

確率対応法の効率について (III)

— 検出力関数 —

On the Efficiency of the Method of Random Combination
of Fractional Factorial Designs (III)

— Power Function —

山 川 典 宏*
Norihito Yamakawa

内 容 梗 概

本報は実験計画法における配置の型に確率化の手続きを導入した確率対応法について、検出力関数の数学的性質を明らかにすることを目的としている。結論として、配置の型の確率化⁽¹⁾にもとづく確率分布と対象の場
に存在する誤差の確率化による確率分布の複合された分布関数として、この検出力関数をは握できることを明
らかにした。

1. 結 言

実験計画法における従来の実験配置の型は対象の場の確率的変動をノイズとして経過する目的で、確定的配置に限られている。これに対して、確率対応法は計画に確率化の手続きをもちこんで、割り付けられた多要因の中で着目している要因以外の要因をもノイズとして消し去り、全体としての情報の量を高めようとするものである。

このため、確率対応法による実験結果の解析に対しては、通常の確率化された誤差以外に計画に基づくほかの要因の（新しい今一種の）確率変数がはいり込んでくる。したがって、この場合の検出力関数は、この2種類の確率変数の複合された分布関数によって求められる。

I⁽²⁾、II⁽³⁾報において数値的結果を示した検出力関数は、この複合分布関数によるものでなく、その極限の分布として数学的には握される第2の分布関数の平均値をもった第1の確率変数の分布関数によるものであった。本報ではこの複合された分布関数に対する解析的接近を述べる。

2. 計画の確率化と検出力関数

q 個の未知パラメータ $\{\beta_i\}$ ($i=1, 2, \dots, q-1, q$) をもつ線形回帰模型

$$\varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i \dots\dots\dots (1)$$

を考えよう。ここで $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$, ($1 < p < q$) は指定変数であって、これに対して、 $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{q-1}, x_q$ は次に示すように確率変数である。これらに対して $q \times N$ の計画行列

$$D = \begin{pmatrix} H^{(1)} \\ \dots \\ H^{(2)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

を定義する。ここで $H^{(1)}$ と $H^{(2)}$ とは前報にも定義したように、同じ大きさの2水準系の直交配列 $H_{2,N}$ より p 行 ($1 \leq p < N$)、 $q-p$ 行 ($1 \leq q-p < N$) それぞれぬきとった直交行列で

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1\alpha} & \dots & x_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{i\alpha} & \dots & x_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{p\alpha} & \dots & x_{pN} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

および

* 日立製作所笠戸工場

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{p+1,1} & \dots & \dot{x}_{p+1,\alpha} & \dots & \dot{x}_{p+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{q1} & \dots & \dot{x}_{q\alpha} & \dots & \dot{x}_{qN} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

は、たがいに等確率的に対応するものとする。

これらによって、実験点 $x_\alpha = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \dots, \dot{x}_{q-1,\alpha}, \dot{x}_{q\alpha})$ における観測値 y_α は

$$y_\alpha = \sum_{i=1}^p \beta_i x_{i\alpha} + Z_\alpha + \sum_{k=p+1}^q \beta_k \dot{x}_{k\alpha} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで(5)式右辺の第1項は推測しようとする要因で、第2項 Z_α は対象の場に存在する確率変数で、未知分散 σ^2 をもつ正規分布にしたがって独立に分布している確率変数で、第3項がこれからその影響を研究しようとする新たに導入された計画における対応の確率化による新しい確率変数である。もちろん、同じ計画の観測値によって $\{\beta_k\}$ ($k=p+1, p+2, \dots, q-1, q$) を次のステップで推測するのであるが、そのときは、第1項の $\sum_i \beta_i x_{i\alpha}$ が誤差として $\{\beta_k\}$ の推測の邪魔をすることになる。これらの両者はたがいに誤差となっていて、しかもこれらの誤差はいずれからみても確率変数であるので、一般性を失なわないで $\sum_k \beta_k \dot{x}_{k\alpha}$ の項を誤差と考え、それによる影響を考察してゆけるのである。

前報に示したように、いま特定の i ($1 \leq i \leq p$) に関する帰無仮説 $H_0: \beta_i = 0$ に対する仮説の検定の際の統計量

$$F = \frac{N(N-p)b_i^2}{\sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \sum_{i=1}^p b_i x_{i\alpha})^2} \dots\dots\dots (6)$$

の分布関数は計画行列を等確率的に決定したあとでは統計量

$$y(\alpha_1) = F / \{(N-p) + F\}$$

が

$$\begin{aligned} & Q\{y(\alpha_1); \lambda_{1i}, \lambda_2\} \\ &= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} I_{y(\alpha_1)} \left(\frac{1}{2} + c, \frac{N-p}{2} + g \right) P_c(\lambda_{1i}) P_g(\lambda_2) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

に従うことにより求められる。ここで

$$\begin{aligned} P_c(\lambda_{1i}) &= e^{-\lambda_{1i}} \frac{\lambda_{1i}^c}{c!} \\ P_g(\lambda_2) &= e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^g}{g!} \end{aligned}$$

とおいた。

しかるにこのような分布関数は計画を等確率的に決定するたびに

変動するので、これらの計画群（総称して Random Combination of Fractional Factorial Designs, 略して RACOFFD と呼ぶ）全体の検出力関数は(7)式の分布関数に対して、新しい確率変数による確率分布, すなわち $d\Psi(\lambda_{1i}, \lambda_2)$ なる加重を付しての加重平均

$$\xi\{Q(y(\alpha_1); \lambda_{1i}, \lambda_2)\} \\ = \sum_c \sum_g I_{y(\alpha_1)} \left(\frac{1}{2} + c, \frac{N-p}{2} + g \right) \int_0^\infty P_c(\lambda_{1i}) P_g(\lambda_2) d\Psi(\lambda_{1i}, \lambda_2) \quad (8)$$

として求めることができる。ここで $\Psi(\lambda_{1i}, \lambda_2)$ は二つの非心パラメータ λ_{1i}, λ_2 の同時分布関数を示す。

3. λ_{1i}, λ_2 の分布関数近似

3.1 λ_{1i}, λ_2 の構造

二つの確率変数 λ_{1i}, λ_2 の同時分布関数は λ_{1i}, λ_2 がたがいに独立であれば

$$\Psi(\lambda_{1i}, \lambda_2) = \phi_1(\lambda_{1i}) \cdot \phi_2(\lambda_2)$$

のように分割することができる。

非心率 λ_{1i}, λ_2 は前報より

$$\lambda_{1i} = \frac{N}{2\sigma^2} \left(\beta_i + \sum_{k=p+1}^q \beta_k J_{ik} \right)^2 \quad (9)$$

および

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^N H_\alpha^2 \quad (10)$$

である。ここで

$$H_\alpha^2 = \sum_{k=p+1}^q \beta_k^2 A_{k\alpha}^2 + 2 \sum_{k>l} \beta_k \beta_l A_{k\alpha} A_{l\alpha} \quad (11)$$

で、さらに

$$\sum_{\alpha=1}^N H_\alpha^2 = \sum_{k=p+1}^q \beta_k^2 \sum_{\alpha=1}^N A_{k\alpha}^2 + 2 \sum_{k>l} \beta_k \beta_l \sum_{\alpha=1}^N A_{k\alpha} A_{l\alpha} \quad (12)$$

である。

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N A_{k\alpha} A_{l\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^N \dot{x}_{k\alpha} \dot{x}_{l\alpha} - \sum_{i=1}^p J_{il} \sum_{\alpha=1}^N x_{k\alpha} x_{l\alpha} \\ &\quad - \sum_{i=1}^p J_{ik} \sum_{\alpha=1}^N x_{l\alpha} x_{i\alpha} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p J_{ik} J_{il} \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} x_{j\alpha} \\ &= -N \sum_{i=1}^p J_{ik} J_{il} \quad (13) \end{aligned}$$

でまた

$$\sum_{\alpha=1}^N A_{k\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^N (\dot{x}_{k\alpha} - \sum_{i=1}^p J_{ik} x_{i\alpha})^2 = N \left(1 - \sum_{i=1}^p J_{ik}^2 \right) \quad (14)$$

である。これから

$$\sum_{\alpha=1}^N H_\alpha^2 = N \left\{ \sum_{k=p+1}^q \beta_k^2 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=p+1}^q \beta_k J_{ik} \right)^2 \right\} \quad (15)$$

をうる。したがって

$$\lambda_2 = \frac{N}{2\sigma^2} \left[\sum_{k=p+1}^q \beta_k^2 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=p+1}^q \beta_k J_{ik} \right)^2 \right] \quad (16)$$

となる。

ここで

$$\frac{\beta_i}{\sigma} = \beta'_i, \quad \frac{\beta_k}{\sigma} = \beta'_k \quad (17)$$

および

$$\sum_{k=p+1}^q \beta'_k J_{ik} \equiv X_i \quad (18)$$

を定義すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1i} &= \frac{N}{2} (\beta'_i + X_i)^2 \\ \lambda_2 &= \frac{N}{2} \left(\sum_{k=p+1}^q \beta_k'^2 - \sum_{i=1}^p X_i^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となる。

3.2 J_{ik} の分布

まず

$$X_i \equiv \sum_{k=p+1}^q \beta'_k J_{ik}$$

の中の

$$J_{ik} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} \dot{x}_{k\alpha}$$

の性質について考えてみよう。 $x_{i\alpha} = \pm 1, \dot{x}_{k\alpha} = \pm 1$ であるので $H^{(1)}$ と $H^{(1)}$ との確率対応によって点 $(x_{i\alpha}, \dot{x}_{k\alpha})$ の集合は

u_1 個の $(x_{i\alpha} = +1, \dot{x}_{k\alpha} = +1)$

u_2 個の $(x_{i\alpha} = +1, \dot{x}_{k\alpha} = -1)$

v_1 個の $(x_{i\alpha} = -1, \dot{x}_{k\alpha} = +1)$

v_2 個の $(x_{i\alpha} = -1, \dot{x}_{k\alpha} = -1)$

の部分集合に分れる。この場合、直交配列の性質

$$\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{x}_{k\alpha} = 0$$

より

$$\left. \begin{aligned} u_1 + u_2 &= v_1 + v_2 = \frac{N}{2} \\ u_1 + v_1 &= u_2 + v_2 = \frac{N}{2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

がなり立つ。これから

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1$$

をうる。ここで

$$u_1 \equiv \omega_{ik}$$

とおくと

$$\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} \dot{x}_{k\alpha} = 2(u_1 - u_2) = 4\omega_{ik} - N \quad (21)$$

となる。これから

$$J_{ik} = \frac{4}{N} \omega_{ik} - 1$$

が得られる。

$\dot{x}_{k\alpha} = +1$ が $x_{i\alpha} = +1$ に対して ω_{ik} 個対応する確率は

$$p(J_{ik} = \frac{4}{N} \omega_{ik} - 1) = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)^{\omega_{ik}} \left(\frac{N}{2}\right)^{\left(\frac{N}{2} - \omega_{ik}\right)}}{N^{\left[\frac{N}{2}\right]}} \quad (22)$$

である。ここで

$$A^{[b]} = A! / (A-b)!$$

とおいた。(22)式は超幾何分布の分布関数にほかならない。これから

$$\left. \begin{aligned} \xi(\omega_{ik}) &= \frac{N}{4} \\ \sigma^2(\omega_{ik}) &= \left(\frac{N}{4}\right)^2 \frac{1}{N-1} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

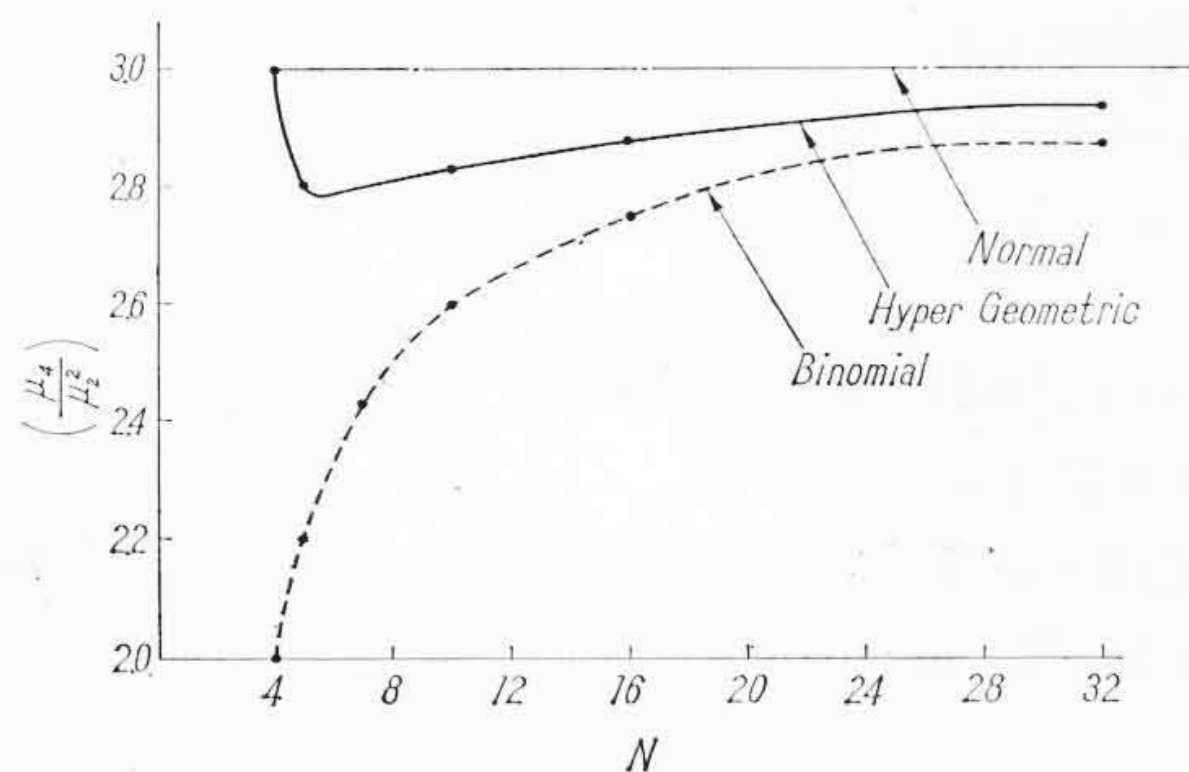
が得られ、さらに

$$\left. \begin{aligned} \xi(J_{ik}) &= 0 \\ \xi(J_{ik}^2) &= \sigma^2(J_{ik}) = \frac{1}{N-1} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

も容易に求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_r(J_{ik}) &= \left(\frac{N}{4}\right)^r \mu_r(\omega_{ik}) \\ p &= q = \frac{1}{2} \\ n &= \frac{N}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

であるので、超幾何分布のモーメント⁽⁴⁾

第1図 Δ_{ik} の μ_4/μ_2^2 の値

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \frac{n p q (N-n)}{N-1} \\ \mu_3 &= \frac{n p q (q-p)}{(N-1)(N-2)} \cdot (N-n)(N-2n) \\ \mu_4 &= \frac{n p q (N-n)}{(N-1)(N-2)(N-3)} [N(N+1) \\ &\quad - 6n(N-n) + 3pq\{N^2(N-2) \\ &\quad - Nn^2 + 6n(N-n)\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

より Δ_{ik} の分布の母ひずみ度, 母過剰度は N の関数として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} &= 0 \\ \frac{\mu_4}{\mu_2^2} &= \frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{\left\{\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{N-1}\right\}}} \left[N(N+1) \right. \\ &\quad \left. - 6\left(\frac{N}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left\{ N^2\left(\frac{N}{2} - 2\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - N\left(\frac{N}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{N}{2}\right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

のように求められる。これをいろいろの N に対して数値的に求めてグラフ化すると第1図の実線のようなになる。 $n = N/2$, $p = q = 1/2$ の2項分布の場合は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} &= 0 \\ \frac{\mu_4}{\mu_2^2} &= 3 - \frac{4}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots (28)$$

となり, 第1図の点線は μ_4/μ_2^2 の値をプロットしたものである。また Δ_{ik} の分布を平均値0, 分散 $1/(N-1)$ の正規分布で近似するとすれば

$$\begin{aligned} \mu_3^2/\mu_2^3 &= 0 \\ \mu_4/\mu_2^2 &= 3 \end{aligned}$$

であるので, これは第1図中に一点鎖線で図示したものとなる。この図から理論的には超幾何分布にしたがう Δ_{ik} は近似的には $m=0$, $\sigma^2=1/(N-1)$ の正規分布にしたがって分布していることがわかる。

3.3 X_i の分布

さらに, 両非心率 λ_{1i} , λ_2 には, この近似的に正規分布する確率変数 Δ_{ik} が

$$X_i \equiv \sum_k \beta_k' \Delta_{ik} \dots\dots (29)$$

のように線形結合で含まれているので, X_i の分布を考えるには2変量 Δ_{ik} , Δ_{il} ($p+1 \leq k, l < q$; $k \neq l$) の同時分布を考える必要がある。

$$\Delta_{ik} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} x_{k\alpha}}{N}$$

および

$$\Delta_{il} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} x_{l\alpha}}{N}$$

の両変量中に含まれる点 $(x_{i\alpha}, \dot{x}_{k\alpha}, \dot{x}_{l\alpha})$ の集合を

- u_{11} 個の $(+1, +1, +1)$
- u_{12} 個の $(+1, +1, -1)$
- u_{21} 個の $(+1, -1, +1)$
- u_{22} 個の $(+1, -1, -1)$
- v_{11} 個の $(-1, +1, +1)$
- v_{12} 個の $(-1, +1, -1)$
- v_{21} 個の $(-1, -1, +1)$
- v_{22} 個の $(-1, -1, -1)$

に分類する。

ここで

$$\left. \begin{aligned} u_{11} + u_{12} &\equiv u_{1\cdot}, & u_{11} + u_{21} &\equiv u_{\cdot 1} \\ u_{21} + u_{22} &\equiv u_{2\cdot}, & u_{12} + u_{22} &\equiv u_{\cdot 2} \\ v_{11} + v_{12} &\equiv v_{1\cdot}, & v_{11} + v_{21} &\equiv v_{\cdot 1} \\ v_{21} + v_{22} &\equiv v_{2\cdot}, & v_{12} + v_{22} &\equiv v_{\cdot 2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

とおく。

直交配列の各列ベクトルの性質

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^N \dot{x}_{k\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{x}_{l\alpha} = 0 \\ \sum_{\alpha=1}^N \dot{x}_{k\alpha} \dot{x}_{l\alpha} &= 0 \quad (k \neq l) \end{aligned}$$

より

$$\left. \begin{aligned} u_{1\cdot} + u_{2\cdot} &= v_{1\cdot} + v_{2\cdot} = u_{\cdot 1} + u_{\cdot 2} = v_{\cdot 1} + v_{\cdot 2} = \frac{N}{2} \\ u_{1\cdot} + v_{1\cdot} &= u_{2\cdot} + v_{2\cdot} = u_{\cdot 1} + v_{\cdot 1} = u_{\cdot 2} + v_{\cdot 2} = \frac{N}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (31)$$

で, これから

$$\left. \begin{aligned} u_{1\cdot} &= v_{2\cdot} \\ u_{\cdot 1} &= v_{\cdot 2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (32)$$

を求め, さらに

$$u_{11} + u_{22} + v_{11} + v_{22} = u_{12} + u_{21} + v_{12} + v_{21} = \frac{N}{2} \dots\dots (33)$$

より

$$u_{11} + v_{11} = u_{12} + v_{12} = u_{21} + v_{21} = u_{22} + v_{22} = \frac{N}{4} \dots\dots (34)$$

が得られる。(33)式に(30)~(32)式を代入し,

$$u_{1\cdot} = \omega_{ik}, \quad u_{\cdot 1} = \omega_{il}$$

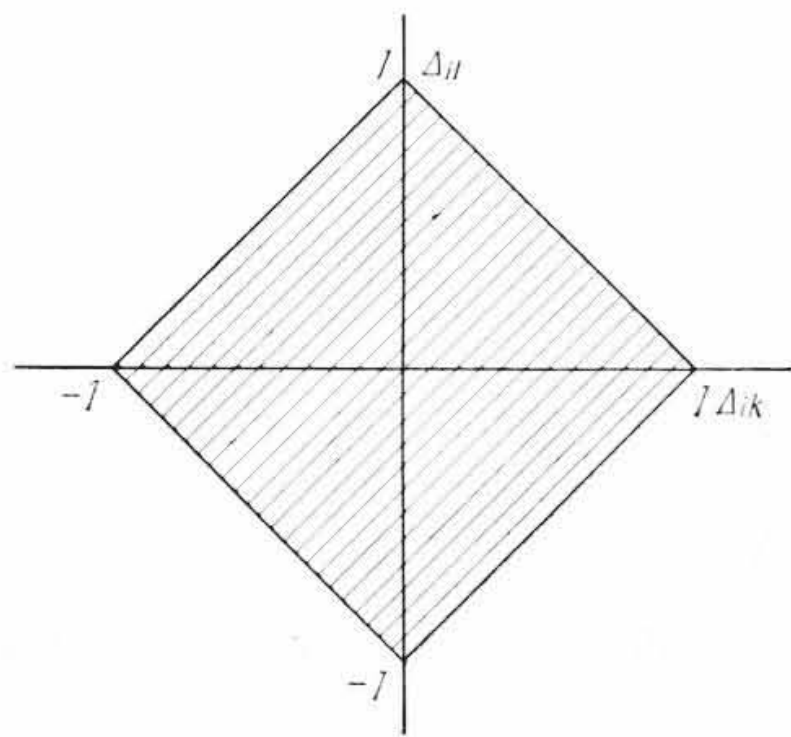
を用いると

$$\left. \begin{aligned} u_{11} + v_{22} + \frac{N}{4} &= \omega_{ik} + \omega_{il} \\ \frac{N}{4} - (u_{21} + v_{12}) &= \omega_{ik} - \omega_{il} \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

が得られる。また(34)式より

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq u_{11} + v_{22} &\leq \frac{N}{2} \\ 0 \leq u_{21} + v_{12} &\leq \frac{N}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (36)$$

であるので

第2図 Δ_{ik} と Δ_{il} の変域

$$\frac{N}{4} \leq \omega_{ik} + \omega_{il} \leq \frac{3}{4}N$$

$$-\frac{N}{4} \leq \omega_{ik} - \omega_{il} \leq \frac{N}{4}$$

となる。したがって

$$\omega_{ik} = \frac{N}{4}(\Delta_{ik} + 1)$$

$$\omega_{il} = \frac{N}{4}(\Delta_{il} + 1)$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \Delta_{ik} + \Delta_{il} \leq 1 \\ -1 \leq \Delta_{ik} - \Delta_{il} \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

が得られる。第2図のハッチ内の領域がこれである。この図より、 Δ_{ik} , Δ_{il} は互いに独立ではないことがわかる。

また

$$\xi\left(\sum_{\alpha=1}^N x_{i\alpha} \dot{x}_{k\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^N x_{i\alpha} \dot{x}_{l\beta}\right) = 0$$

であるので

$$\text{Cov.}(\Delta_{ik}, \Delta_{il}) = 0 \dots\dots\dots (38)$$

となる。

以上を総合すると、 Δ_{ik} , Δ_{il} はいずれもほぼ正規に分布していてしかも両者の共分散は0であるが、両者は完全には独立ではないという同時分布を有していることがわかる。

この分布のさらに詳細な追跡は別報にゆずるが、上述のようにほとんど独立に分布している $\Delta_{i,p+1}$, $\Delta_{i,p+2}$, $\dots\dots$, $\Delta_{i,q}$ の線形結合としての統計量

$$X_i = \sum_{k=p+1}^q \beta_k' \Delta_{ik}$$

はその係数 $\{\beta_k'\}$ の実用化される範囲と N と $q-p$ のある関係を満足するとき

$$\left. \begin{aligned} m=0 \\ V(X_i) = \frac{\sum_k \beta_k'^2}{N-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

なるパラメータをもつ正規分布に近似されることは、以上の議論からも推察される⁽⁵⁾ので、以後の議論においては X_i が(39)式のパラメータをもつ正規分布にしたがっていることを仮定する。

3.4 λ_{1i} , λ_2 の分布関数

$$\lambda_{1i} = \frac{N}{2}(\beta_i' + X_i)^2$$

において X_i が上述のように、正規分布で近似されるとすれば、 $\sqrt{\lambda_{1i}}$ は

$$\left. \begin{aligned} m = \sqrt{\frac{N}{2}\gamma_{2i}} \\ V(\sqrt{\lambda_{1i}}) = \frac{N}{2(N-1)}\gamma_{1i} \equiv \frac{k_1}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

なる正規分布に近似される。ここで

$$\gamma_{1i} \equiv \sum_k \beta_k'^2$$

$$\gamma_{2i} \equiv \beta_i'^2$$

とおいた。

これから $\chi_{1i}^2 \equiv 2\lambda_{1i}/k_1$ は自由度 $n=1$, 非心率

$$\tau = \{\xi(\chi_{1i}^2) - 1\} \frac{1}{2}$$

をもつ非心カイ二乗分布に、近似的にしたがうことがわかる。

$$\xi(\chi_{1i}^2) = 2\xi(\lambda_{1i})/k_1$$

で

$$\xi(\lambda_{1i}) = \frac{N}{2}\gamma_{2i} + \frac{k_1}{2} \dots\dots\dots (41)$$

であることから

$$\tau = (N-1) \frac{\gamma_{2i}}{2\gamma_{1i}} \dots\dots\dots (42)$$

をうる。

次に

$$\lambda_2 = \frac{N}{2} \left[\sum_{k=p+1}^q \beta_k'^2 - \sum_{i=1}^p X_i^2 \right]$$

の分布について考えよう。 $X_1, X_2, \dots\dots, X_p$ がそれぞれ平均値0, 分散 k_1 なる正規分布にしたがって、互いに独立に分布しているとすれば

$$\sum_{i=1}^p X_i^2 / V(X_i) = X_2^2 \dots\dots\dots (43)$$

は明らかに自由度 p なるカイ二乗分布にしたがう。しかるに前述のように、 Δ_{ik} , Δ_{jk} ($i \neq j$) は独立な変量でなく、まったく同様な議論で第2図の領域に制限される。また

$$\lambda_2 = \sum_{\alpha} H_{\alpha}^2 / 2\sigma^2 > 0 \dots\dots\dots (44)$$

でもあるので χ_2^2 を自由度 p のカイ二乗分布に近似することは困難である。

$$\xi(\lambda_2) = \frac{k_1}{2}(N-p-1) \dots\dots\dots (45)$$

となる。これからカイ二乗分布の性質より、 λ_2 はむしろ $N-p-1$ の自由度を有するカイ二乗分布に近似していることが推察される⁽⁵⁾。

以上の議論から λ_{1i} , λ_2 の分布の詳細な追求は別報にゆずり

(1) λ_{1i} は自由度 $n=1$, 非心率 τ の非心カイ二乗分布にしたがう。

(2) λ_2 は自由度 $n=N-p-1$, の中心カイ二乗分布にしたがうことを仮定し、さらに先に進むことにする。

3.5 λ_{1i} , λ_2 の同時分布関数

λ_{1i} , λ_2 は以上の議論からそれぞれ非心カイ, 中心カイ二乗分布に近似できるという見通しを得たが、これらの同時分布を求めねばならない。 λ_{1i} , λ_2 はそのもとの確率変数 b_i および l_{α} が互いに独立に分布していれば明らかに独立である。 b_i と l_{α} は上述の議論から、いずれもほとんど正規に近い分布にしたがっている。また

$$\text{Cov.}(b_i, l_{\alpha}) = \xi\left\{\left(\sum_k \beta_k \Delta_{ik}\right) \sum_l \beta_l (\dot{x}_{l\alpha} - \sum_j \Delta_{jl} x_{ja})\right\} = 0 \dots\dots\dots (46)$$

である。ここで

$$\xi(\Delta_{ik} \Delta_{il}) = 0 \dots\dots\dots (47)$$

および

$$\xi(\dot{x}_{l\alpha} \Delta_{ik}) = 0 \dots\dots\dots (48)$$

を用いた。これから両者はほとんど独立に近いことがわかる⁽⁶⁾。

b_i および l_{α} にも前述の第2図のような関係がやはり存在するが、前同様の議論によって $(N, p; \beta_1, \beta_2, \dots\dots, \beta_q)$ のある範囲内で

$$\Psi(\lambda_{1i}, \lambda_2) \equiv \phi_1(\lambda_{1i}) \phi_2(\lambda_2) \dots\dots\dots (49)$$

とおくことができる。

4. 検出力関数

前節の議論により λ_{1i}, λ_2 の分布関数が明らかになってきたので

$$\begin{aligned} & \xi\{Q(y(\alpha_1); \lambda_{1i}, \lambda_2)\} \\ &= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} I_{y(\alpha_1)}\left(\frac{1}{2}+c, \frac{N-p}{2}+g\right) \xi(p_c(\lambda_{1i}) p_g(\lambda_2)) \end{aligned} \quad (50)$$

を求めることができる。 λ_{1i} と λ_2 との間に独立性が仮定できる範囲内では

$$\xi\{p_c(\lambda_{1i}) p_g(\lambda_2)\} = \xi(p_c(\lambda_{1i})) \cdot \xi(p_g(\lambda_2)) \quad (51)$$

となる。

λ_{1i} の分布関数は非心カイ二乗分布に近似されるので

$$\left. \begin{aligned} \nu' &\equiv \frac{(1+2\tau)^2}{1+4\tau} \\ c_1 &\equiv \frac{1+4\tau}{1+2\tau} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

とおいて

$$\chi_1^2 = \chi'^2 / c_1 = \frac{2\lambda_{1i}}{k_1 c_1} \quad (53)$$

が自由度 ν' の中心カイ二乗分布に近似されるという Patnaik の近似⁽⁵⁾⁽⁶⁾をここで援用しよう。このようにすると λ_{1i} の分布関数は自由度 n の中心カイ二乗分布の密度関数

$$\phi(\chi^2) d\chi^2 = e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \frac{d\chi^2}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (54)$$

より

$$d\phi_1(\lambda_{1i}) = e^{-\frac{\lambda_{1i}}{k_1 c_1}} \left(\frac{\lambda_{1i}}{k_1 c_1}\right)^{\frac{\nu'}{2}-1} \frac{d\lambda_{1i}}{2k_1 c_1 \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right)} \quad (55)$$

が得られる。

また λ_2 は中心カイ二乗分布に近似されるので

$$\frac{2}{k_1} \lambda_2 = \chi_2^2 \quad (56)$$

より

$$d\phi_2(\lambda_2) = e^{-\frac{\lambda_2}{k_1}} \left(\frac{\lambda_2}{k_1}\right)^{\frac{N-p-1}{2}-1} \frac{d\lambda_2}{k_1 \Gamma\left(\frac{N-p-1}{2}\right)} \quad (57)$$

をうる。

一方, $P_c(\lambda_{1i}), P_g(\lambda_2)$ はそれぞれ, ポアソン分布であるので

$$\left. \begin{aligned} Q_{1c} &\equiv \xi(P_c(\lambda_{1i})) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{1i}}}{c!} \lambda_{1i}^c d\phi_1(\lambda_{1i}) \\ Q_{2g} &\equiv \xi(P_g(\lambda_2)) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_2}}{g!} \lambda_2^g d\phi_2(\lambda_2) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

はいずれも複合ポアソン分布である。(57)~(54), (56)式を入れて計算すると

$$\begin{aligned} Q_{1c} &= \frac{1}{c!} \int_0^{\infty} \lambda_{1i}^c e^{-\lambda_{1i}} e^{-\frac{\lambda_{1i}}{k_1 c_1}} \left(\frac{\lambda_{1i}}{k_1 c_1}\right)^{\frac{\nu'}{2}-1} \frac{d\lambda_{1i}}{k_1 c_1 \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right)} \\ &= \frac{1\left(1+\frac{2}{\nu'}\right) \cdots \left(1+\frac{2}{\nu'}(c-1)\right)}{c!} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\nu'}{2} k_1 c_1\right)^c (1+k_1 c_1)^{-\left(\frac{\nu'}{2}+c\right)} \end{aligned} \quad (59)$$

および

$$\begin{aligned} Q_{2g} &= \frac{1}{g!} \int_0^{\infty} \lambda_2^g e^{-\lambda_2} e^{-\frac{\lambda_2}{k_1}} \left(\frac{\lambda_2}{k_1}\right)^{\frac{N-p-1}{2}-1} \frac{d\lambda_2}{k_1 \Gamma\left(\frac{N-p-1}{2}\right)} \\ &= \frac{1\left(1+\frac{2}{N-p-1}\right) \cdots \left(1+\frac{2}{N-p-1}(g-1)\right)}{g!} \\ &\quad \cdot \left\{\left(\frac{N-p-1}{2}\right) k_1\right\}^g (1+k_1)^{-\left(\frac{N-p-1}{2}+g\right)} \end{aligned} \quad (60)$$

をうる。これは複合ポアソン分布の一種の Pôlya-Eggenberger 分布であって,

$$d_1 \equiv k_1 c_1, \quad h_1 \equiv \frac{\nu'}{2} k_1 c_1; \quad d_2 \equiv k_2, \quad h_2 \equiv \frac{N-p-1}{2} k_1$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} Q_{1c} &= \frac{1\left(1+\frac{d_1}{h_1}\right) \cdots \left(1+\frac{d_1}{h_1}(c-1)\right)}{c!} h_1^c (1+d_1)^{-\left(\frac{h_1}{d_1}+c\right)} \\ Q_{2g} &= \frac{1\left(1+\frac{d_2}{h_2}\right) \cdots \left(1+\frac{d_2}{h_2}(g-1)\right)}{g!} h_2^g (1+d_2)^{-\left(\frac{h_2}{d_2}+g\right)} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

をうる。

結論として

$$Q = \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} I_{y(\alpha_1)}\left(\frac{1}{2}+c, \frac{N-p}{2}+g\right) Q_{1c} Q_{2g} \quad (62)$$

により確率対応法の検出力関数を求めることができる。

Pôlya-Eggenberger分布のある極限をとればポアソン分布に一致することから I, II 報で求めた検出力関数は近似性がかなりよいことがわかる。

5. 結 言

確率対応法の検出力関数について数学的に考察して

(1) 非心率 λ_{1i}, λ_2 がカイ二乗分布に非帯に近い分布をもっていること。

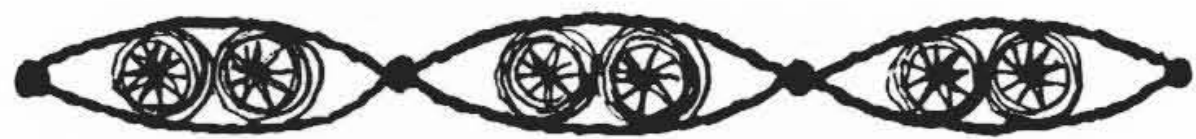
(2) λ_{1i}, λ_2 がカイ二乗分布で近似されると仮定して, 検出力関数は複合のない場合にはポアソン分布関数で示される項を, 計画の確率化によってポアソン分布の複合された分布である Pôlya-Eggenberger分布の分布関数でおきかえられた形になること。

の2点を明らかにした。

終わりにのぞみ, ご指導いただいた九州大学北川教授に深く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- (1) 田口玄一: 実験計画法(上) 132 (昭-32, 丸善)
- (2) 山川典宏: 確率対応法の効率について 日立評論 43, 980 (昭36-8)
- (3) 山川典宏: 同上 II 日立評論 44, 1056 (昭37-7)
- (4) M. G. Kendall: The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, 126 (1948, Charles Griffin Co.ltd.)
- (5) 竹内啓: 文部省数理科学研究第5班報告 1~91 (1960-2)
- (6) D. A. S. Fraser: Nonparametric Methods in Statistics Chap. 6 (1957-John Wiley & Sons Inc.)
- (7) 北川敏男: 実験計画法講義 1, 基礎編(1), 81 (昭30-11 培風館)
- (8) P. B. Patnaik: The Noncentral χ^2 -and F-Distributions and Their Applications Biometrika, 36, 202-232 (1949)
- (9) 北川敏男: ポアソン分布表 17 (昭26-2, 培風館)



特許第301098号

江 森 五 郎・中 村 隆

クロスバー式自動交換方式

この発明は割込接続に関し、被呼者が話中のとき市外交換台からの着信接続の場合に限り自動的に通常の通話経路を使って割込通話回路を完成するようにしたものである。したがって、ストロージャー式自動交換方式にみられるように、市外交換台より割込接続を行なう場合、別途に割込経路を設け、その経路を経て別に扱者がダイヤルを行なうような必要がなくなるので、設備が簡略化され経済的な交換機が得られる。以下図によって、この発明の交換方式を説明する。

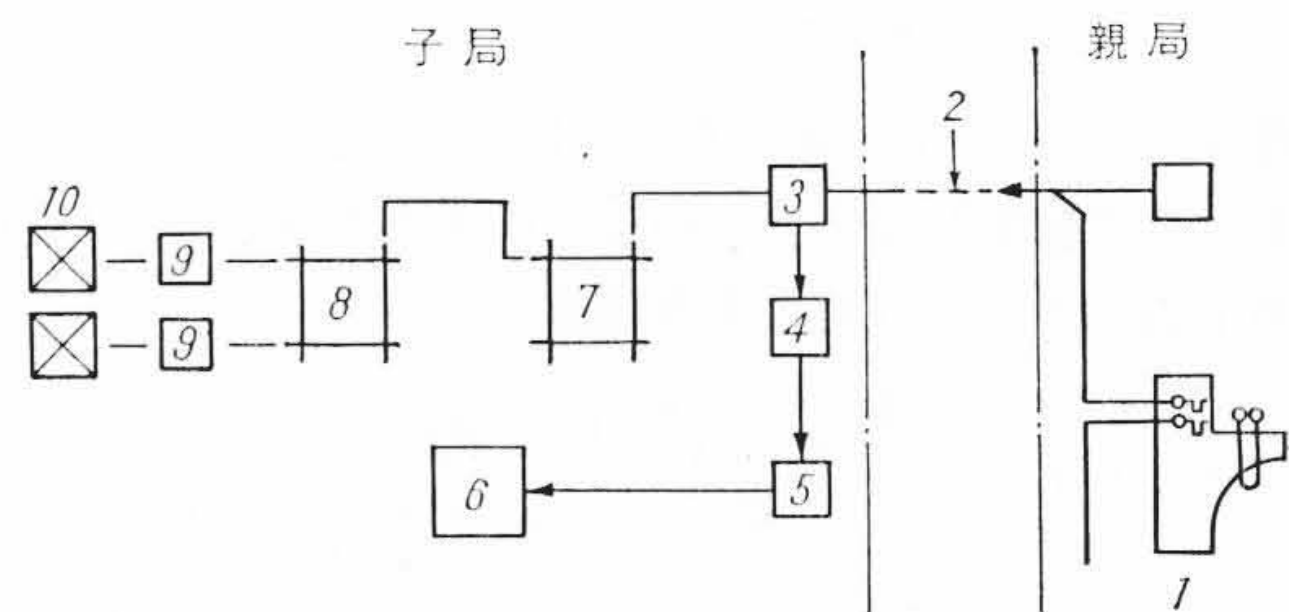
親局市外台1より子局の着信レピータ3に着信があると、着信レピータ3が起動し、レジスタリンク4を経てレジスタ5を捕そくする。このようにレピータ3を介して市外台1からレジスタ5に呼が転送された場合のみ、レジスタ5が捕そくされたことを表わす特殊音が、レジスタ5—レジスタリンク4—着信レピータ3—親局中継線2—市外台1の経路で送出される。この特殊音により、市外台1の扱者は被呼加入者番号をダイヤルし、レジスタ5に計数蓄積させる。ダイヤルインパルスの計数蓄積が終われば、レジスタ5はマーク6を捕そくして被呼加入者番号を送り、さらに市外台1よりの呼であることを転送し、マーク6は被呼加入者が話中であるかどうかを試験する。

ここで被呼加入者が話中でなければ、マーク6はラインクロスバースイッチ8、トランククロスバースイッチ7を動作させて着信レピータ3を被呼加入者10まで接続し、レジスタ5とともに復旧する。

もし被呼加入者10が話中ならば、マーク6は市外台1からの呼がマーク6に転送されていない場合は、着信レピータ3に話中を表示し、レジスタ5とともに復旧し、着信レピータ3より話中音を親局中継線2を経て送り返すが、市外台1からの呼が転送されている場

合は被呼者話中の場合でもマーク6は着信レピータ3にその旨を表示するとともにラインクロスバースイッチ8、トランククロスバースイッチ7を動作させて被呼加入者10に着信レピータ3を二重接続してレジスタ5とともに復旧する。これにより割込経路が準備され、着信レピータ3から市外台1にその表示が行なわれる。市外台扱者が割込電鍵を倒せば、市外台1—親局中継線2—着信レピータ3—トランククロスバースイッチ7—ラインクロスバースイッチ8—被呼加入者10の通常の通話経路と同じ経路で割込通話ができる。割込通話が終わり、加入者10が送受器を電話機にかけると、ラインクロスバースイッチ8が復旧し、レピータ3がレジスタ5を捕そくし、レジスタ5は市外台1へ特殊音を送出する。以後は前述の話中でない場合と同様な過程を経て、マーク6はふたたび通常の通話経路の接続を完成する。

(松 田)



第 25 卷

立

第 8 号

目

次

- ・常磐線の電化
- ・名神高速道路天王山トンネルファンの自動換気
- ・焼けることのない安全なハイカットモートル
- ・テープ録音の失敗をなくした“レベルマチック”つきベルソーナ J
- ・伸びてきた台所の電化
- ・交換手のいない自動交換機
- ・瀬戸内海を走る診療船「かんいほけん丸の X 線装置」

- ・美と衛生の包装革命「新しい包装材料ヒタレックスフィルム」
- ・電線百話 第31話 ケーブルのピンチヒッター
- ・新しい照明施設 平和ビル（大阪）の照明
- ・明日への道標 国産最大容量を誇る二元冷凍用ガス圧縮機
- ・日立ハイライト ポータブルから全自動まで！ アイデアと技術に輝く日立洗濯機
- ・日 立 だ よ り

社 論 評 立 日 所 行 發

取次店 株式会社 才一ム社書店

東京都千代田区丸の内1丁目4番地
振替口座 東京 71824 番
東京都千代田区神田錦町3丁目1番地
振替口座 東京 20018 番