U.D.C. 62-253.5:539.319.001.24

ターボ機械羽根車の応力解析法
Stress Analysis Method for Impeller of Turbo-Machinery

大西紘夫* Hiroo Ônishi

Stress analysis of impellers of turbo-machinery is becoming more important because of the recent design trend toward increased speed and size of these machines.

In this paper fundamental theory of the method of stress analysis of impellers, as developed and used for several years in Hitachi, Ltd. will be explained.

Computed values of stress by the present method shows good agreement with experimental values obtained by photo-elastic method on model impellers.

These values are also compared to the results by two other methods; the conventional method and a finite-element method, and the accuracy of the present method is shown to be high.

1 緒　言

ターボ圧縮機やターボ送風機，ポンプなどに代表される遠心形の流体機械は近年急激に大形化，高速化の傾向にあるが，この傾向に伴い，これらの流体機械の羽根車は強度上非常に過酷な条件下に運転されるようになってきた。羽根車に限らず，一般に高速回転体の破壊事故は被害も大きく，かつ重大災害につながることが多いので，これらの設計に際しては細心の注意を払って強度的な検討が行なわれねばならない。

ターボ機械の羽根車は回転による高い遠心応力を受けているうえに流体による静的および動的な圧力を受け，さらには軸系その他から強制力を受けて加振されている。したがって，羽根車の強度設計の手順としては，まず遠心力および静的な流体圧に関する応力解析を行ない，同時に動的な荷重による変動応力を求めるための振動解析を行ない，次にこれらの結果を材料の疲労強度特性に関するデータと突き合わせて，その設計の可否を判定することになる。

ひるがえって，上述の手順を実現するための応力解析法の現状を見ると，羽根車の構造的な複雑さのためか，動的な応力解析の手法はおろか静的な応力解析法すらまだ確立されていないという状態である。最近ようやく有限要素法を用いた高精度の応力計算法が紹介されるようになってきたが[1]，これとても計算時間が長くかかるという難点があり，個々の製品の設計に利用するには問題があろう。

従来，回転体の強度計算にあたってはドナートの図式解法[2]が主として用いられてきたが，羽根車の高速化にあたり実験的検討を行なった結果，ドナート法では高い周速の羽根車に対する計算法として十分ではないことがわかり，高精度の計算法の確立が望まれていた。以下に，このような要請のもとに開発され，過去数年間にわたって羽根車の強度設計に用いられてきた応力計算法の基本的な考え方およびその応用例について紹介する。

2 羽根車の応力計算法

一般にターボ圧縮機の羽根車は，**図1**に示すように心板および側板と呼ばれる2個の軸対称穀(かく)が羽根と呼ばれる十数枚の曲面板を介して結合された構造になっている。このような構造の羽根車が回転すると，心板と側板の内外径比や円すい角などが異なることに起因して，両者の間には相対変位が生ずる。このとき羽根は自らも変形しつつ，心板と側板の間の相対変位を拘束する部材として作用する。すなわち，羽根の変形は心板と側板の相対変位と一致し，心板と羽根，側板と羽根の間にはそれぞれ拘束力が作用する。羽根が心板および側板と溶接されている形式の羽根車においては，この拘束力は羽根と心板，側板の接合部分全体に分布しているが，以下に述べる計算法においてはこれを有限個の半径位置に作用する集中力に置き換える。羽根が心板および側板とリベット止めされている形式の羽根車においては，この仮定に近い条件になっているものと考えられる。

拘束力を計算するにあたって，まず座標軸を**図2**のようにとる。すなわち，回転軸をz軸とし，半径方向にr軸をとり，円周方向にt軸（図では紙面に垂直方向）をとる。心板および側板に対する拘束力の作用位置をr_1, r_2, …, r_nとし，羽根はn個の羽根要素に分割され，各羽根要素はr_1, r_2…, r_nにおいておのおの独立に心板と側板をつないでいるものとする。この場合，n個の羽根要素が心板に加える拘束力のベク

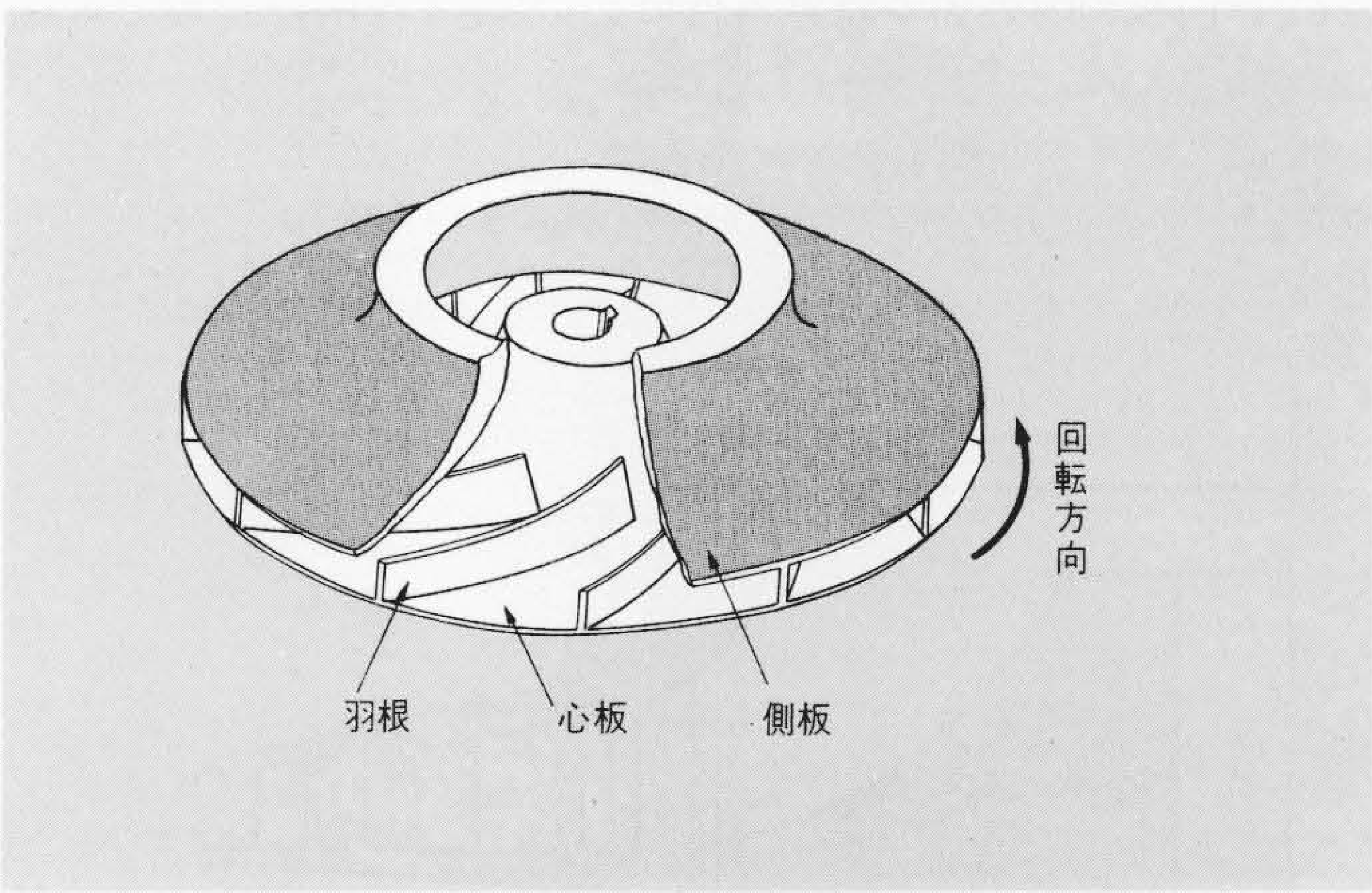

図1　ターボ圧縮機の羽根車　心板が軸に締結され，側板は羽根を介して心板と結合されている。

Fig. 1 Impeller of Turbo-Compressor

* 日立製作所機械研究所

トルを$\{P\}$とすると，側板に加える拘束力は，羽根要素に作用する力のつりあい条件から$\{-P\}$となる。

次に，心板，側板，および羽根のr_1，r_2，…，r_nに関する影響係数マトリックスをそれぞれ$[F^S]$，$[F^G]$および$[F^H]$とし，心板および側板が単体として回転する場合の変位ベクトルを$\{\delta^S\}$および$\{\delta^G\}$とすると，回転中の三者の変位の関係から

$$(\{\delta^G\}+[F^G]\{-P\})-(\{\delta^S\}+[F^S]\{P\})=[F^H]\{P\} \quad \cdots\cdots(1)$$

となる。これを整理すると(2)式のようになる。

$$([F^S]+[F^G]+[F^H])\{P\}=\{\delta^G\}-\{\delta^S\} \quad \cdots(2)$$

これは拘束力$\{P\}$を未知量とする連立一次方程式である。これを解き，求まった$\{P\}$を用いて各部の応力を求めれば，これが回転中の羽根車の応力分布となる。

なお以上の論議は羽根車に遠心力のみが作用した場合に関するものであるが，流体圧やその他の外部荷重が加わる場合には$\{\delta^S\}$および$\{\delta^G\}$を計算するときにこれらを考慮すれば所望の荷重条件における応力分布が求まる。

次に，心板および側板の影響係数マトリックス$[F^S]$，$[F^G]$および単体として回転した場合の変位$\{\delta^S\}$，$\{\delta^G\}$の求め方について述べる。

まず，心板はその形状が与えられると，これを**図3**のように多数の円輪に分ける。個々の円輪は厚さ一様な円板として取り扱い，円板の面内および曲げ変形に関する理論を適用する[3]。単位長さあたりの膜力N_r，N_t，せん断力S_z，曲げモーメントM_r，M_tは次式で表わされる(添字は応力の方向を表わす)。

$$\left.\begin{aligned}
N_r &= C_1+\frac{C_2}{r^2}-\frac{3+\nu}{8}\ \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 h\\
N_t &= C_1-\frac{C_2}{r^2}-\frac{1+3\nu}{8}\ \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 h\\
S_z &= \frac{C_3}{r}\\
M_r &= C_4+\frac{C_5}{r^2}+\frac{1+\nu}{4}C_3(2\,ln\,r-1)\\
M_t &= C_4-\frac{C_5}{r^2}+C_3\left(\frac{1+\nu}{2}ln\,r-\frac{3-\nu}{4}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

ここに，rは半径，hは円板の厚さ，νは材料のポアソン比，γは比重量，gは重力加速度，ωは回転角速度である。また，C_1～C_5は円板の内外周の境界条件によって定まる積分定数である。

円板の半径rにおける半径方向変位uおよびたわみ角φは膜力および曲げモーメントを使って次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{r}{E\,h}\,(N_t-\nu N_r)\\
\varphi &= \frac{12\,r}{E\,h^3}\,(M_t-\nu M_r)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに，Eは材料の縦弾性係数である。

次に，**図3**における円輪と円輪の接合部においては，変位とたわみ角の連続条件が成り立たねばならない。また，接合部に作用する外部荷重をも含めた力と曲げモーメントの平衡条件も成り立たねばならない。この2条件を考慮すると，接合部の内側の円輪の応力値から外側の円輪の応力値を求めることができる。

図3のように分割された円輪群をつなぎ合わせていく手順は，ドナートの方法と同様である。すなわち，一般に心板の最内周における円周方向の膜力および曲げモーメントは未知であるから，これらをXおよびYとする。心板内周の境界条件から半径方向の膜力および曲げモーメントはXおよびYの関数で与えられる。たとえば，内周が自由端のときは，

$$N_r=0,\quad M_r=0$$

であり，内周が固定端のときは，

$$N_r=\frac{X}{\nu}\quad M_r=\frac{Y}{\nu}$$

である。また，内周における軸方向荷重を円周の単位長さあたり$(P_z)_0$とすると，

$$S_z=(P_z)_0$$

である。これらを(3)式に代入すると第1の円輪に対する積分定数が求まり，さらにこれらを用いて円輪外周の膜力，せん断力，曲げモーメントがXおよびYの関数として求まる。次に，前述の接合部の条件を用いると，第2の円輪の内周の膜力，せん断力，曲げモーメントが求まる。この操作を順次外側の円輪について続けていくと最後には最外周の膜力，せん断力ならびに曲げモーメントが，XおよびYの関数として表わされる。ここで最外周の境界条件を導入するとXおよびYの値を決定することができる。ここに求まったXならびにYを用いれば各円輪の応力および変位を計算することができる。

以上の手法を用いて，心板に遠心力のみが作用するときの各点の変位を求めると$\{\delta^S\}$となり，半径r_1，r_2，…，r_nに単位荷重が作用するときの各点の変位を求め，マトリックスの

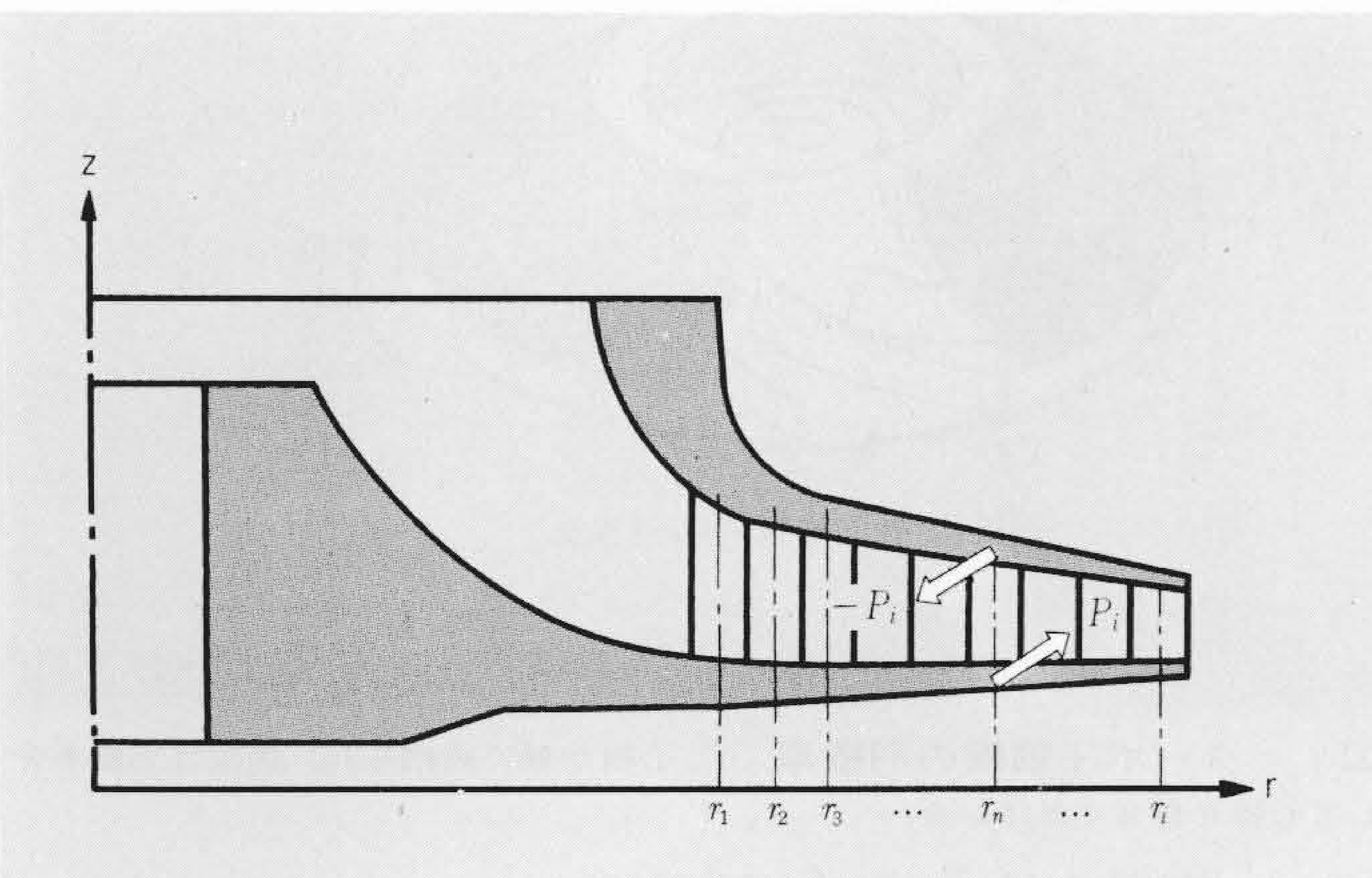

図2　羽根要素への分割　羽根はn個の羽根要素に分割される。個々の羽根要素はそれぞれ独立に変形できるものとする。

Fig. 2 Partition to Blade-Elements

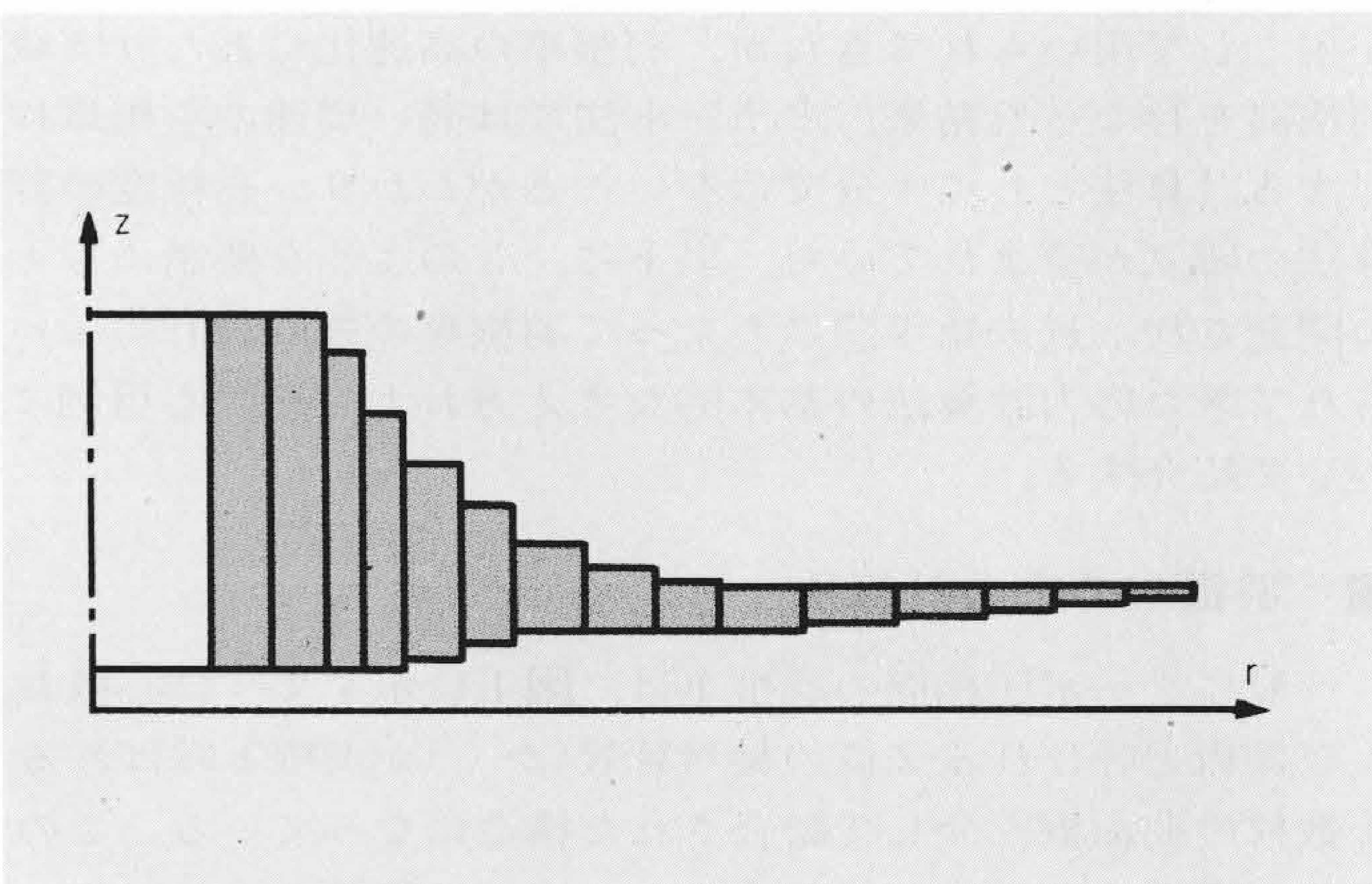

図3　円板要素への分割　心板は多数の等厚円板(円輪)に分けて計算される。

Fig. 3 Partition to Disk-Elements

形にまとめると〔F^S〕となる。側板についても全く同様の手法を用いることによって{δ^G}および〔F^G〕を求めることができる。

次に，羽根要素の変形について考える。羽根要素は両端を弾性支持された棒と考えることができる。いま，求めたい影響係数〔F^H〕は，この棒の心板側の端を支持しておいて側板側の端に r，t，z 軸方向の単位荷重を加えたときの変形特性で表わすことができる。

まず，z 軸方向の変形特性は柱に引張圧縮の力が作用する場合の特性であるから，荷重P_zが作用するときの変位は，

$$\delta_z = \frac{l}{EA} P_z \quad \cdots\cdots(5)$$

で与えられる。ここに l および A は羽根要素の長さおよび断面積である。

次に，r，t 軸方向の変形特性であるが，一般に羽根要素の断面主軸は r，t 軸と一致しないから，主軸の方向に関する変形特性を求めて，これを座標変換することにする。新しい座標軸は**図4**のように羽根に沿った方向にx 軸，羽根に垂直な方向に y 軸をとる。通常羽根の角度は**図4**の β で表わされる。

まず，x 軸方向には羽根要素はせん断変形のみをすると考えると，荷重と変位の間には次のような関係が成り立つ。

$$\delta_x = \frac{l}{GA} P_x \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに，Gは材料のせん断弾性係数である。

次に，y 軸方向には曲げ変形を考えるのであるが，この場合には両端の支持条件に注意する必要がある。すなわち，羽根要素の両端は弾性支持になっているが，そのばね定数は心板および側板の剛性に関連して定められなければならない。ここでは y 軸の方向の変形モデルとして**図5**のようなラーメン構造物を考える。紙面に垂直な方向の厚さを羽根要素の幅に等しくとり，板厚t_S，t_G，t_Hをそれぞれ心板，側板および羽根の厚さに等しくとる。支点間距離を羽根に直角に測った羽根間距離に等しくおいて，

$$L = \frac{2\pi r}{n} \sin\beta \quad \cdots\cdots(7)$$

とおく。

ここに，n は羽根枚数，βは**図4**に示した羽根の角度である。**図5**のようなラーメン構造物に荷重Pyが作用するときの荷重点の変位は，

$$\delta y = \frac{l^3}{12\,Dc} \left\{ 1 + S \,\frac{3(d_{CA} + d_{CB}) + S d_{CA} d_{CB}}{12 + S(d_{CA} + d_{CB})} \right\} Py \quad \cdots\cdots(8)$$

となる。ここにDcは**図5**の部材Cの曲げ剛性であり，d_{CA}，d_{CB}は部材Aおよび部材Bの曲げ剛性をD_AおよびD_Bとするとき，

$$d_{CA} = \frac{D_C}{D_A}, \qquad d_{CB} = \frac{D_C}{D_B} \quad \cdots\cdots(9)$$

で与えられ，また，S は次式で与えられる。

$$S = \frac{L}{l} \quad \cdots\cdots(10)$$

(5)，(6)，(8)式に x，y，z 軸方向に関する羽根の変形特性が示されたので，これを座標変換により r，t，z 軸方向の変形特性に直し，すべての羽根要素について集めると，求める影響係数マトリックス〔F^H〕になる。

以上述べた方法では，心板および側板の計算を行なう際に円板の軸対称変形理論に基礎をおいた計算法を用いている。したがって，この方法では軸対称な変形や応力分布しか求め得ない。しかしながら実際の羽根車では，同一円周上でも羽根の両側でかなり応力値が異なり，羽根間でもかなり変動していることが実験によって明らかにされている。

そこで筆者は上述の計算法を応用して軸非対称な応力分布をも求めうる方法を考案した。その方法はきわめて簡単であり，心板および側板の応力分布は軸対称解析によって得られた結果に**図5**のラーメン構造物の応力を重ね合わせるという操作のみを行なえばよい。また，羽根の応力は同じラーメン構造物の部材Cの応力から得られる。

3 計算結果と実験結果との比較

3では，**2**において述べた計算法の精度を検討するため，本法による計算結果を，別に行なった三次元光弾性モデルを用いた応力凍結法による実験結果と比較する。実験は日立製作所機械研究所の本堂らによって行なわれたものである。

実験に用いられた模型羽根車の一例は**図6**に示すようなものである。この羽根車の半径に沿った断面の一つを示すと**図7**の中央の図のようになる。この断面の表面に沿った応力，すなわち側板および心板の子午線方向の応力をそれぞれ背面と流路面について示せば**図7**(a)~(d)のようになる。図中破線で示したのが，**2**において述べた理論に基づき作成した羽根

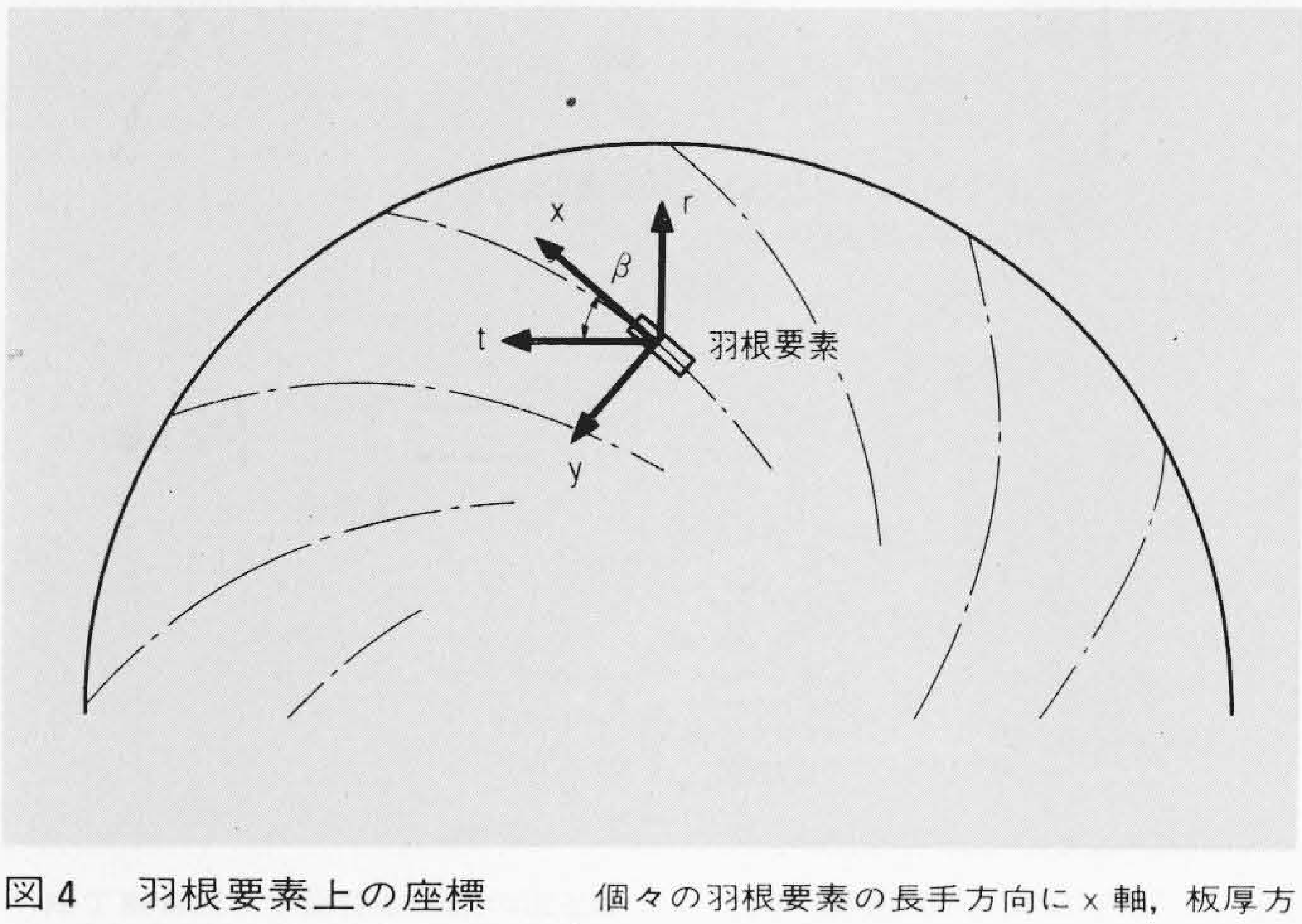

図4　羽根要素上の座標　個々の羽根要素の長手方向に x 軸，板厚方向に y 軸をとる。羽根の角度は通常 β で表わす。

Fig. 4　Co-ordinates on a Blade-Element

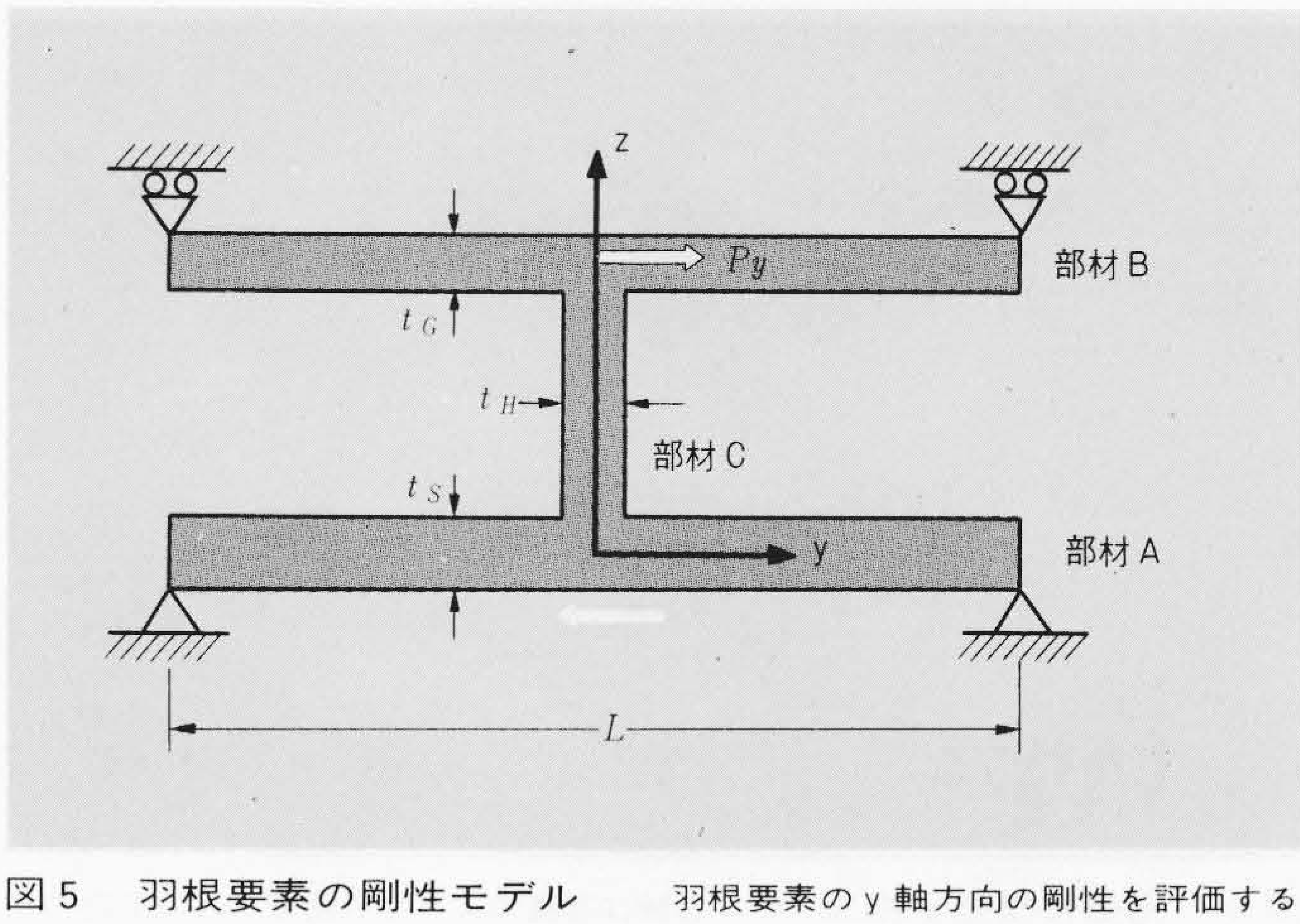

図5　羽根要素の剛性モデル　羽根要素の y 軸方向の剛性を評価するために，羽根要素を図のようなラーメン構造物に置き換えて考える。

Fig. 5　Model to Evaluate Stiffness of Blade-Element

車応力計算プログラム〝R－1″による結果であり，○印が光弾性モデルによる実験結果である。また，実線で示したのは筆者らが〝R－1″とは別に作成した有限要素法による羽根車応力計算プログラム〝STAR″による計算結果である。図より〝R－1″による計算結果はかなり良好な精度で実験結果と一致しており，有限要素法プログラム〝STAR″の計算結果と比較してもあまり劣っていないことがわかる。

なお，心板背面の $r=50\sim80$mmにおいて実験値が大きく波打っているが，これはこの部分に設けられた段付部の局部応力の影響である。〝R－1″，〝STAR″ともシェル理論に基づいたプログラムであるので，このような応力分布は評価し得ない。このような部分の応力を計算によって求める必要のある場合には〝STAR″の結果を基にして，立体要素を用いた有限要素法プログラムで「ズーミング」を行なう必要がある。

次に，羽根車を回転軸を中心とする一つの円筒面で切断し，羽根を中心とした1ピッチ間を図示すると**図8**のようになる。同図の(**a**)～(**d**)には側板および心板の表面の円周方向応力の分布を示している。これらの図からも計算値はよく実験値と一致していることがわかる。

図9には羽根の表面の軸方向応力の分布を示してある。図示されているように，回転方向に対して前面を背側，後面を腹側と呼んでいるが，両表面の応力とも実験値と計算値がきわめてよく一致している。

以上計算値と実験値の比較検討結果の一部を示したが，われわれはさらに広範囲の検討を行ない，〝R－1″が十分実用になるプログラムであることを確かめた。そして，その後製品の実績によるデータの蓄積を行なって現在に至っている。

さて上述のように，本報告に紹介した手法によるプログラム〝R－1″と有限要素法によるプログラム〝STAR″の計算結果はともに良好な精度で実測値と一致することがわかったが，これら二つのプログラムはそれぞれ次のような特長を持っている。すなわち，〝R－1″は取り扱いうる羽根車の形状がかなり限定されるが，計算時間が短いという利点を持っている。一方，〝STAR″はデータの作成に手間がかかる，計算時間が長い，などの難点はあるが，取り扱いうる羽根車の形状，境界条件に対する自由度が高いという点で優れている。

近年構造解析の分野では有限要素法全盛の観があるが，有

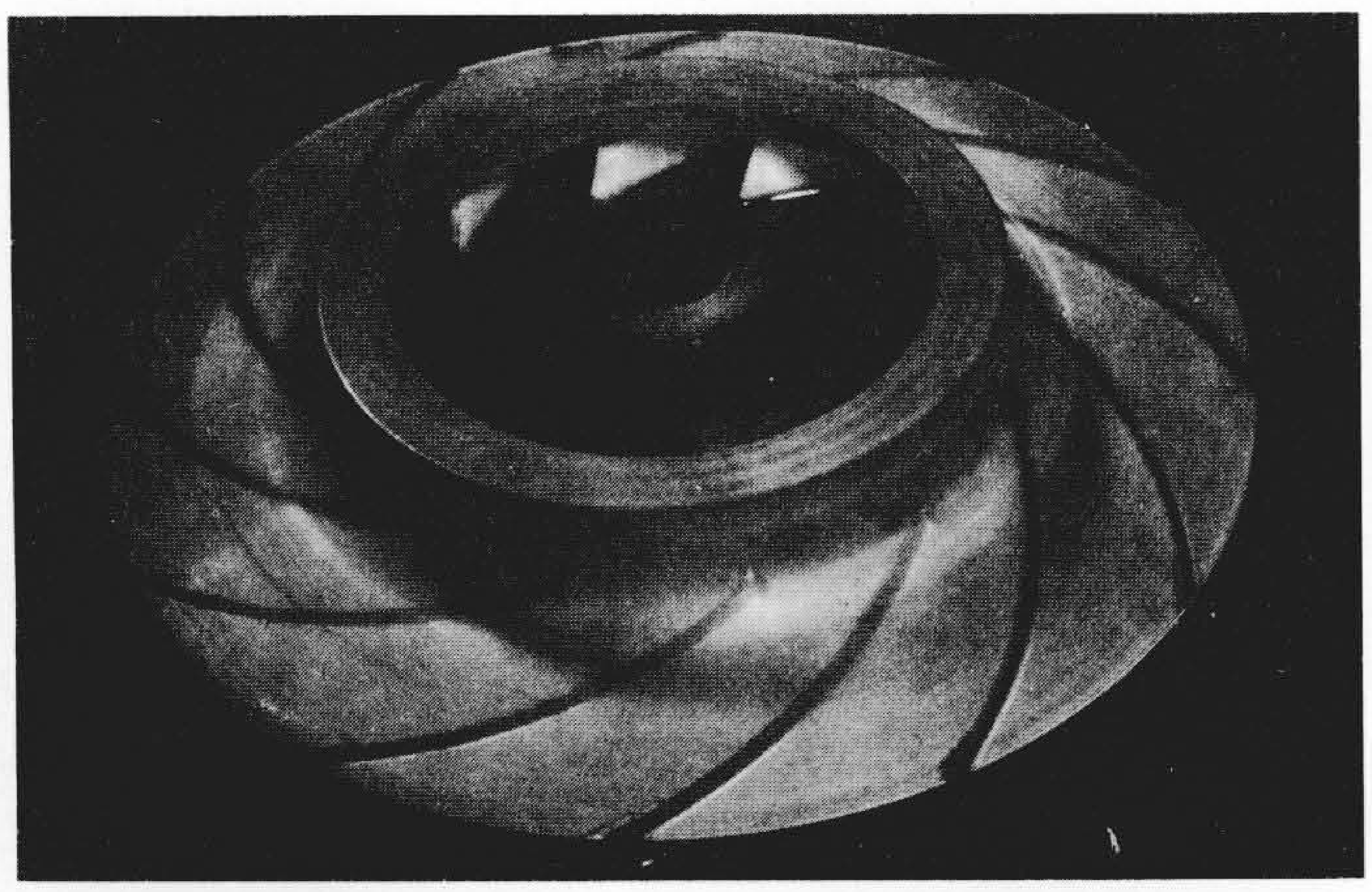

図6　光弾性模型羽根車　実験は写真のような羽根車を用いて応力凍結法によって行なわれた（羽根車外径350mm）。

Fig. 6 Photo-elastic Model Impeller

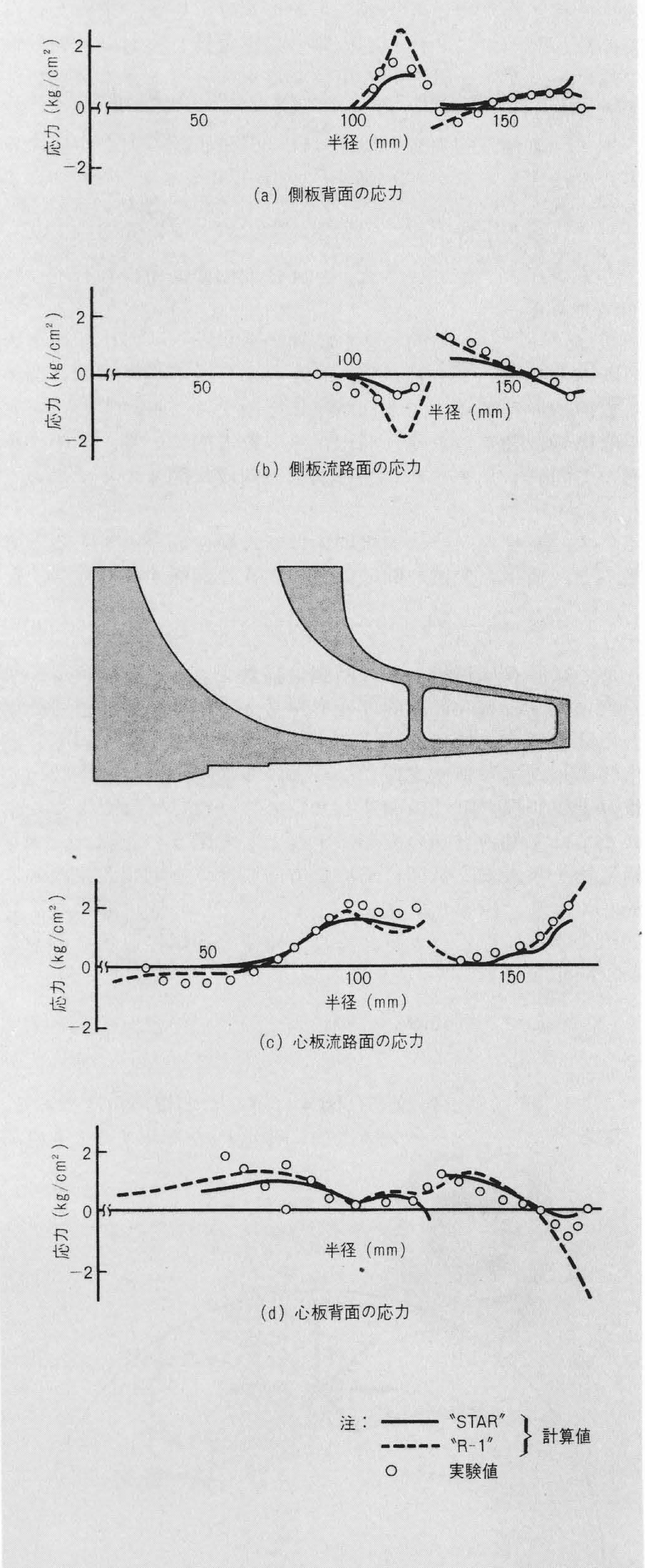

図7　子午線方向の表面応力　流路面の応力は羽根との結合点で曲げモーメントのために不連続となる。

Fig. 7 Meridional Skin Stresses

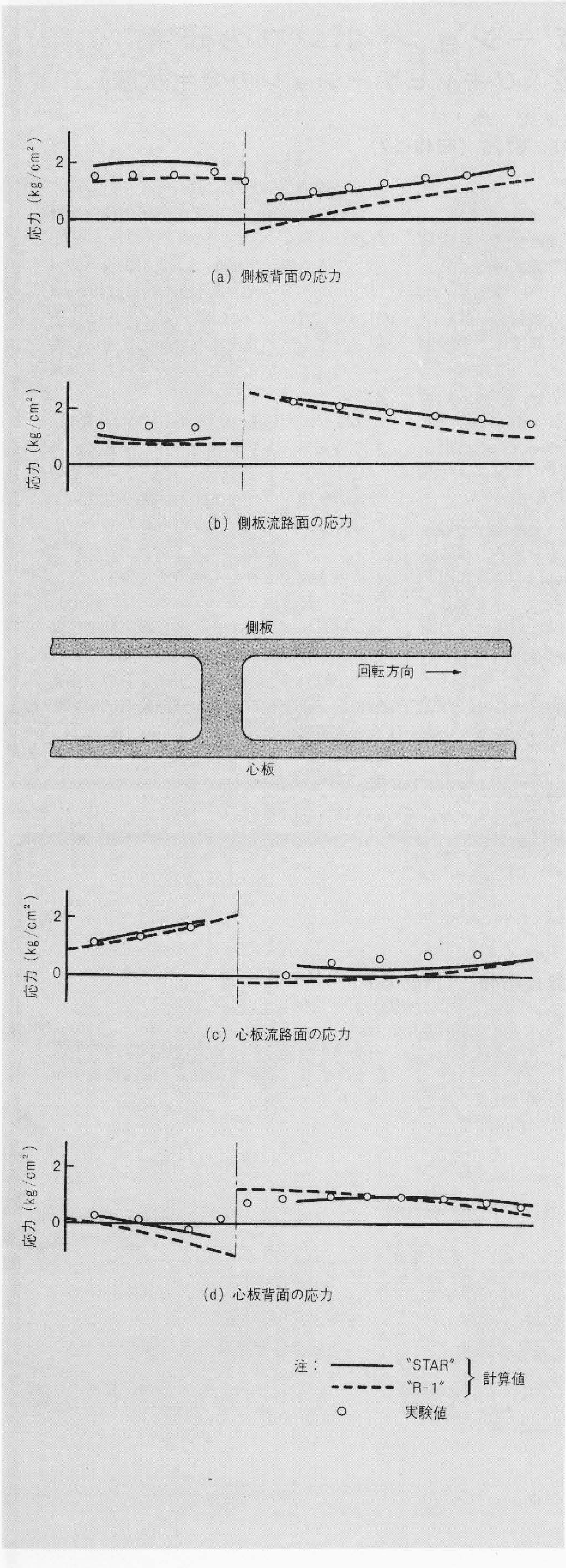

図8　円周方向の表面応力　回転軸を中心とし，r＝155mmの円筒面で羽根車を切断した断面における表面応力の分布を示す。

Fig. 8　Tangential Skin Stresses

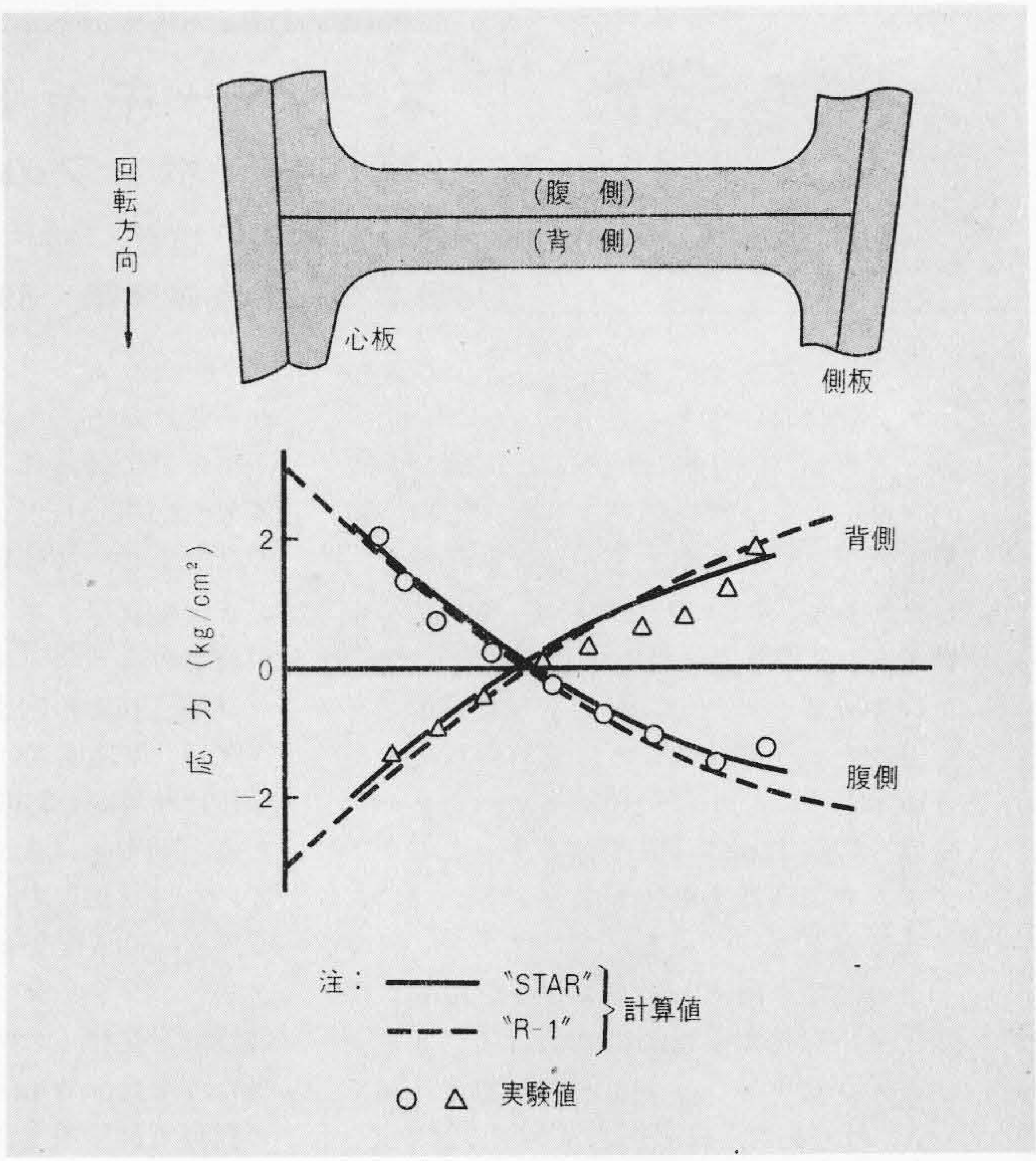

図9　羽根の軸方向表面応力　r＝155mmの位置における羽根に垂直な断面での表面応力の分布を示す。

Fig. 9　Axial Skin Stresses in Blade

限要素法には上述のように計算時間が長いという大きな問題点がある。"STAR"においては「周期境界条件」という新しく考案した手法[4]を導入することによって大幅に計算時間を短縮したが，それでもなお十分とは言い難い。この難点を解決するためには，数値計算の手法を改良することも必要であるが，むやみに有限要素法一辺倒に陥らずに従来の解析的手法を見直してみる必要があるのではなかろうか。上述のプログラムを例にとって言うならば，"R-1"と"STAR"を用途に応じてうまく使い分けるとか，"STAR"に"R-1"の仮定を導入し，粗い要素分割でも精度の落ちない方法を考案するなどの工夫が必要であろう。

4　結　言

以上，現在日立製作所で実用化している羽根車応力計算法の概要について述べたが，本計算法も開発後既に数年を経ており，この間に種々の改良提案があり，適用範囲の拡大のための手直しも数次にわたって行なわれてきた。現在も，さらに計算時間を短縮し，かつ適用範囲を拡大する試みを続けている。また，有限要素法を応用したさらに高精度の応力計算プログラムを開発する計画も進めている。

羽根車をはじめとする高速回転体の応力解析結果の精度向上が，システム全体としての信頼性向上の一助となることを確信して，今後もさらに努力を続けていく所存である。

参考文献

(1)　S.Chacour："DANUTA" A Three-Dimensional Finite Element Program Used in the Analysis of Turbomachinery Trans. ASME (J'l of Basic Engng.), 94, 1, 71 (Mar. 1972)
(2)　日本機械学会編：機械工学便覧，4－85（昭-42）
(3)　K.Löffler：Die Berechnung von rotierenden Scheiben und Schalen, Springer-Verlag (1961)
(4)　大西：周期的な変形モードを呈する構造物の有限要素法解析　機械学会講演論文集 No. 730-13, 175（昭48-10）