と計算の不一致はかなり大きい。その理由



第18図(a) 平均速度分布



第18図(b) 平均速度分布

としては、級数解の収束不十分なこと、層外速度の実験式(61)式からのずれ、境界層の三次元的構造、境界層の不安定などが考えられるが、いまのところではどれによるのか断定できない。

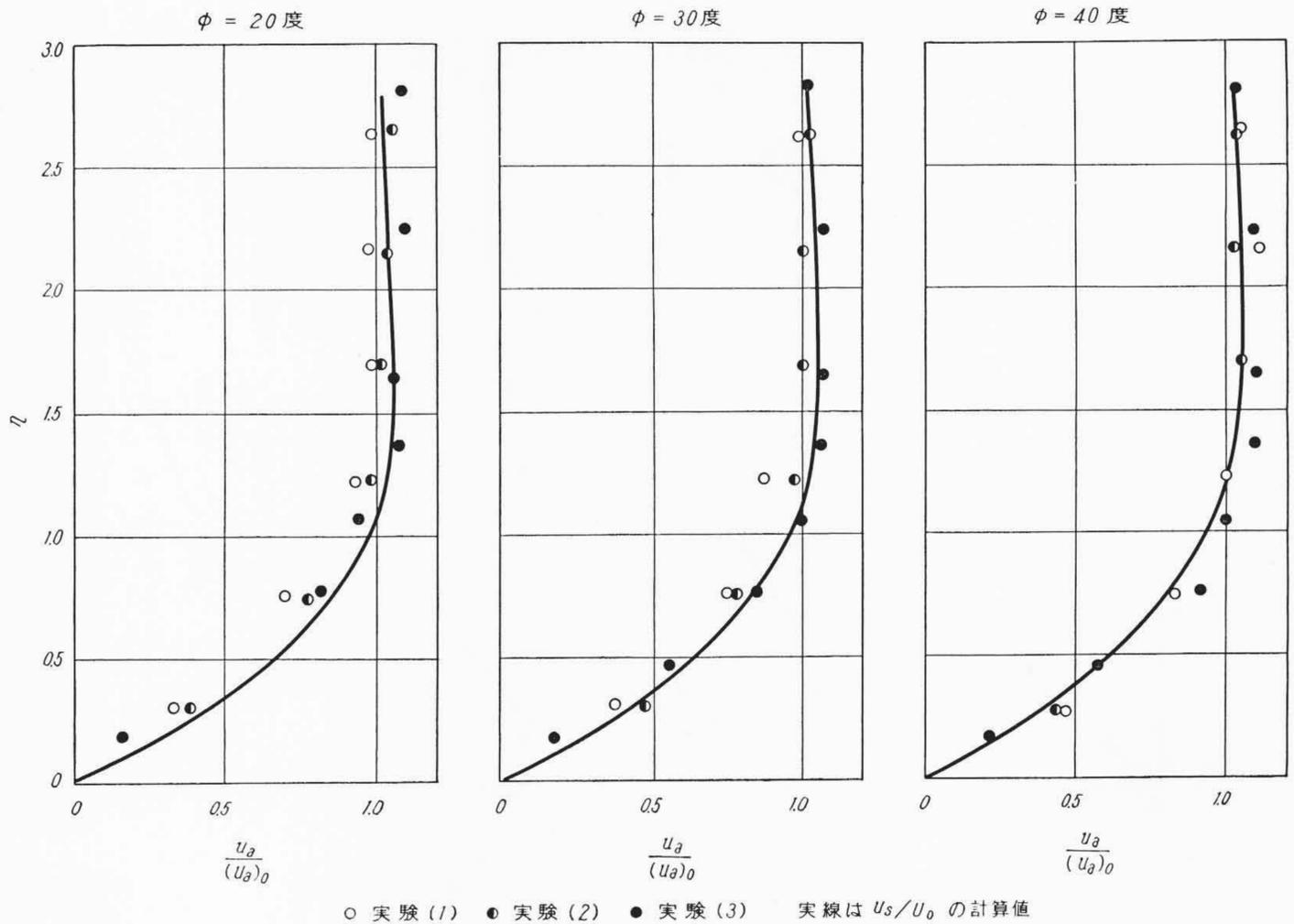
実験(4)、すなわちカルマン渦による層内速度変動の実験と計算の比較は第20図のとおりで、この場合も第19図と同様によどみ点に近いところでは一致は良好で、下流の方ほど不一致が増大する。

以上の比較をまとめてみると、平均速度プロファイル、変動振幅の分布のいずれも、よどみ点から圧力最低点の間では実験と計算の一致は満足すべきものがあるが、圧力上昇に向かう75度のところで

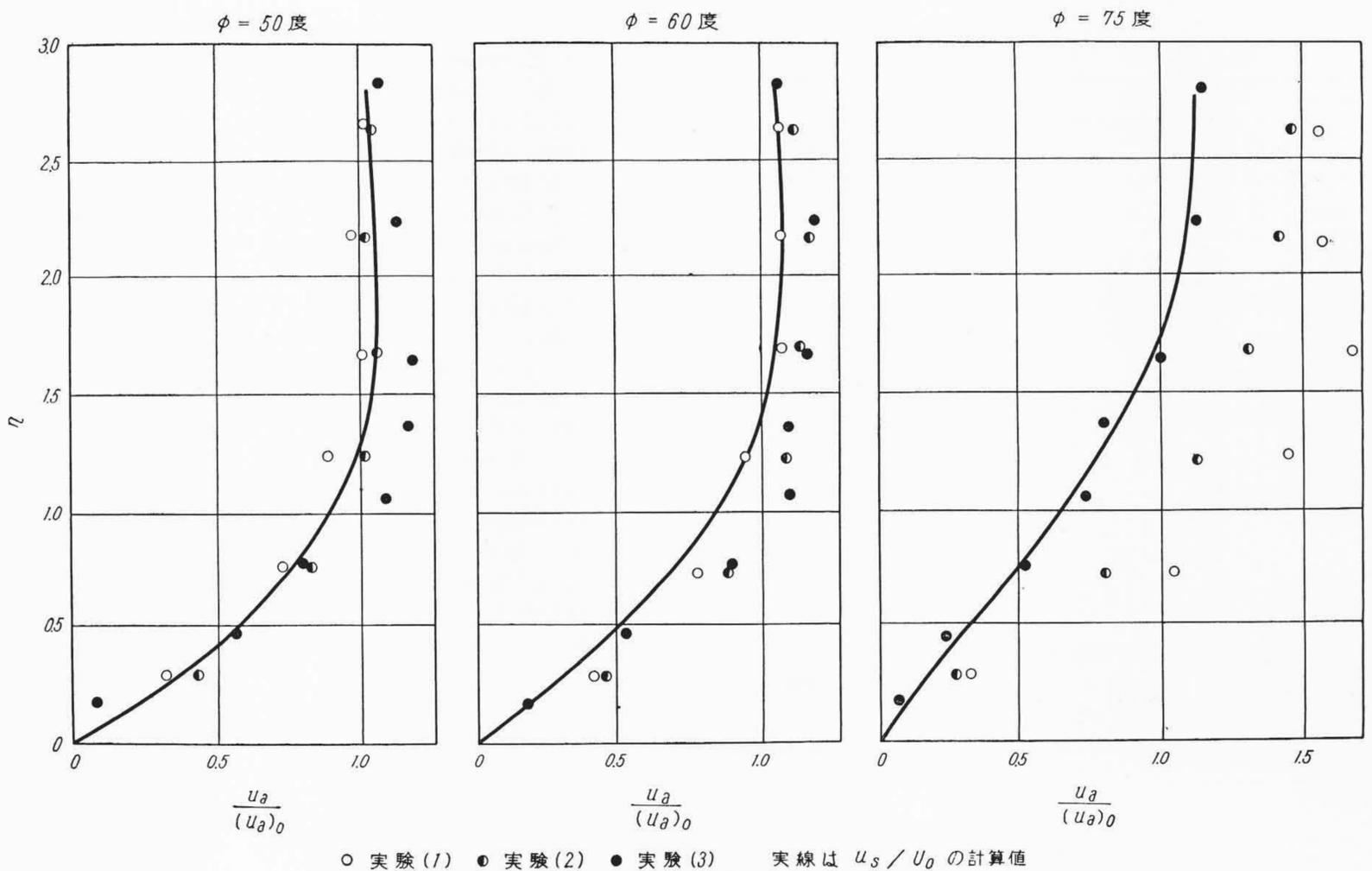
は一致は悪く、その主因は級数の収束不十分にあると考えられる。 $\omega R/a_0 U_\infty$ が0.3程度ならば、準定常流としての計算が十分成立する。

6. 結 言

境界層の外側の流れの速度が有限な時間平均値を有し、流れが定常流に近い場合に、層外の速度の微小な周期的変動とか、物体壁の微小振動によって引き起こされる境界層の時間的な変化を研究した。



第19図(a) 変動振幅の分布



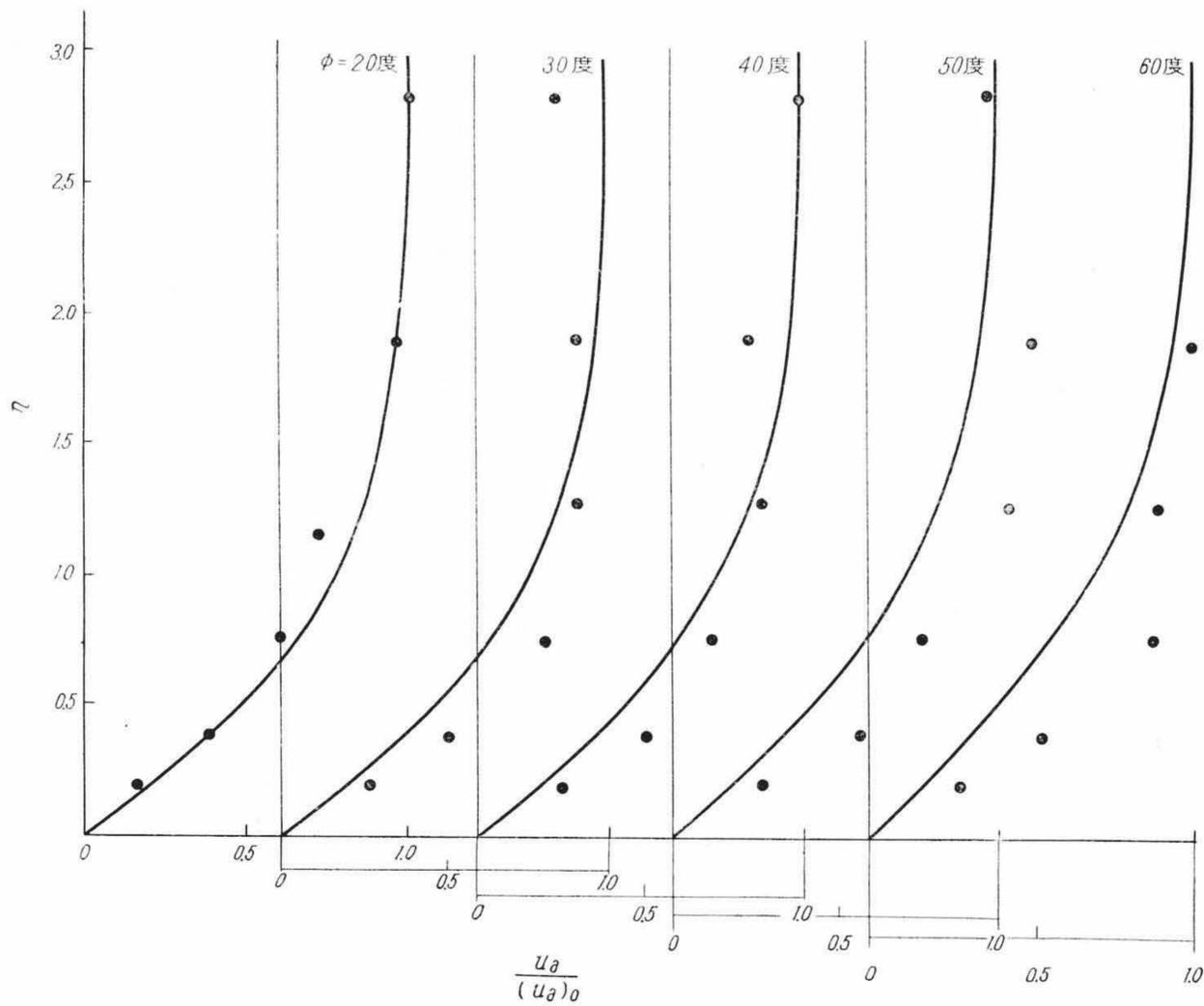
第19図(b) 変動振幅の分布

まず外部条件の変化率を表わす微小パラメータ ε に関して変動速度を展開して、変動速度に対する線形の境界層方程式を導いた。次いで、変動速度を周波数パラメータで展開し、速度振幅の方程式を求めた。

境界層の偏微分方程式を常微分方程式に帰着させて一般的な解を求めるために、べき級数解法を発展させた。従来からある Blasius 級数の拡張と新しい級数解法の提案を行なった。いずれも普遍関数の線形結合で解が得られる便利さがあり、しかも一つの解法の普遍

関数群からほかの解法の関数群が容易に導き出せる。

級数解法を速度変動の計算にも適用し、境界層はがれ点付近の流れの模様を考察した。層外速度が変動する場合には、変動振幅の円柱面にその分布形式によって、層内変動の模様が異なることを見だし、また ε^2 の程度の変動の検討から ε の程度の計算は ε が 0.5 程度になってもよい近似であることを見いだした。回転振動円柱の計算結果を用いて、非定常境界層のはがれに関する Moore の説の欠点を指摘し、新しいはがれの定義を考えた。



第20図 変動振幅の分布 (実験(4))

第3表 ϵ の比較

番号	(63)式	20°	30°	40°	50°	60°	75°
(1)	0.11	0.13	0.12	0.10	0.10	0.11	(0.13)
(2)	0.15	0.18	0.17	0.16	0.16	0.18	(0.21)
(3)	0.27	0.28	0.30	0.30	(0.32)	(0.36)	

最後に風洞実験の結果を記述し、理論計算結果と比較した。圧力最低点より上流では実験と計算の一致は良好であって、理論の仮定が正しいことが検証された。

本研究は名古屋大学工学部内田茂男教授と古屋善正教授のご指導のもとに行なったものである。両先生の懇切なるご指導に対してここに感謝の意を表わす。

参 考 文 献

(1) H. Kraft: Proc. 9th Int. Congr. App. Mech., Vol. 2, 408 (1957)
 (2) 高田: 航研集報 2, 306 (昭36-6)
 (3) M. J. Lighthill: Proc. Roy. Soc. Ser. A., 224, 1 (1954)
 (4) 渋谷: 応用力学, 1, 94 (昭23)
 (5) C. C. Lin: Proc. 9th Int. Congr. App. Mech., Vol. 4, 155 (1957)

(6) M. B. Glauert: J. Fluid Mech., 1, 97 (1956)
 (7) N. Rott: Quart. App. Math., 13, 444 (1956)
 (8) S. H. Lam, N. Rott: Grad. School of Aero. Eng., Cornell Univ. AFORS, TN-60-1100 (1960)
 (9) C. R. Illingworth: J. Fluid Mech., 3, 471 (1958)
 (10) R. J. Gribben: ASME Paper No. 60-WA-203 (1960)
 (11) J. Kestin, P. F. Maeder, H. E. Wang: App. Sci. Res. Ser. A, 10, 1 (1961)
 (12) P. G. Hill, A. H. Stenning: Trans. ASME, Ser. D, 82, 593 (1960)
 (13) 森, 船木: 機械学会東海支部第10期総会 (昭36)
 (14) F. K. Moore: IUTAM Symp. Boundary Layer Research, 296 (1957)
 (15) 堀: 機械学会論文集 27, 1731 (昭36-11)
 (16) H. Schlichting: Boundary Layer Theory (1960)
 (17) H. Görtler: J. Math. Mech., 6, 1 (1957)
 (18) 堀: 機械学会論文集 27, 1176 (昭36-8)
 (19) A. N. Tifford: WADC Tech. Rep., No. 53-288 (1954)
 (20) H. Görtler: DVL Ber. Nr. 34 (1957)
 (21) 堀: 機械学会論文集 27, 564 (昭36-5)
 (22) 堀: 機械学会論文集 27, 167 (昭36-2)
 (23) 堀: 機械学会論文集 27, 573 (昭36-5)
 (24) 堀: 機械学会論文集 28, 890 (昭37-8)