

大規模組合せ計画問題に対するパターン解法とその応用

—組合せ理論の生産への適用—

Solution to Large-scale Combinatorial Problems in Production Systems and Its Application

最近、製造業では、高騰する資源やエネルギーをより有効活用するとともに、需要変更の多発化に即応する必要性が増している。このためには、コンピュータの高度利用を図り、むだのない最適な計画をダイナミックに立案する必要がある。具体的には、(1)製紙業での原紙ロスの最小化をねらった原紙の裁断計画、及び(2)家庭電気品発送での積載空間ロスの最小化をねらった車両への積載計画、がその例である。これら計画の多くは、組合せ計画問題として扱う必要があり、計算時間が長大化するのが一般的である。このため、短時間で、満足解を得る技法の開発の要請が大となった。そこで、需要の繰返し性に着目し、パターン生成と最適パターン選択の2段階から成るパターン解法を開発し、上記具体的問題に適用した。

小西洋三* Yôzô Konishi
 小林靖* Yasushi Kobayashi
 三留和幸* Kazuyuki Mitome
 芳賀敏郎** Toshirô Haga
 村井忠雄*** Tadao Murai
 三ツ森繁**** Shigeru Mitsumori

1 緒言

製造業では、高騰する資源やエネルギーをより有効に活用してコスト低減を図るため、例えば次のような組合せ計画問題が重要となっている。

- (1) 製紙工場では、原紙の裁断ロスを最小化するため、種々の大きさの製品を原紙から裁断する問題が重要である。
 - (2) 家庭電気品を工場から発送する際、積載空間ロスを最小化し、かつ輸送費を最小化するため、各種車両に製品をできるだけ多く積載する積載計画問題が重要である。
- これらは、いずれも形状に着目し、資源(原紙、車両など)に対し製品をむだなく組み合わせることであり、離散的構造をもつ組合せ計画問題である。

しかし、(1)資源の有効活用のため、より良い組合せの探索が必要となってきたこと。(2)最近の多品種少量化の傾向から、この種計画問題が大規模化してきたこと。更に、需要の変更

が多発傾向にあることである。このため、コンピュータの高度利用を図って、短い計算時間で実用上満足できる解を得る計画技法の開発が必要となった。

そこで、需要の繰返し性に着目し、パターン生成と最適パターン選択の2段階から成るパターン解法を開発した。

本稿では、パターン解法とその適用事例について述べる。

2 大規模組合せ計画問題の概要

2.1 問題の定義

製造業の計画・管理業務では、図1に示すような離散的な構造をもつ、いわゆる組合せの問題が数多くある。

N 種類の製品と M 種類の資源(例：設備、材料、マンパワーほか)から成る対象で、製品と資源の組合せを制限する L 個の制約 g_α ($\alpha=1, 2, \dots, L$)及び目的関数 $f(\mathbf{x})$ (通常はコ

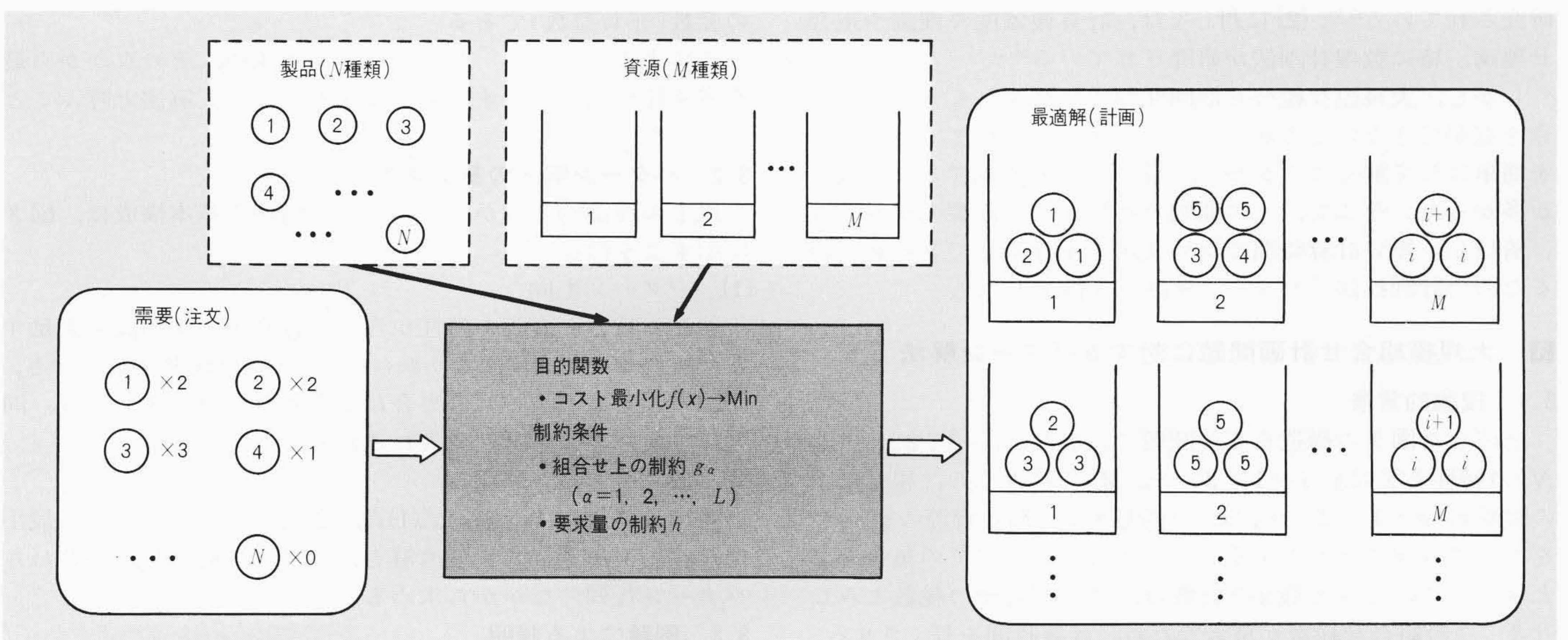


図1 組合せ計画問題の構造 組合せ計画問題は、ある資源にどの製品を何個割り振るかの組合せを求めるという離散的構造をもっている。

* 日立製作所システム開発研究所 ** 山陽国策パルプ株式会社 *** 日立製作所システム事業部 **** 日立製作所栃木工場

ストの最小化)が与えられているとする。ここでの組合せとは、製品と資源の各特性に基づき、ある資源にどの製品を何個割り振るかの組合せを指す。なお x は、ある計画変数である。いま、各製品の要求量が与えられたとき、制約 g_a のもとで、コスト最小化 $f(x) \rightarrow \text{Min}$ を図る最適な組合せと最適な資源の割当てを決定する問題がある。このなかで、量産品の場合のように要求が日常的に繰り返されるという需要の繰返し性の特徴をもつ離散的な組合せ的問題を、ここでは組合せ計画問題と呼び、扱うことにする。

この組合せ計画問題は、例えば各製品の製造のために資源を割り当てるので、広義の資源割当て問題と言える。しかし、ここでは、順序づけ問題は除いて考える。

最近、この種計画問題は、次の理由から大規模化している。

- (1) 多品種少量化の傾向から、品種数が増加しており、これに対応して、資源の種類も増加したこと。
- (2) 資源をより有効活用し、そのむだの最小化を図るため、製品と資源を最適に組み合わせるため考慮すべき条件が増え、かつ組合せ方式の高度化の必要が増えたこと。

2.2 問題点と従来技法

コンピュータを使って、大規模組合せ計画問題の解を求めるに当たっては、次の困難な問題点を克服する必要がある。

(1) モデル化・定式化の問題点

複雑に交錯した実際の計画業務をモデル化・定式化することは容易でない(例えば、本稿4.1.2及び4.2.2を参照)。

(2) アルゴリズム化の問題点

モデル化・定式化ができたとしても、所与のコンピュータ能力で、かつ限られた計算時間で、最適解ないしは準最適解を得るためのアルゴリズム化は容易でない。例えば、あるひとつの資源に対する組合せの総数の目安として、 N 種の製品から重複を許して K 個選ぶ組合せの数が考えられる。実規模例として、 $N=100$ 、 $K=10$ とすると、組合せ総数は約 4.3×10^{13} となる。したがって、単純な数え上げで最適解を求めることは、コンピュータを使っても不可能であると言える。

上記の各問題点に対して、組合せ的問題の解法の研究が、これまで次のように行なわれている。

(1) に対しては、問題分割の方法論や多段階計画技法がよく研究されている^{1),2)}。(2) に対しては、計算複雑度の理論や組合せ理論、特に数理計画法が研究されている^{3),4)}。

しかし、大規模な組合せ計画問題では必ずしも上記の問題点を克服できないことがある。この場合、これまではモデルを簡単にして解くことが多く、目的を十分達成できないことが多かった。そこで、この問題の特性、特に需要の繰返し性に着目し、短い計算時間でかつ実用上十分満足できる解を得るための計画技法「パターン解法」を開発した⁵⁾。

3 大規模組合せ計画問題に対するパターン解法

3.1 理論的背景

前述した図1の構造をもつ問題で、製品 i ($i=1, 2, \dots, N$)の特性と製品 j ($j=1, 2, \dots, M$)の特性から、組合せ上の制約 g_a ($a=1, 2, \dots, L$)を満足する製品と資源の組合せをすべて列挙できたとする。この組合せのすべての集合を V とする。このとき変数 x の個数は、この組合せの総数とみなせる。この組合せ総数が莫大なため、計算時間を長くさせる。

そこで、この問題の特性すなわち需要の繰返し性に着目し、この変数の総数を減らすことを考えた。量産品のように需要が繰返し生ずる日常的計画業務では、通常納期余裕が設定できる。図2のように要求量の累積を取ると、最早要求量曲

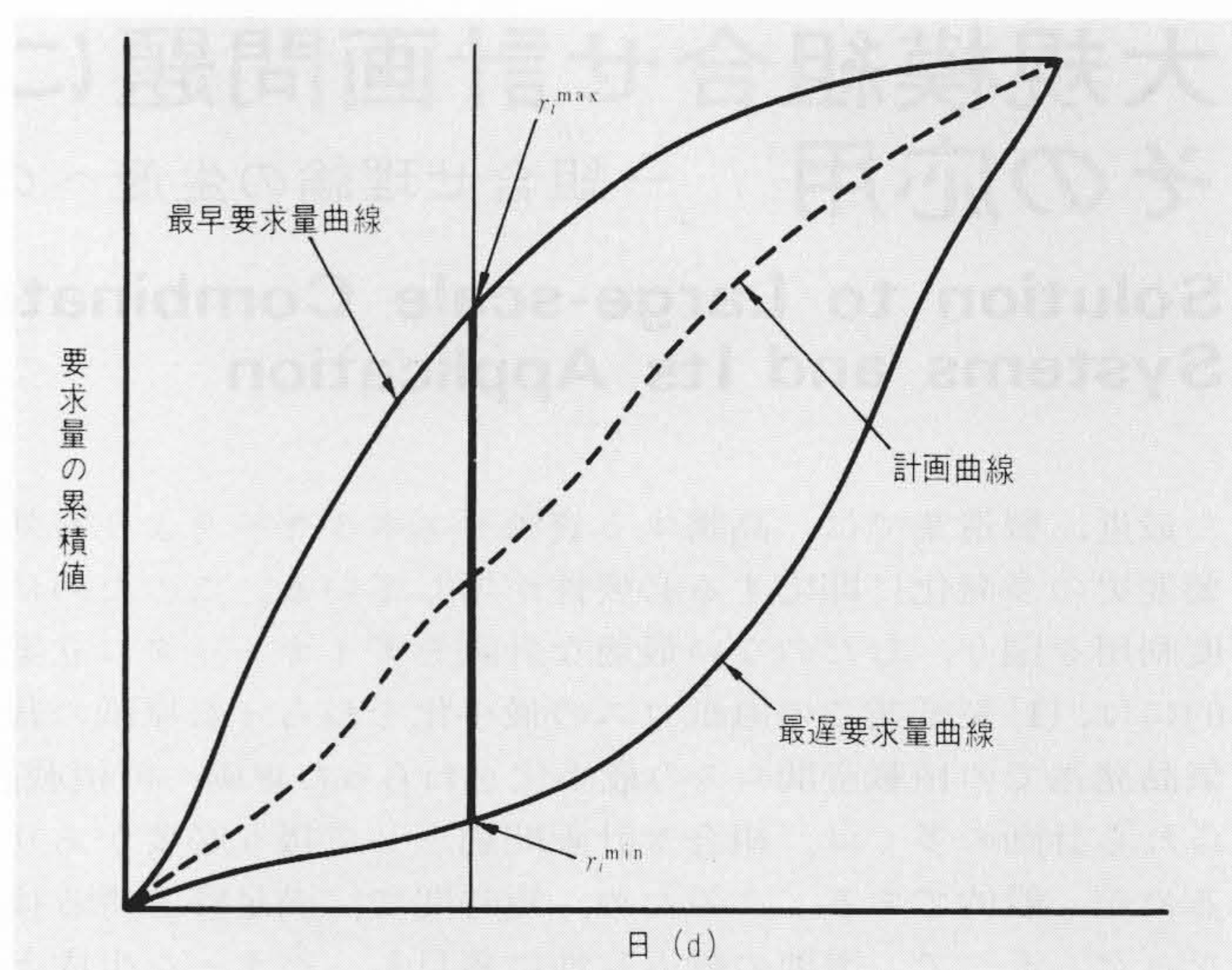


図2 要求量の余裕幅 需要(注文)に納期余裕が設定できれば、最遅と最早の累積要求量曲線ができ、要求量に余裕幅ができる。

線と最遅要求量曲線ができ、要求量に余裕幅が生ずる。

もしこの余裕幅が十分大なることを仮定すると、各資源を十分高度に有効活用するような組合せだけを解として得ることが可能である。また、需要が繰返し生ずる場であるので、長期的にみてもコスト最小化の目的を図ることが可能な組合せだけを考慮すればよい。このときの組合せをパターンと呼び、これを決めるべき基準をパターン生成基準と呼ぶ。このパターンの集合 U は、集合 V の部分集合であるので、変数の総数が減り、それだけ計算時間が短縮される。

いま資源 j のパターンのうち、 k_j 番目のパターンをベクトル $(p_{kj1}^{(j)}, p_{kj2}^{(j)}, \dots, p_{kjN}^{(j)})$ で表わす。 $p_{kji}^{(j)}$ は、製品 i の個数である。要求量の最大値を $r_i^{\max}$ 、最小値を $r_i^{\min}$ とすると要求量の制約は、

$$r_i^{\max} \geq \sum_{\text{all } k_j} p_{kji}^{(j)} \quad x_{kji}^{(j)} \geq r_i^{\min} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots(1)$$

$$x_{kji}^{(j)} = 0, 1, 2, \dots, \dots \dots \dots(2)$$

である。ここに、 $x_{kji}^{(j)}$ は、 k_j 番目のパターンを何個選択するかの変数(非負整数)である。

このように、パターンをあらかじめ求め、そのなかから最適解を探し出そうとする計画技法をパターン解法と呼ぶことにした⁵⁾。

3.2 パターン解法の基本構成

以上の理論的背景から、パターン解法の基本構成は、図3に示すようになる。

(1) パターン生成

製品の特性と資源の特性から、組合せ上の制約 g_a を満足する全組合せの集合 V のなかから、パターン生成基準に基づき、同図のようにパターンの集合 U を求める。全パターンは、同図に示すパターン行列で表わされる。

(2) 最適パターン選択

要求量に対して、制約式(1)式、(2)式のもとで、コスト最小化 $f(x) \rightarrow \text{Min}$ を満たす最適解を、パターン集合 U 、すなわちパターン行列のなかから求める。

3.3 例題による説明

非常に簡単な例題により、パターン解法を説明する。

2種類の原紙(大きさ、A: $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, B: $1.2\text{ m} \times 1.8\text{ m}$)から、2種類の製品(大きさ、イ: $0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m}$, ロ: $0.7\text{ m} \times 0.7\text{ m}$)を裁断する問題を原問題とする。なお原紙A、Bの

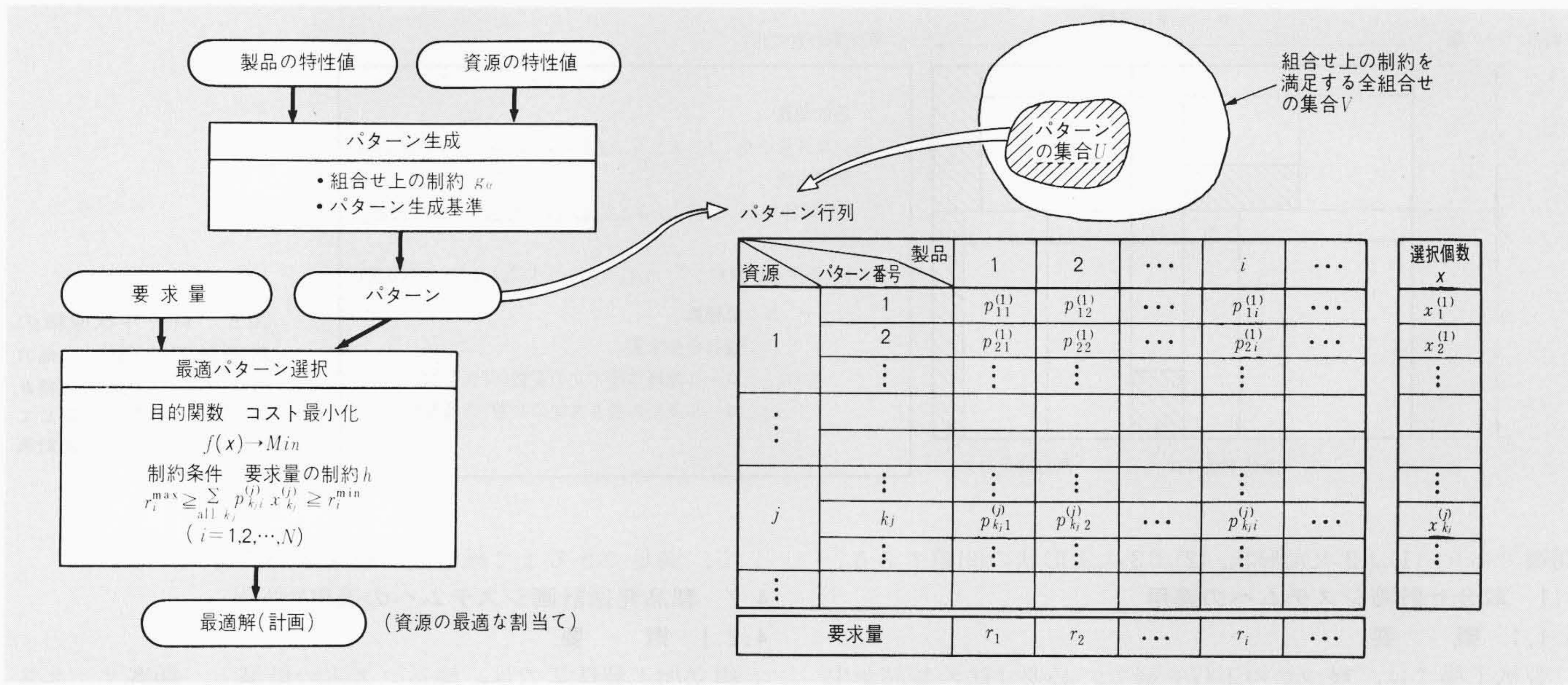


図3 パターン解法の構成 パターン解法は、パターン生成と最適パターン選択の2段階に分けて問題を解く2段階計画技法である。

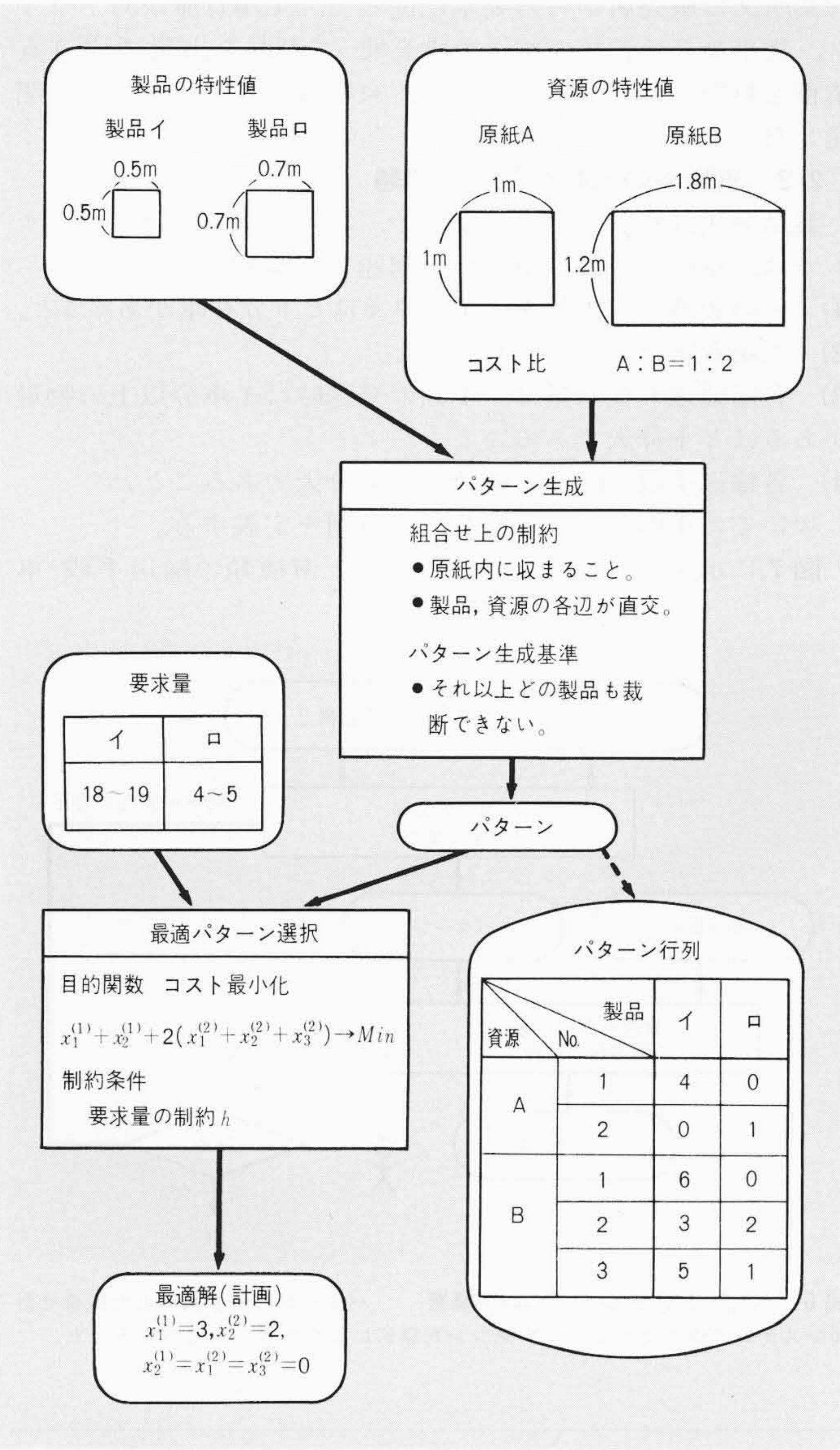


図4 例題によるパターン解法の説明 図3では、パターン解法を一般的に説明した。本図では、簡単な例題により、図3と対応させながらパターン解法を説明する。

コスト比を1:2とする。この問題をパターン解法により解く過程を図4に示す。

- (1) パターン生成
- 「それ以上、どの製品も裁断できない」状態まで裁断する組合せをパターンとする。同図のパターン行列のように、5個のパターンが得られる。一方、試行すれば分かるように、組合せ上の制約を満たす全組合せは21個である。
- (2) 最適パターン選択

この段階では、図4のように整数線形計画問題となる。既存の整数計画プログラムにより、解を求めた一例を同図に示した。

3.4 パターン解法の特徴と適用法

パターン解法では、次の理由から計算時間が短縮される。

- (1) 計画変数 x の個数が減少する(3.1参照)。
- (2) 製品と資源の特性値の変化は緩やかである。例えば、年内に数回変わるだけである。この場合、パターンは固定することができ、需要の変化に応じて最適パターン選択の計算だけ行えばよい。

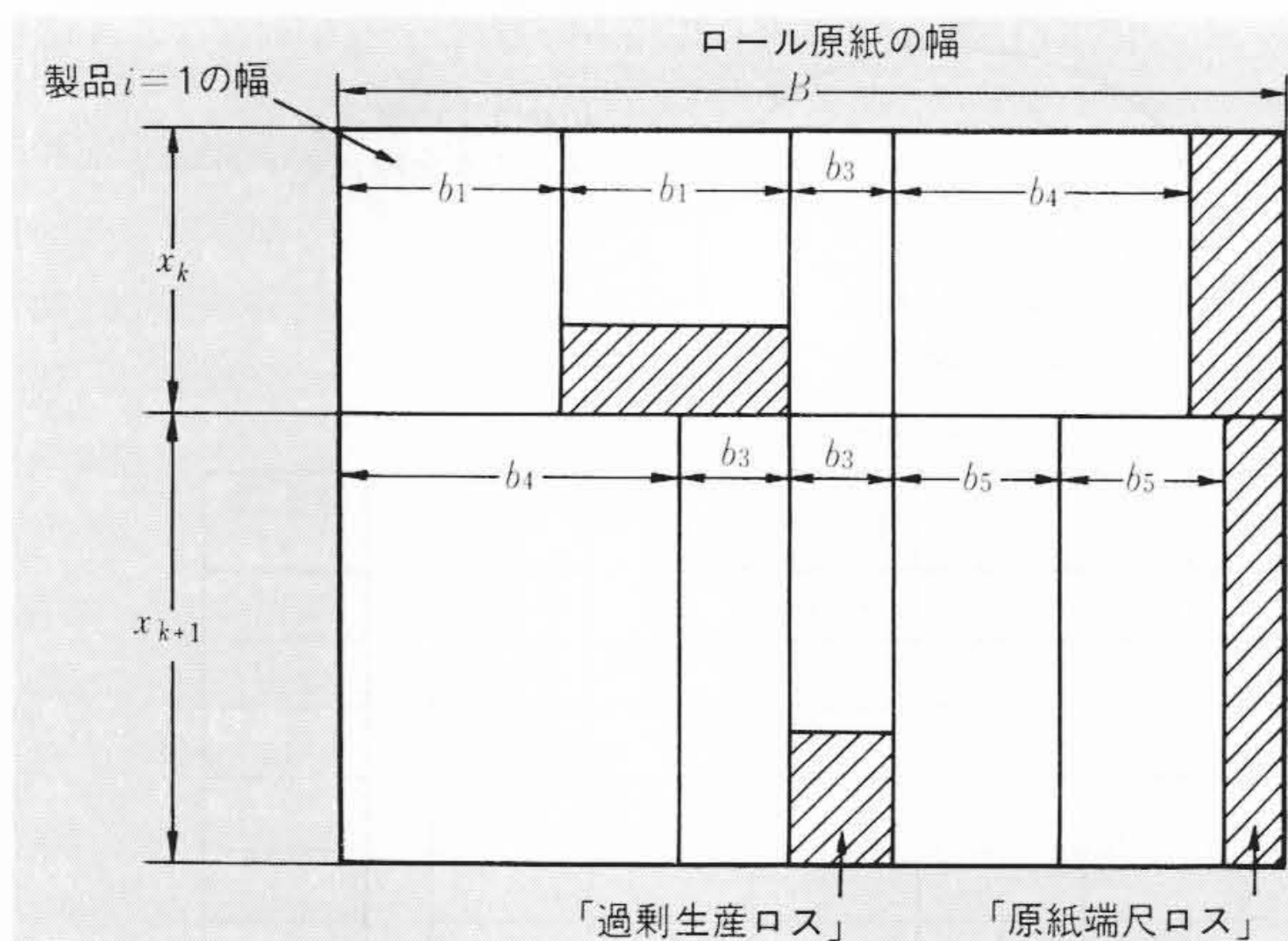
次に、3.1で、余裕幅が十分大であると仮定したが、実際には、顧客サービス向上と在庫低減という観点から、十分大きい余裕幅が得られないことがある。この場合、制約式(1)式、(2)式を満たす最適解が必ず得られるという保証ができない(いわゆる可解性の問題)。そこで適用上の対策として、次の二つの方法を考えて。

- (1) 需要情報の早期把握により、余裕幅を広くする。例えば、納期の延期又は前倒しが可能か、需要元へ即時に問い合わせる。
- (2) パターン生成基準に幅をもたせて、満足のゆくまで、パターン生成と最適パターン選択の計算を繰り返す。

4 適用事例

パターン解法を、実際に次の問題に適用した。

- (1) 裁断ロスの最小化を目的として、種々の紙幅の製品を原紙から裁断する裁断計画問題に適用した。なお製紙業界では、これを取合せ計画問題と呼んでいる^{6),10)}。
- (2) 輸送コストの最小化を目的として、各種車両に製品をできるだけ多く積載する積載計画問題に適用した。
- これらは、いずれも製品の形状と資源の形状を組み合わせる



原問題の定式化

目的関数

$$\text{ロス最小化: } F = B \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{i=1}^N b_i r_i \rightarrow \text{Min} \dots \dots \dots (1\text{式})$$

制約条件

$$\textcircled{1} \text{ 組合せ上の制約: } B \geq \sum_{i=1}^N b_i p_{ki} \quad (k=1, 2, \dots, n) \dots \dots (2\text{式})$$

$$\textcircled{2} \text{ 要求量の制約: } \sum_{k=1}^n p_{ki} x_k \geq r_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots \dots (3\text{式})$$

ここで N : 品種数 r_i : 製品の要求量 p_{ki} : ロール原紙の幅方向の変数(非負整数) x_k : ロール原紙の長さ方向の変数(非負整数)

図5 ロール状原紙の裁断計画問題⁷⁾ 幅 B のロール状原紙から、幅 b_i の製品を要求量 r_i に応じて裁断する問題を、裁断計画問題という。

問題であり、(1)は2次元形状、(2)は3次元形状の問題である。

4.1 取合せ計画システムへの適用

4.1.1 概要

製紙工場では、幾つかの工程を経て、必要寸法の製品が生産されており、工程別に各タスケージュリングシステムが必要である⁶⁾。このなかで、資源の高度利用の観点から重要となっている取合せ計画システムに、パターン解法を適用した⁷⁾。

4.1.2 原紙の裁断計画問題

例えば、品質レベルなどの製品形状寸法以外の規格が同一である各製品の生産要求量に対して、原紙(素材)の損失を最小すなわち歩どまりを最大にするように、原紙を裁断することが取合せ計画システムの主要な問題である⁶⁾。

原紙はロール状であり、この場合長さ方向を無限大とみなしてモデル化できる。図5がロール状原紙の裁断計画問題である。この計画問題は同図に示すように定式化が可能である⁷⁾。なお p_{ki} は幅方向に製品 i を何個並べるかの変数である。このように原問題は、長さ方向の変数 x_k だけでなく、 p_{ki} と n も変数であるため、非線形整数計画問題である。

4.1.3 パターン解法によるモデル化

図5に示すように定式化した原紙の裁断計画問題は、大規模なものになると短時間では解けない。そこでパターン解法を適用した。ロス最小化が目的であるので、幅方向についてこれ以上裁断できない組合せ、すなわち $(p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kN})$ がパターンとみなせる。そこで、次のようにモデル化した(図3参照)。

(1) パターン生成

組合せ上の制約は、原問題と同じく図5中の(2式)で表われる。次に幅方向のロス(すなわち「端尺」)を一定の許容範囲に抑えることをパターン生成基準とする。すなわち、

$$B \geq \sum_{i=1}^N b_i p_{ki} \geq B_0 \dots \dots \dots (3)$$

を満足するあらゆる組合せ $(p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kN})$ を k 番目のパターンとする。ここで、 B_0 が許容範囲を決めるパラメータである。また B は原紙の幅、 b_i は製品の紙幅である。

(2) 最適パターン選択

目的関数は、図5中の(1式)と同じく、ロス最小化である。制約条件は、同図中の(3式)と同じである。なお、同図中の(1式)と(3式)から構成される問題は、整数線形計画問題である¹¹⁾。

このモデルの評価のため、実規模レベルのデータにより数値計算を行なった結果、平均の損失率を従来に比べ約10%低減することができた⁷⁾。

4.1.4 実システムの概要

図6が実システムの概要である。(3)式の B_0 を可変データと

して、満足できるまで繰り返し解を求める方式とした。

4.2 製品発送計画システムへの適用^{8),9),12)}

4.2.1 概要

組立加工製造業では、輸送コストの低減と、顧客サービス率の向上を目的とする製品発送計画システムが重要となった。このシステムは、図10に示す物的システムのように幾つかの営業所又は販売店からの要求に従って、工場倉庫からトラック、貨車などの各種の輸送手段を使って製品を出荷・配送する業務を対象とする。なお本例は、家庭電気品工場を対象に開発したものである。

4.2.2 車両への製品積載計画問題

製品発送計画システムのなかで、次の仮定を置けるシステムでは、車両への製品積載計画問題^{*1)}が重要である^{8),9)}。

- (1) どの製品も要求量を供給できるほど十分在庫があること。
- (2) 工場倉庫は1箇所であること。
- (3) 各需要地の要求量は、1回の発送時に1車分以上の物量があるほど十分大であること。
- (4) 各輸送手段の配車可能数は、十分大であること。

次にこの車両への製品積載計画問題を定義する。

図7に示すように、 N 種類の製品と M 種類の輸送手段(車

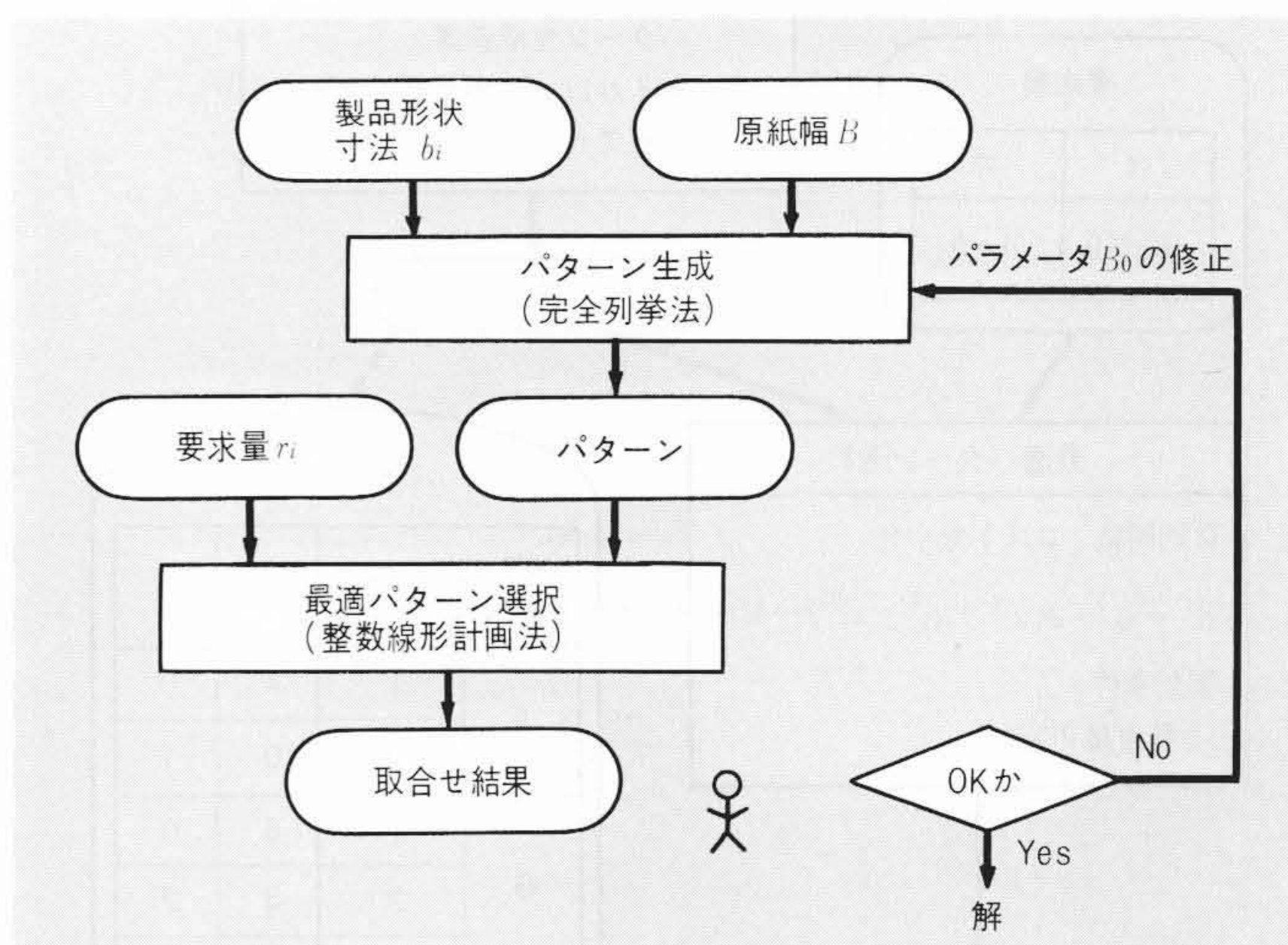


図6 取合せ計画システムの概要 パターン解法を適用した取合せ計画システムの概要である。マンマシン対話形により解を求める方式とした。

※1) 車両への製品積載計画問題は、輸送手段(車両)を最適に割り当てるといふ見地から、最適輸送手段割当て問題とも言える。文献8), 9)を参照。

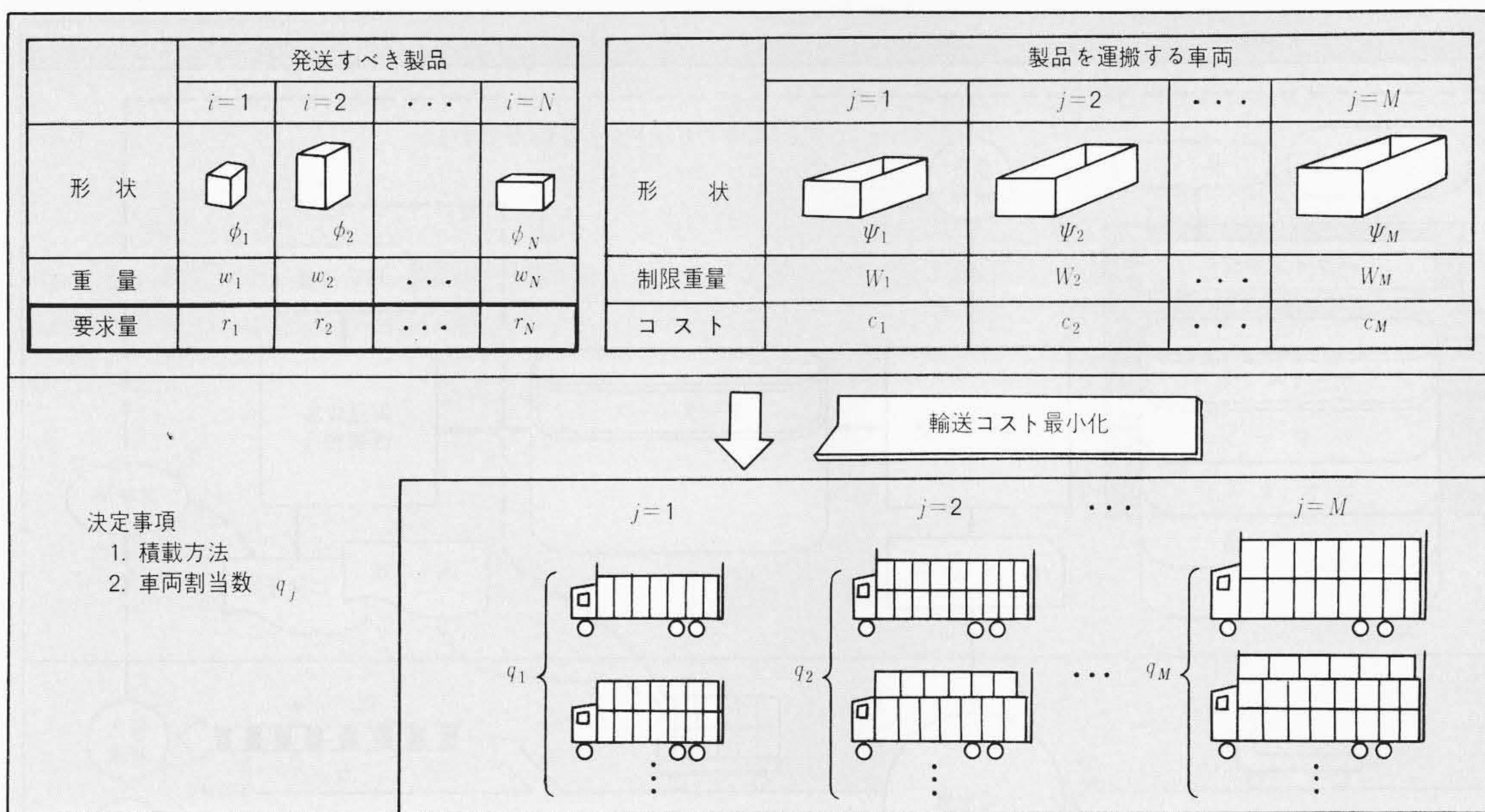


図7 車両への製品積載計画問題 輸送コスト最小化を図るため、製品の最適な積載方法と輸送手段(車両)の最適な割当てを決める問題を、車両への製品積載計画問題という。

両)があるとき、製品 i の梱包形状を ϕ_i 、重量を w_i とし、車種 j の積載可能空間の形状を ψ_j 、制限重量を W_j とする。また、需要地への輸送コストを c_j とする。ある日の製品 i の要求量を r_i とすると、輸送手段を最適に割り当てて、最小コストのもとで要求量 r_i を供給する積載方法を求めるのが車両への製品積載計画問題である。なお要求量は、一定の余裕幅をもっており、最大値を $r_i^{\max}$ 、最小値を $r_i^{\min}$ とする。なお、同図は簡単のために r_i としている。

図8は、単載での積載効率をいろいろな製品についてプロットしたグラフである。製品が大きくなると、同図に示すように効率が低下する傾向がある。そこで、この問題に対しては、より複雑な組合せ、すなわち異なった製品の混載により積載計画を立てる必要がある。

この問題の目的関数は、輸送コストの最小化である。また、組合せ上の制約としては、重量の制約と空間の制約がある。

4.2.3 パターン解法によるモデル化

本問題の目的関数は、輸送コストの最小化としたので、これ以上積載できないという積載効率の高い組合せがパターン

とみなされる。そこで、次のようにモデル化した(図3参照)。なお、以下では梱包形状はすべて直方体であるとする。

(1) パターン生成

組合せ上の制約は、空間の制約と重量の制約(積載製品総重量 $\leq W_j$)である。パターン生成基準は、要求量の傾向によって変えるべきである。要求量が非常に大きい場合、1品種をできるだけ多く積載し、残り空間に他の品種をできるだけ多く積載することを基本とするパターン生成基準で十分効果が上がる。図9は、そのパターンの例である^{8),9)}。パターン行列は、図3と同じように表わされる。

(2) 最適パターン選択

目的関数は、輸送コスト最小化、すなわち、

$$C = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_M q_M \rightarrow \text{Min} \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$q_j = \sum_{\text{all } k_j} x_{kj}^{(j)} \quad (j=1, 2, \cdots, M) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

である。ここに、 c_j は車種 j の輸送コスト、 q_j は配車数である。制約条件は、(1)式と同じ要求量の制約である。

このモデルを評価するため、図8のうちA、B、Cの3製

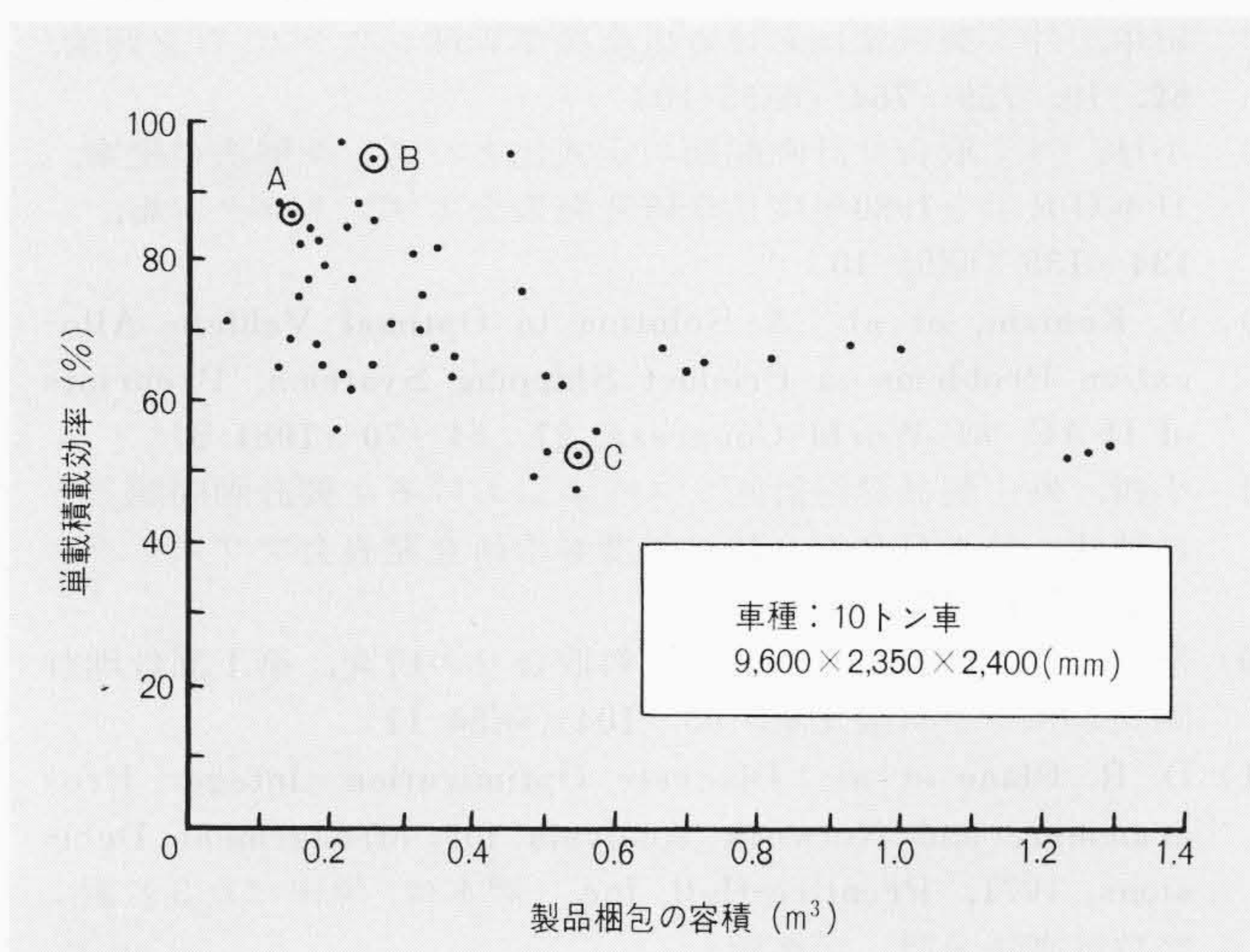


図8 単載積載効率の傾向 横軸に製品梱包の容積をとり、縦軸に単載時最大の積載効率をとったとき、容積が大きくなると積載効率が低下するという傾向が見られる。なおA、B、Cは数値計算例で用いた製品である。

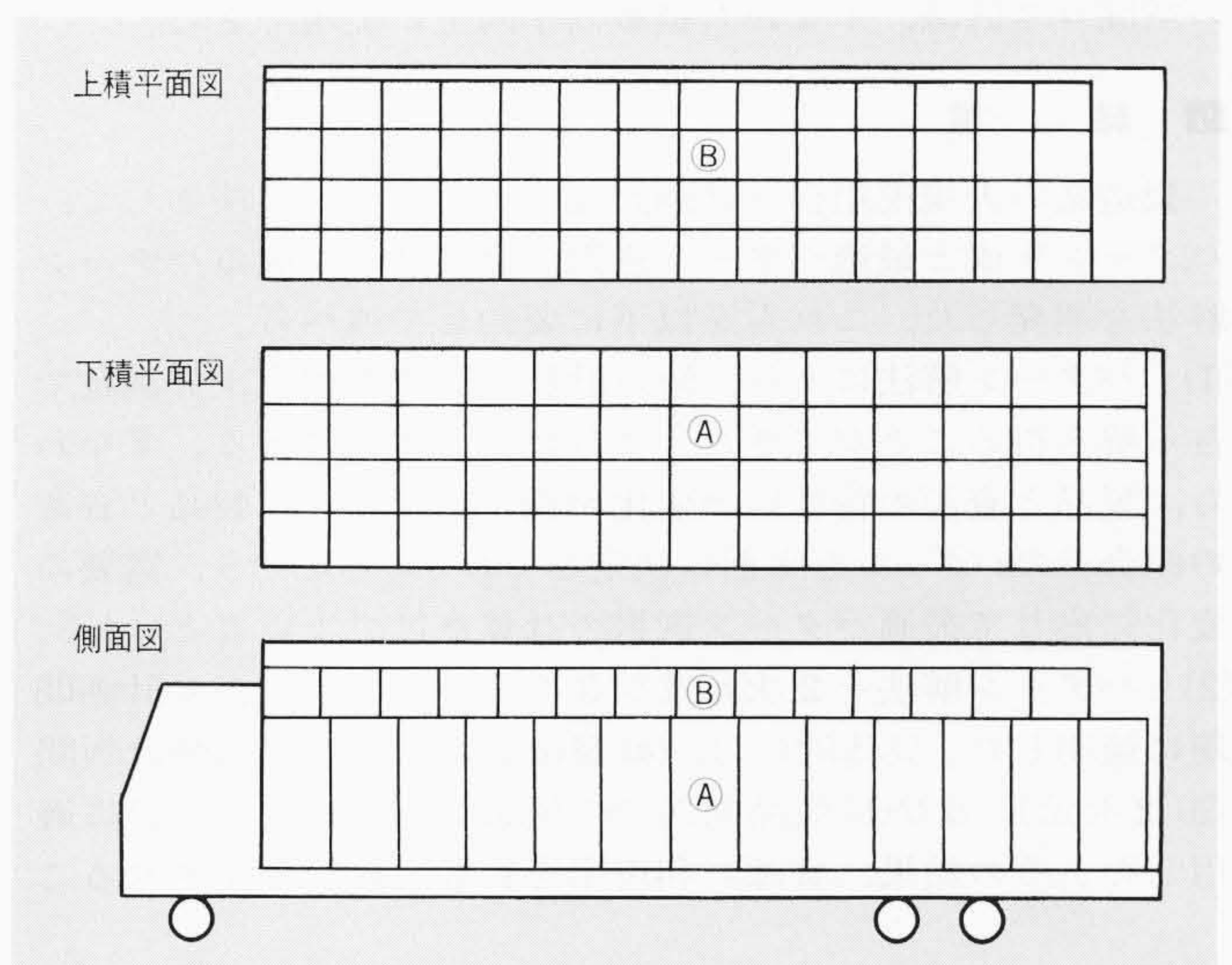


図9 積載のパターン例 まず製品(A)をできるだけ多く積載し、次いで残空間に製品(B)をできるだけ多く積載して得られるパターンの例である(A: 52個, B: 56個)。

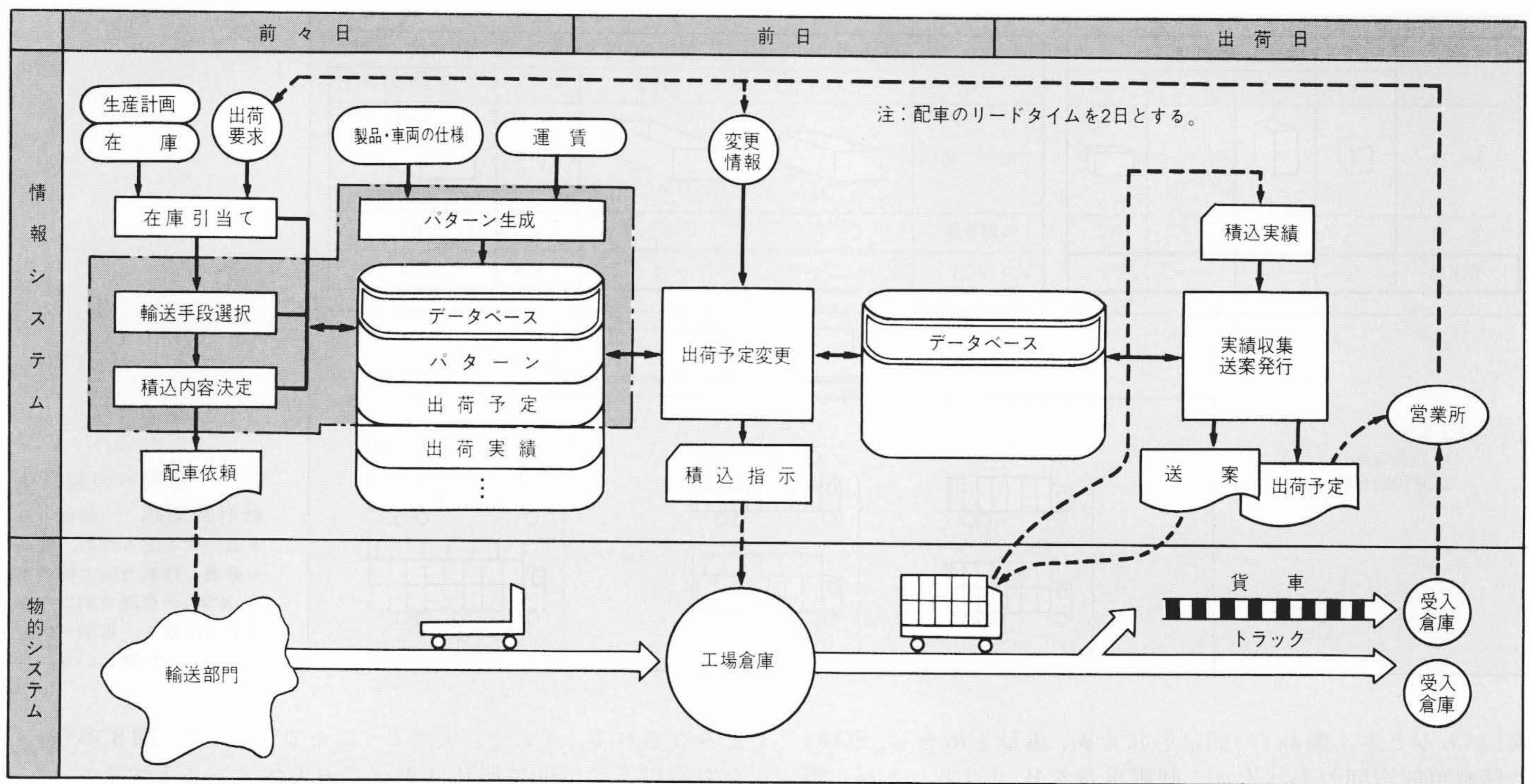


図10 製品発送計画システムの概要 出荷日を基準として、製品発送計画システムの各処理を、物的システムに対応させながら示した。出荷日の前々日の情報処理のうち、一点鎖線枠で囲んだ部分にパターン解法を適用した。

品を取り上げ、数値計算を行なった。この結果、例えば、従来の単載による方法で30車必要な場合、パターン解法では26車で済むことが分かった。

4.2.4 実システムの概要

図10の情報システムは、実際に本解法を組み込んだ製品発送計画システムの概要である。本システムでは、製品の種類数150、車種8種、パターン数3,200、送り先の数60、要求の物量50~200車/日及び製品の大きさ $0.06\sim1.4\text{m}^3$ といったように大規模なものである。したがって、(1)式、(2)式、(4)式及び(5)式の整数計画問題を解く^{※2)}と計算時間が長大となり、実用的でない。物量が多いと、線形計画モデル化しても十分良い近似解が得られるので、同図の実システムでは、このモデルを採用した。

総合的な効果として、本システム導入により、平均約8%の空間ロス低減、すなわち積載効率向上が実現できた。

5 結 言

製造業の大規模組合せ計画問題に対する計画技法として、パターン生成と最適パターン選択の2段階から成るパターン解法を開発した。これらを以下に要約して述べる。

- (1) パターン解法により、短い計算時間で実用上十分満足できる解を得ることができた。これは次の理由による。すなわち、製品と資源の特性値の変化が緩やかな場合、製品と資源の組合せのパターンを事前に決定しておくことができ、需要の変化に応じて最適パターン選択の計算だけでよいことによる。
- (2) パターン解法を2次元及び3次元の形状の組合せ計画問題に適用した。具体的には、(a)製紙業での原紙の裁断計画問題(2次元)、及び(b)製品発送での積載計画問題(3次元)に適用した。その結果、資源の利用度を約8~10%向上させるこ

とができた。

パターン解法の生産システムへの適用例として、本稿では2次元、3次元の場合について述べたが、更に高次元の離散的構造をもつ大規模組合せ計画問題に適用が可能である。

参考文献

- 1) 青沼：大規模線形計画問題の分割的解法，第1回数値計画シンポジウム論文集，1~13（昭55-11）
- 2) P. C. Gilmore, et al.: Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions, Opns. Res. 13, 94~120 (1965)
- 3) 伊理，外：モデルの複雑さへのアプローチ，オペレーションズ・リサーチ，25, 750~771（昭55-12）
- 4) 古林：ORにおける組合せ論的な問題とその解法，システムと制御，23, 29~36（昭54-1）
- 5) 小西，外：取合せ計画問題に対するパターン解法の提案，昭和54年電気学会全国大会講演論文集，1747~1748（昭54-4）
- 6) 田中，外：製紙業における生産操業管理システム，日立評論，62, 10, 759~764（昭55-10）
- 7) 小林，外：取合せ計画問題の定式化とパターン解法の提案，日本OR学会1980年度秋季研究発表会アブストラクト集，134~135（昭55-10）
- 8) Y. Konishi, et al.: A Solution to Optimal Vehicle Allocation Problems in Product Shipping Systems, Preprints of IFAC '81 World Congress, 21, 64~70 (1981-8)
- 9) 小西，外：製品発送計画システムにおける主要計画問題とその解法，日本OR学会1981年度春季研究発表会アブストラクト集，101~102（昭56-3）
- 10) 徳山，外：鉄鋼業における材料取合せの研究，第1回数値計画シンポジウム論文集，95~104（昭54-11）
- 11) D. R. Plane et al.: Discrete Optimization—Integer Programming and Network Analysis for Management Decisions, 1971, Prentice-Hall, Inc. (訳本は、黒田ほか3名訳：整数計画法入門，培風館)
- 12) 河野，外：逐次決定型製品発送計画システム，日本OR学会1978年度秋季研究発表会アブストラクト集，206~277（昭53-10）

※2) 整数線形計画問題の解法として、よく知られている切除平面法を用いた¹¹⁾。