

# 境界要素法によるポテンシャル場の3次元解析

## Numerical Analysis of Three Dimensional Potential Field Using Boundary Element Method

最近、熱、流れあるいは電磁界など、ポテンシャル場として取り扱える現象の解析のニーズが増しつつある。本研究は、BEMを用いて、有限要素法、差分法よりも入力省力化が図れ、かつ計算時間も短縮できる3次元ポテンシャル場解析プログラムを開発、実用化したものである。従来のBEMでは、被積分関数に特異点が含まれるため、精度良く解析することが困難であったが、局所的に極座標を用いることにより、上記関数の特異性を除去できる新しい手法を開発した。この結果、無限領域中及び極めて複雑な物体形状での現象を、高精度かつ短時間に解析できた。本プログラムを、原子力関連機器の熱解析をはじめ変圧器など、高電圧機器の電界解析に適用した。また、計算時間が有限要素法の $\frac{1}{10}$ 以下になることを確認した。

宇多村元昭\* *Motoaki Utamura*

小泉 眞\* *Makoto Koizumi*

狩野泰信\*\* *Yasunobu Kanô*

### 1 緒 言

BEM (Boundary Element Method: 境界要素法) は、1978年にBrebbiaらが<sup>1)</sup>、従来の古典的な積分方程式法に有限要素法の手法を取り入れて新しく定式化して以来、急速に発展を遂げてきた新しい数値解析手法である。有限要素法や差分法が場の中で成立する方程式を解くのにに対し、BEMでは場を記述する微分方程式を、境界上だけに未知数がある積分方程式に変換して問題を解く<sup>2)</sup>。したがって、BEMは、3次元空間での現象を物体の表面の問題として扱えるので、領域型解法<sup>3)</sup>と呼ばれる有限要素法や差分法に比べて、入力データの省力化、計算時間と記憶容量の大幅な低減を図れる特長がある。

更に、BEMは領域型解法に対し、ポテンシャル場での現象のシミュレーションという観点から、例えば、電界場では(1)物体表面上の電界強度が方程式の解として直接求まるので、その解析精度が高い、(2)無限(あるいはそれに近い)体系での電位や電界の分布を、厳密かつ容易に解析できる<sup>4)</sup>、という特長がある。

このような潜在的長所をもつBEMではあるが、これまで実用化が進まず、適用範囲も主として2次元問題にとどまっていた理由は、(1)グリーン関数に内在する特異点の存在が数値積分精度を低下させていたこと<sup>5)</sup>、(2)境界条件が非線形な場合の数値解の不安定性を解決できていなかったこと<sup>6)</sup>、などによる。

本稿では、上記した従来のBEMがもっているあい路を解決するアルゴリズムと、これを組み込んだプログラムについて述べる。また、本プログラムを熱、流れあるいは静電界など、ポテンシャル場の現象を3次元の体系で解析した事例を示し、従来手法との比較を通じて本プログラムの有効性を明らかにする。

### 2 BEMによる定式化

#### 2.1 基礎式

ポテンシャル場の現象を3次元空間の体系で記述する微分方程式と境界条件は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} &= a_2 \nabla^2 \phi + a_3 Q \quad (\text{領域 } \Omega \text{ 内部で}) \\ b_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} + b_2 \phi + b_3 &= 0 \quad (\text{境界 } \partial \Omega \text{ 上で}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで  $a_i, b_i (i=1 \sim 3)$ : 物性値から成る係数

$\phi$ : ポテンシャル

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$ : 境界面  $\partial \Omega$  上の外向法線方向のポテンシャルの微分(フラックス)

$\nabla^2$ : ラプラシアン ( $= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ )

$Q$ : ソース項(既知)

$a_1 = 0$  のとき(1)式は定常場を表わし、更に  $a_3 = 0$  のときよく知られたラプラス方程式となる。 $b_i = 0$  のとき、境界条件は第  $i$  種境界条件と呼ばれる。

グリーンの公式を用いると、(1)式は次式の積分表示に変換される<sup>7)</sup>。

$$C_i \phi_i = \int_{\partial \Omega} (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n}) d\Gamma \dots\dots\dots(2)$$

ここで、添字\*は既知関数(グリーン関数)であることを示す。(2)式は、空間内の任意位置  $i$  でのポテンシャル  $\phi_i$  が、境界面上のポテンシャルとフラックスだけから定まることを表わしている。 $C_i$  は位置  $i$  が計算体系の内部、外部あるいは両者の境界面上にある場合に応じて異なる値をもつ係数である。特に、位置  $i$  が  $\partial \Omega$  上にあるとき、(2)式は  $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial n}$  及び  $\phi_i$  を未知数とする積分方程式に帰着する。これがBEMの基礎式であり、これを解くことにより  $\partial \Omega$  上のポテンシャルとフラックスの分布が求まる。この解を(2)式の右辺に代入すれば内部点のポテンシャルを算出できる。その際、 $\phi^*$  及び  $\frac{\partial \phi^*}{\partial n}$  は位置  $i$  (定点と呼ぶ。)と  $\partial \Omega$  上の積分要素内の代表点(動点と呼ぶ。)間の距離の関数であることに注意する。

#### 2.2 積分方程式の解法

図1にBEMの数値積分法を模式的に示す。等電位に保たれた球の外部の無限空間が計算領域であると仮定する。このとき、球表面上( $\partial \Omega$ )の未知変数は電界になる。球の表面を面要素に分割し、要素内積分の和として(2)式の右辺を近似する。本プログラムでは、要素形状を2次曲面で近似し、曲面上の

\* 日立製作所エネルギー研究所 \*\* 日立製作所国分工場

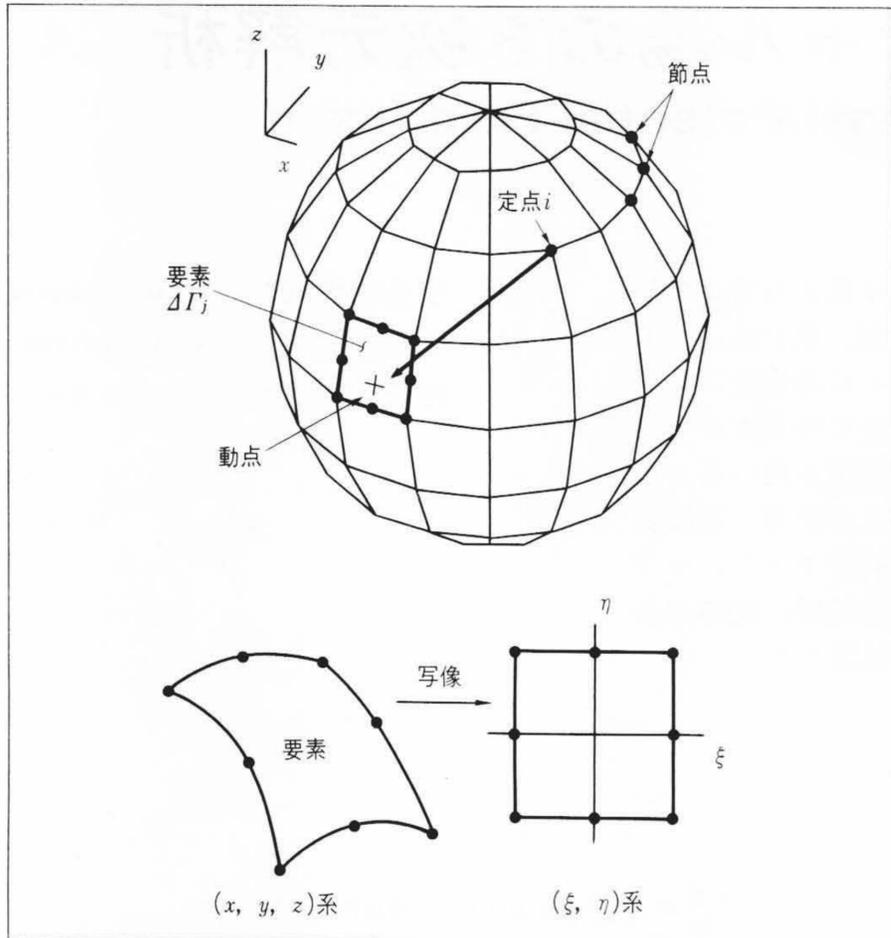


図1 BEM(境界要素法)の数値積分法 局所曲線座標変換法による積分の2次元化により、任意形状の表面積分が可能である。

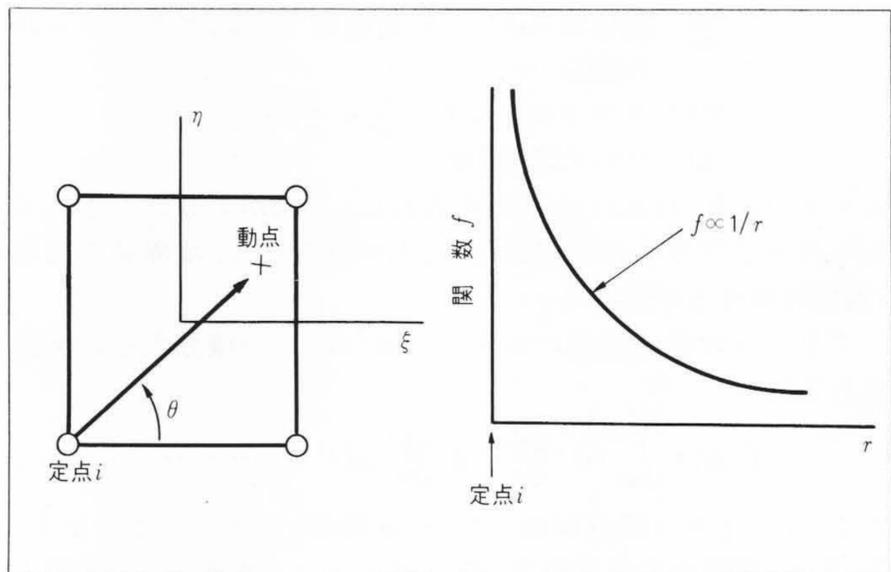


図2 定点近傍での被積分関数の挙動 直交系(ξ, η)→極座標系(r, θ)変換により特異積分を除去できる。

面積積分を写像された2次元の正方領域内で実行する<sup>6)</sup>。したがって、要素形状ごとに個別に積分する必要がなく、任意形状物体への適用が可能である。

ところで、関数 $\phi^*$ 、 $\frac{\partial \phi^*}{\partial n}$ は定点と動点間の距離に反比例するので、定点を含む微小表面内で関数値は非常に大きくなる。このため、数値積分精度が上がらないという問題があった<sup>7)</sup>。計算体系が2次元の場合には、この問題に対する一般的な解決方法が報告されている<sup>8)</sup>が、3次元体系の場合には物体形状の近似を粗くしない限り解決できなかった。この点がBEMの実用化を妨げる一因であった。本プログラムでは、物体形状近似に制約を設けることなく、一般的な方法によって特異積分を解消し、数値積分精度を向上した<sup>8),9)</sup>。図2に定点近傍での被積分関数の挙動を示す。グリーン関数 $f$ が距離 $r$ に反比例することに着目し、 $(\xi, \eta)$ 直交系を $(r, \theta)$ 極座標系に置換して積分した。この置換積分は定点 $i$ が含まれる要素だけ

に限定し、他の要素積分は $(\xi, \eta)$ 直交系のままとした。このような複合座標により、精度向上を図るとともに必要な演算量を削減して計算時間を大幅に短縮した。

非定常問題[(1)式で $a_1 \neq 0$ の場合]では、上記した空間の積分のほかに時間積分が介在する。本プログラムでは、時間増分内の関数をまず多項式近似する。多項式の次数を $n$ として

$$\phi(t) = \alpha_0 \left(\frac{t}{\tau}\right)^n + \alpha_1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_i \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-i} + \dots + \alpha_n \dots \dots (3)$$

ここに、 $\tau$ :時間増分、 $\alpha_i$ :係数である。

そして、(3)式を含む時間積分を解析的に実行することによって、数値解の精度を向上した<sup>9)</sup>。更に、この手法を拡張して、一般に境界条件が $\phi$ (未知数)の高次の関数で表現されるような非線形となる場合も厳密に積分できるスキームを作成し、非線形性に原因する数値解の不安定性を除去することに成功した。

### 3 計算結果と検討

#### 3.1 解析精度の検討

積分方法と物体形状の近似度が計算精度に及ぼす影響を図3に示す。同図中に示す記号■と▲の比較から、特異積分を除去したスキームでは、精度が大幅に向上することが分かる。また、滑らかな曲面では、物体形状の近似度が精度に及ぼす影響が大きいことが分かる。

図4は、非定常問題での時間積分法が解の安定性に及ぼす影響を、温度場を例に取り上げて示したものである。時間増分内の熱伝達率を一定として数値的に時間積分する方法(従来手法)と、時間増分内の熱伝達率の変化を(3)式で近似し、解析的に時間積分する本手法とを比較した。発熱体の片面が冷却材に接し冷却されており、その熱伝達率が冷却面温度の2乗に比例(沸騰が生じている場合に相当)するものとした。計算結果は、発熱開始後の冷却面温度の時間変化を示す。従来手法では解の発散がみられるが、解析的方法により厳密に積分する本手法では解が収束することが分かる。このように、境界条件が未知数の関数で表わされる非線形性をもつ場合にも、本プログラムは解の精度を保証する。

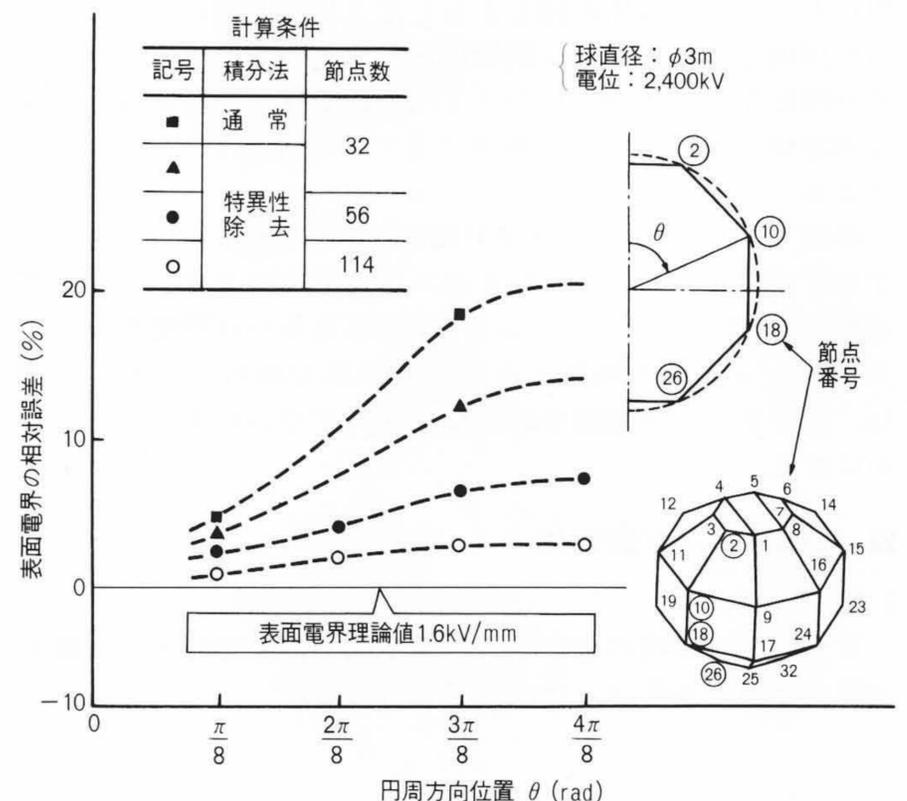


図3 積分法と節点数が数値解の精度に及ぼす影響 特異性を除去した新積分法では、精度が40%向上する。

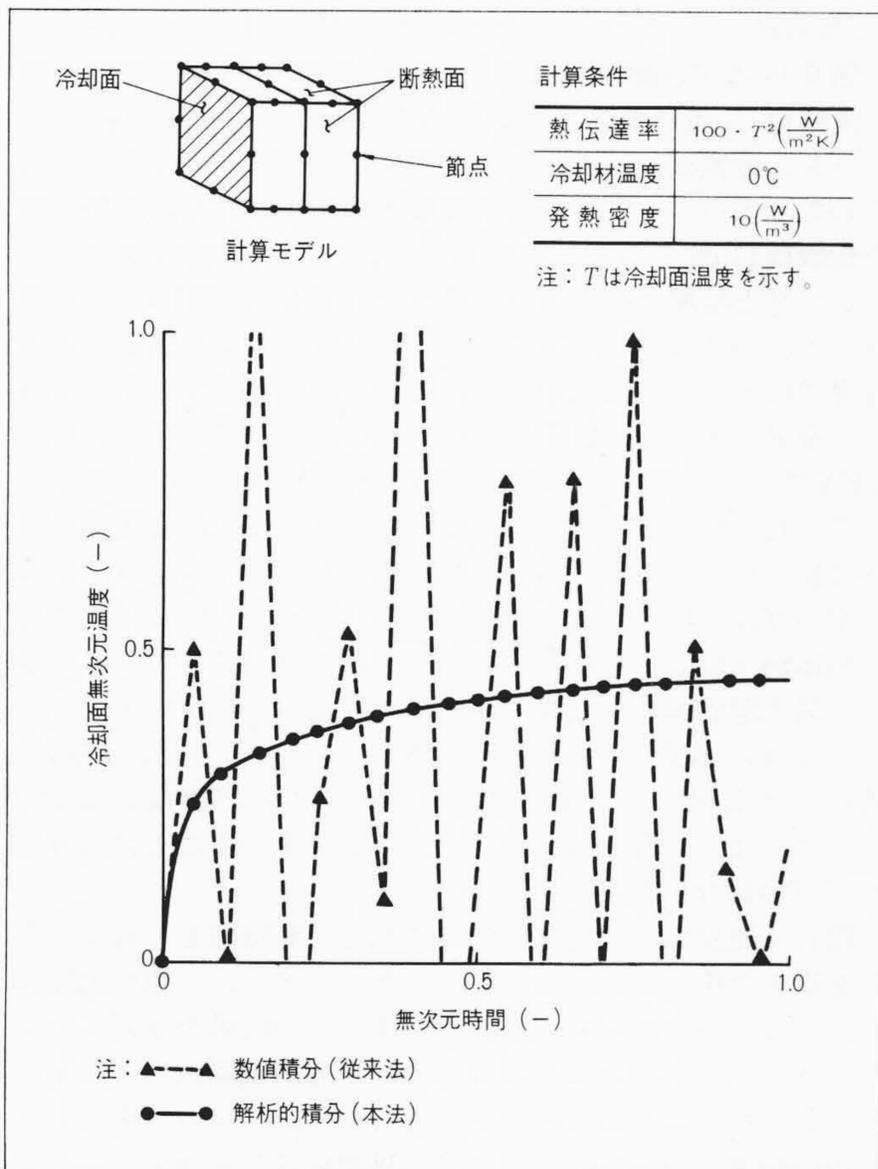


図4 非定常問題での時間積分の方法と解の安定性 熱伝達率をタイムステップ内で一定として数値積分すると、熱伝達率が温度(未知数)の関数である場合に解は発散する。しかし、解析的方法により厳密に積分すると解は収束する(本法)。

### 3.2 原子力分野への適用

図5に原子炉格納容器の概要を示す。原子炉压力容器の圧力が設定値を上回ると、逃し安全弁が作動し、压力容器内の余剰蒸気は圧力抑制室の水中に導かれて凝縮する。蒸気が水中で凝縮する際には、水中に圧力変動が誘起され、これが圧力抑制室に作用する。圧力抑制室の強度設計には、上記変動圧力の空間的分布が必要である。逃し安全弁作動時に、圧力抑制プール壁に作用する動的圧力の分布を解析した結果を図6に示す。視点は圧力抑制室の底部下方にある。等圧線はプール壁面上に立体図として描かれている。圧力の大きさは、凝縮部(プール中央)から隔たるにつれて、また水深が浅くなるほど急速に減衰することが分かる。

図7(a)は核融合実験装置とリミッタ形状を示す。炉心には高温のプラズマが閉じ込められているため、機器の寿命予測の上で熱設計は重要な比重を占めている。核融合装置での伝熱現象の特徴は、瞬時に極めて高い熱負荷が機器に作用する点にある。プラズマの形状制御に用いられるリミッタもその一つである。同図(b)にリミッタ形状を、同図(c)にプラズマがリミッタに接触したときの熱負荷条件を示す。解析では、プラズマとの接触時間を0.1秒とした。リミッタ表面の一部に熱流束が負荷され、他の部分は輻射冷却されるという条件下で計算した。輻射熱伝達率は表面温度の3次の多項式であり、リミッタ表面は非線形境界である。リミッタ表面上の温度分布解析結果を図8に示す。熱負荷の作用している間は表面温度が急上昇するが、熱負荷終了後はリミッタ内の熱伝導と輻

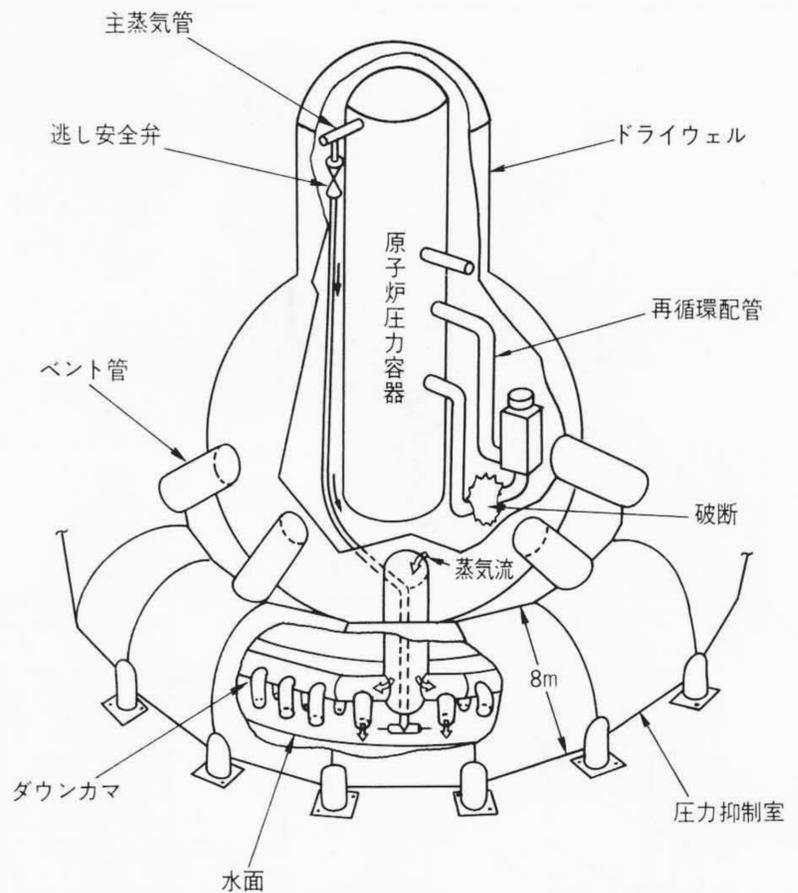


図5 マークI型原子炉格納容器の概要 原子炉格納容器の構成と配管破断事故時の冷却材(蒸気)の流れを示す。原子炉压力容器から流出した冷却材は、圧力抑制室の水中に至り凝縮する。このとき、水力学的な動荷重が発生し、圧力抑制室の壁に作用する。



図6 圧力抑制プール壁上の圧力分布 プール中への蒸気流入に伴って発生する動的圧力の距離による減衰、圧力抑制室(トーラス形状)の $\frac{1}{8}$ セクタの水浸部を計算領域とした。

射冷却の効果により、温度は速やかに一様となり、かつ低下することが分かる。最高到達温度は材料(Mo)の融点である $2,600^\circ C$ の $\frac{1}{2}$ 以下に抑制されており、材料の劣化上問題のないことが明らかになった。

### 3.3 高電圧機器への適用

図9(a)は実験建屋内に据え付けられたUHVプロトタイプ変圧器を示す。UHV実験室内でこのような超高電圧機器を試験する場合、接地された壁とブッシング頭部との離隔距離を適切に設定する必要がある。このため、ブッシング頭部シールドの表面電界について解析を行なう必要がある。近似的には対称2次元面で表面電界を得ることができ、最大電界

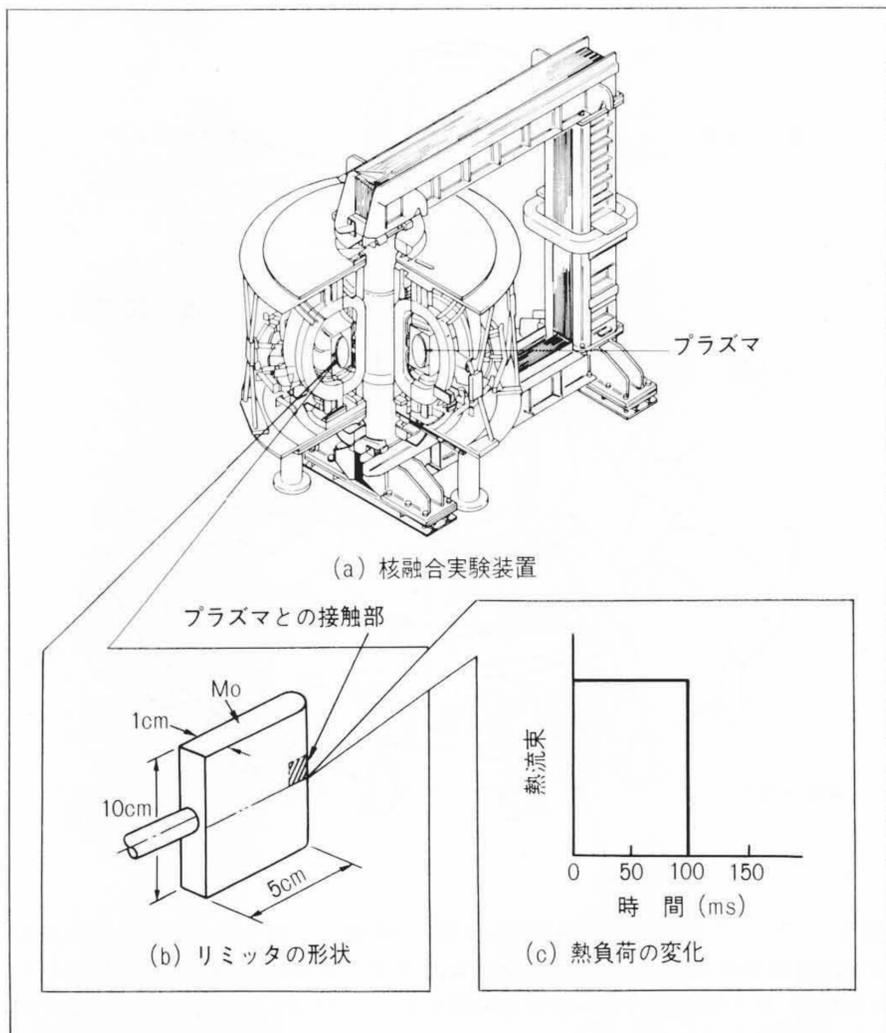


図7 核融合実験装置とリミッタ形状 プラズマとの接触によるリミッタの疲労と寿命の予測には、過渡温度解析が必要である。

とその発生場所を正確に知るためには、3次元構造で解析する必要がある。領域型解法により3次元の電界強度を解析する場合、一般に入力データの作成に多大な労力を要する。すなわち、ブッシング頭部と建屋間の空間を分割する必要があるが、これは容易ではない。更に、ブッシング表面の電界強度は空間内の計算値からの外挿により推定することになるの

で、解析精度に対する保証については必ずしも十分ではない。

図9(b)に実験建屋内に置かれたUHVプロトタイプ変圧器を簡略化し、境界要素法によりメッシュ分割したものを示す。メッシュ分割は、頭部シールド表面と建屋の表面に限定されるので、入力データ作成の大幅な省力化が図れた。本例の節点総数は115個であった。UHVブッシングは高電圧、500kVブッシングと建屋は接地という条件で計算した。図10(a)に建屋壁上の、同図(b)にUHVブッシング頭部シールド表面上の各電界強度分布解析結果を示す。結果は等電界線で表示してある。電界の単位は、UHVブッシングの電圧を100%とした。UHVブッシング頭部上の最大電界発生位置は、500kVブッシングに対向する位置に発生している。ところで、変圧器を屋外に据え付けたときの特性も知る必要がある。本プログラムを用いれば、計算メッシュから建屋の部分を取り除くだけで、接地体が無限遠にある場合の解を得ることができる。この場合、最大電界強度は建屋付きの場合に比べて5%低下する。このように建屋などの近接接地体がブッシング頭部の絶縁強度に与える影響を定量的に求められることが明らかになった。このような評価は、本プログラムを用いることにより初めて可能になった。

図11は建屋付きの場合の解析結果と計算時間を、有限要素法を用いた場合と比較したものである。メッシュ数が大幅に異なるにもかかわらず、両者はほぼ同一の結果を与えていると言える。また、BEMでは計算時間が有限要素法の $\frac{1}{10}$ 以下に短縮された。この解析例で示されるように、互いに離隔した複数の物体についての解析に、BEMが威力を発揮することが分かる。

ガス絶縁開閉装置は、据付面積の大幅な縮小が可能という特長をもち、電圧66~500kVのクラスで使用が急増している。一方、最近の電力系統の増大と変電所用地の取得難から、製品のいっそうの小形化が進められている。小形化でポイントとなる絶縁設計で、電界解析は機器の信頼性確保の点から極めて重要な項目である。図12にガス絶縁開閉装置のポストス

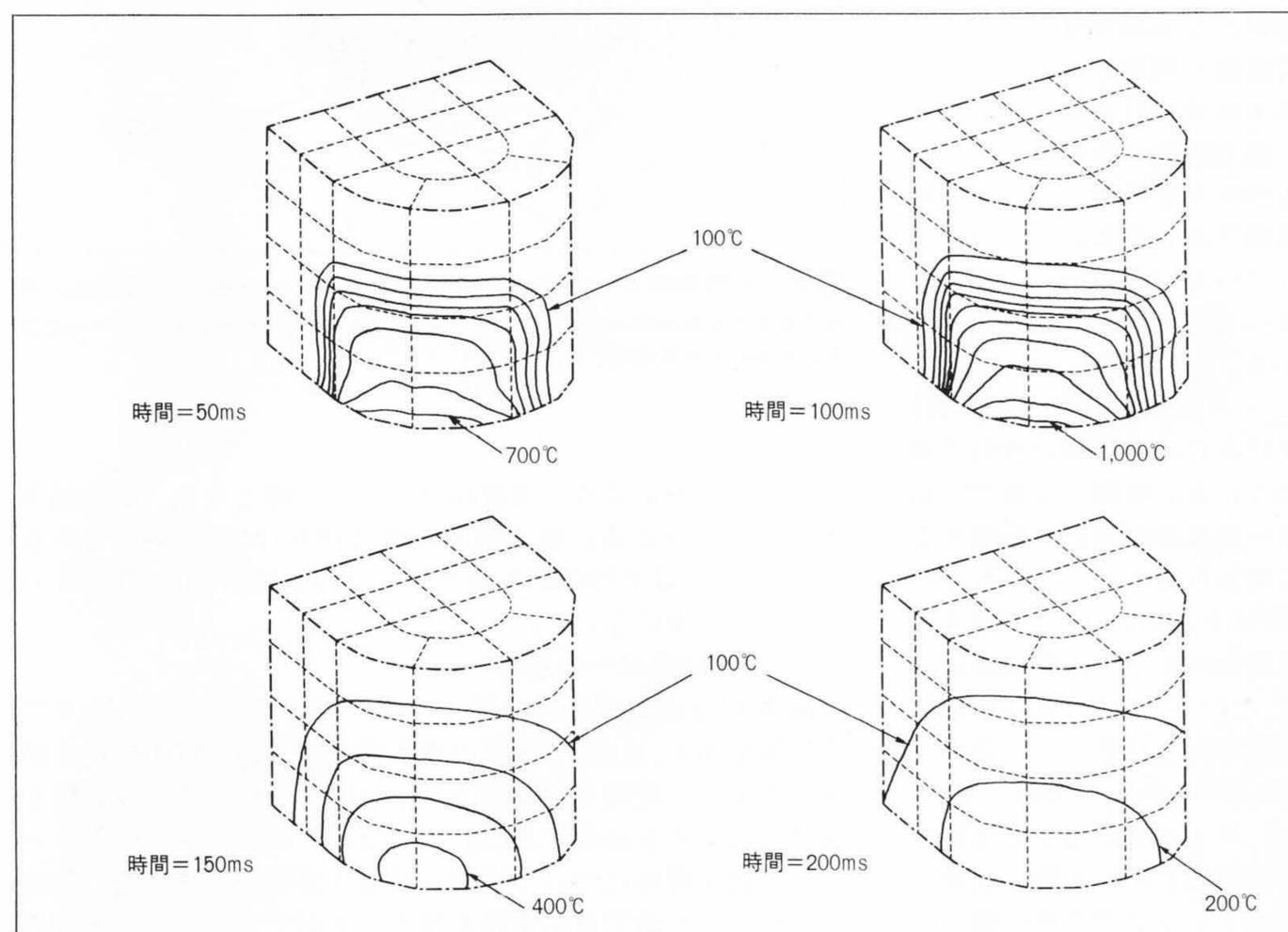


図8 プラズマ接触後のリミッタ表面上温度分布過渡変化 プラズマとの接触による高い熱負荷により、表面温度は短時間に急上昇するが、表面からの輻射冷却、材料内の熱拡散効果により、最高到達温度は材料(Mo)の融点(2,600°C)の $\frac{1}{2}$ 以下に抑制されており、材料の損傷上問題はない。

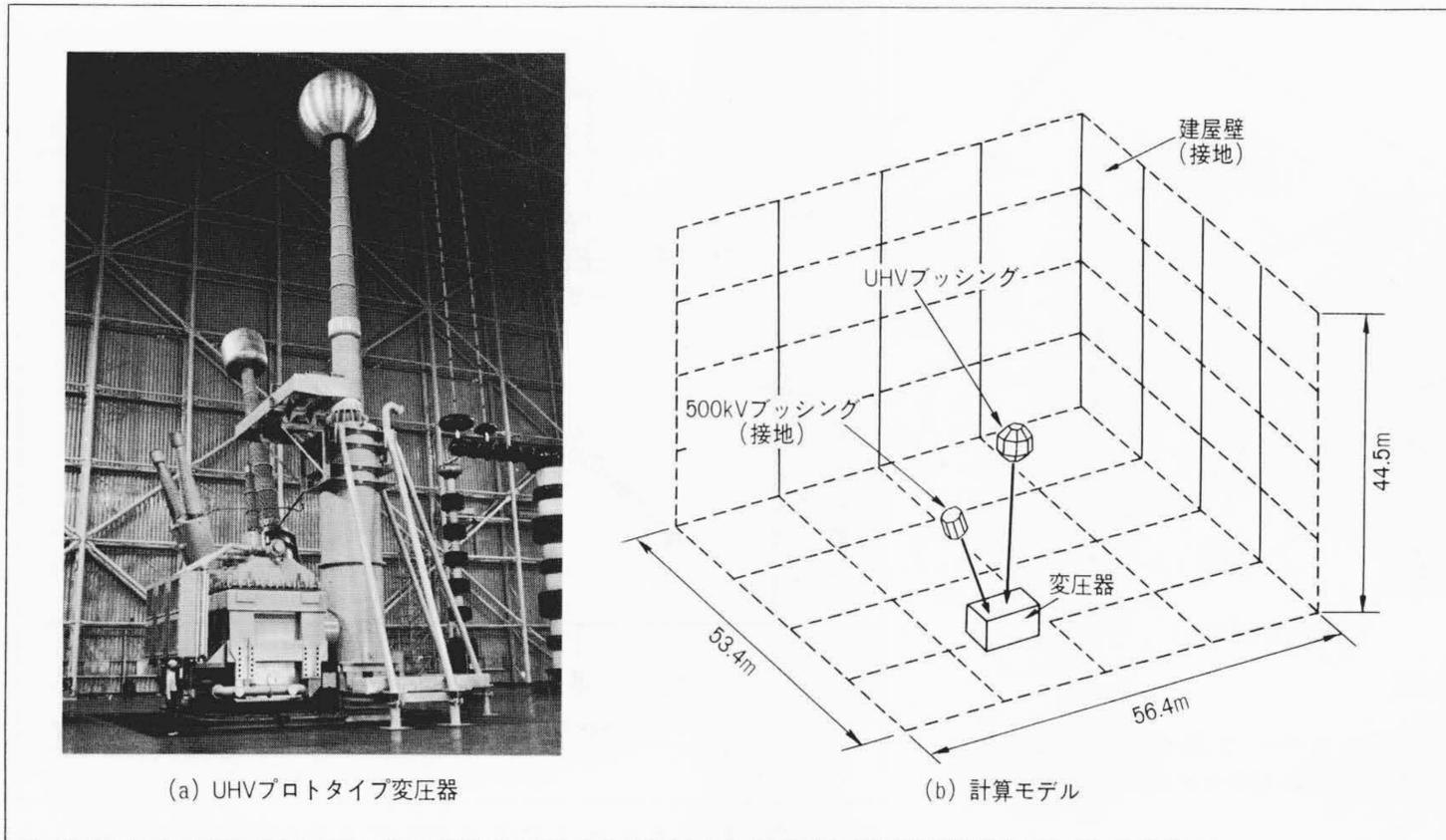


図9 UHVプロトタイプ変圧器と電界計算モデル ブッシング上及び建屋壁上の電界強度の解析は、機器の試験に重要である。

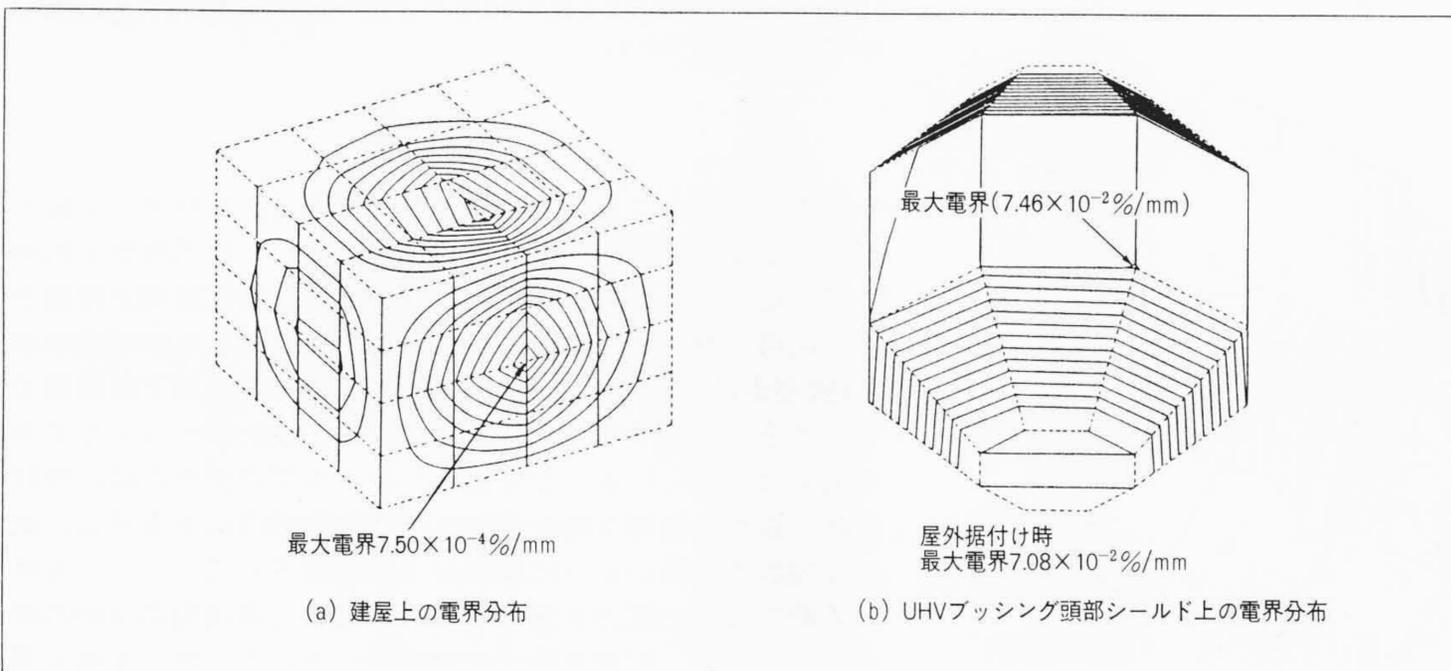


図10 実験建屋及びUHVブッシング上の電界分布解析結果 変圧器特性実験での建屋の影響評価で、建屋の存在は電界強度をプラス側に5%シフトする。

ペーサ部構造と計算領域を示す。中心導体はポストスペーサと止め金具を介してタンクに固定され、止め金具とタンクは接地されている。本問題では、SF<sub>6</sub>ガスとポストスペーサの誘電率が異なるので、その相違を考慮し、複合媒質の問題として解析した。形状の対称性を考慮し、計算領域を軸中心周りの1/4セクタ部分に選んだ。中心導体、ポストスペーサ及び上部止め金具上の電界強度分布の計算結果を図13に示す。最大電界の発生場所は、中心導体のスペーサ端部の頂部にあり、最大電界の導体円周方向の変化は小さいことが分かる。

図14に軸対称モデルと3次元モデルによる計算結果の比較を示す。軸対称モデルは、スペーサと止め金具の形状が円周方向に軸対称であると仮定している。軸対称モデルについては、従来プログラム(差分法)と本プログラムを用いて計算したが、すべての位置で電界強度は良い一致を示した。一方、3次元モデルと軸対称モデルの解析結果を比較すると、中心導体表面に沿う電界強度とタンク表面の電界強度について、両者は5%以内で一致していることが分かる。この一致は、中心導体とタンクの形状が現実に軸対称であることから必然的な結果と言える。しかし、上部止め金具上の電界強度については、軸対称モデルが3次元モデルより30%小さい値を与

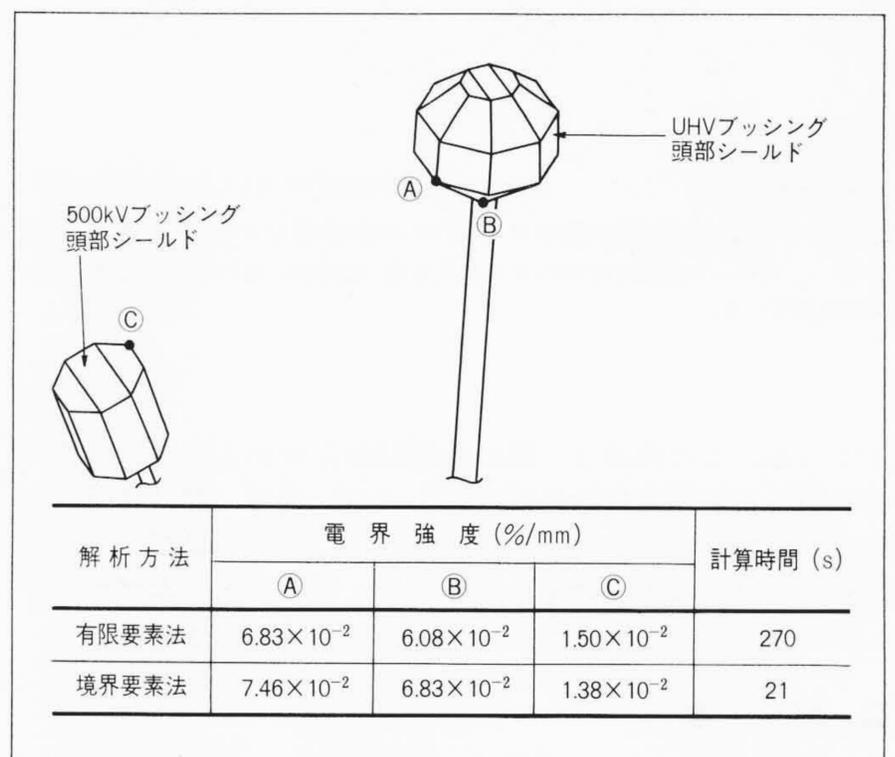


図11 BEMと有限要素法の解析精度、計算時間の比較 有限要素法モデルとBEMモデルの節点数は、各々4,500, 115個である。BEMの計算時間は、有限要素法に比べて1/10以下に短縮できている。

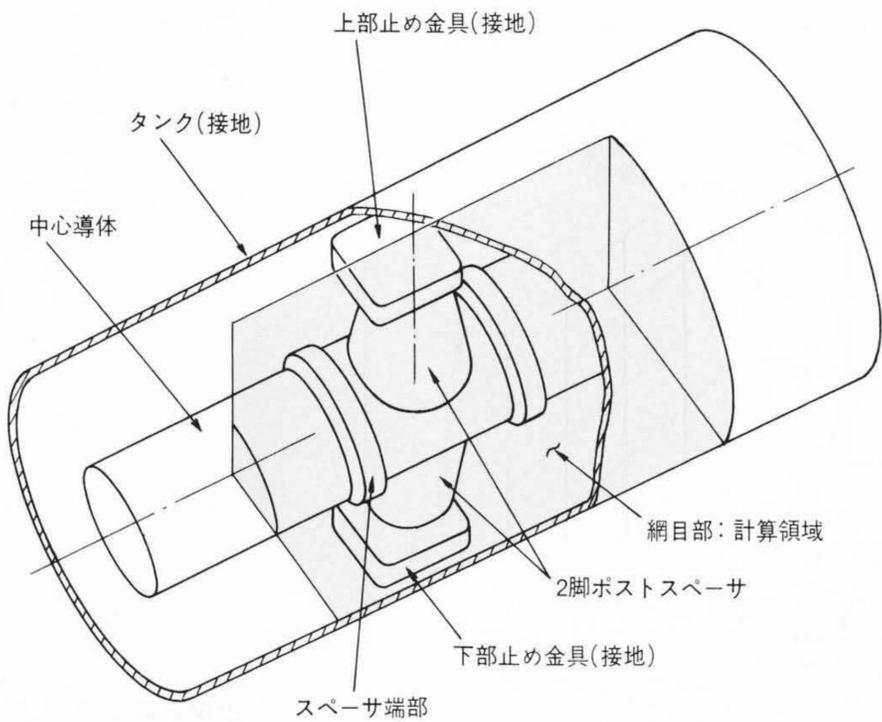


図12 ガス絶縁開閉装置のポストスペーサ部構造と計算領域  
スペーサ、その端部及び止め金具部表面の電界強度分布が絶縁設計に必要である。

注: ——— 等電界線  
----- 要素分割

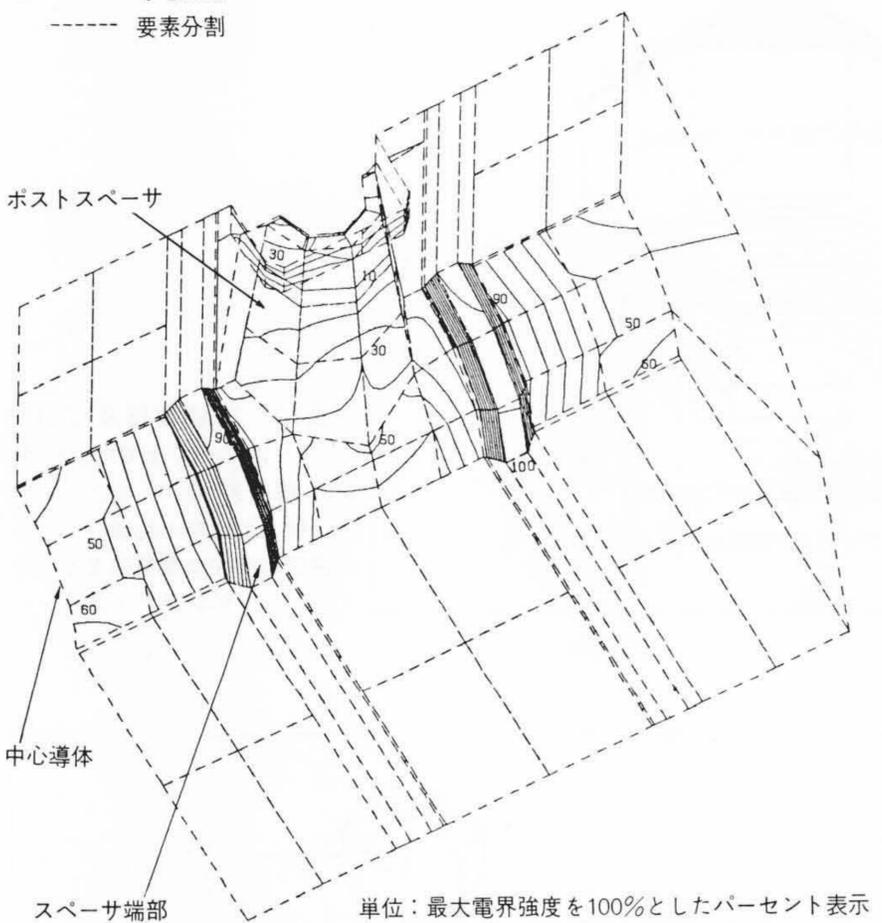


図13 ガス絶縁開閉装置ポストスペーサ部周りの電界強度 3次元分布  
スペーサ端部に電界の集中が見られ、相対的に他の部分の電界強度が抑制されている。

えている。この相違は、既出の図12から分かるように、止め金具の形状が非軸対称であり、かつタンクの一部に局所的に配置されていることによる。すなわち、止め金具部での計算結果の相違は3次元効果に起因するものと言え、本プログラムの適用によりこれを初めて定量化することができた。

#### 4 結 言

BEMを応用し、熱、流れあるいは静電界などポテンシャル場として取り扱える定常、非定常現象を3次元空間の体系について解析するプログラムを開発した。特に、新しい数値積

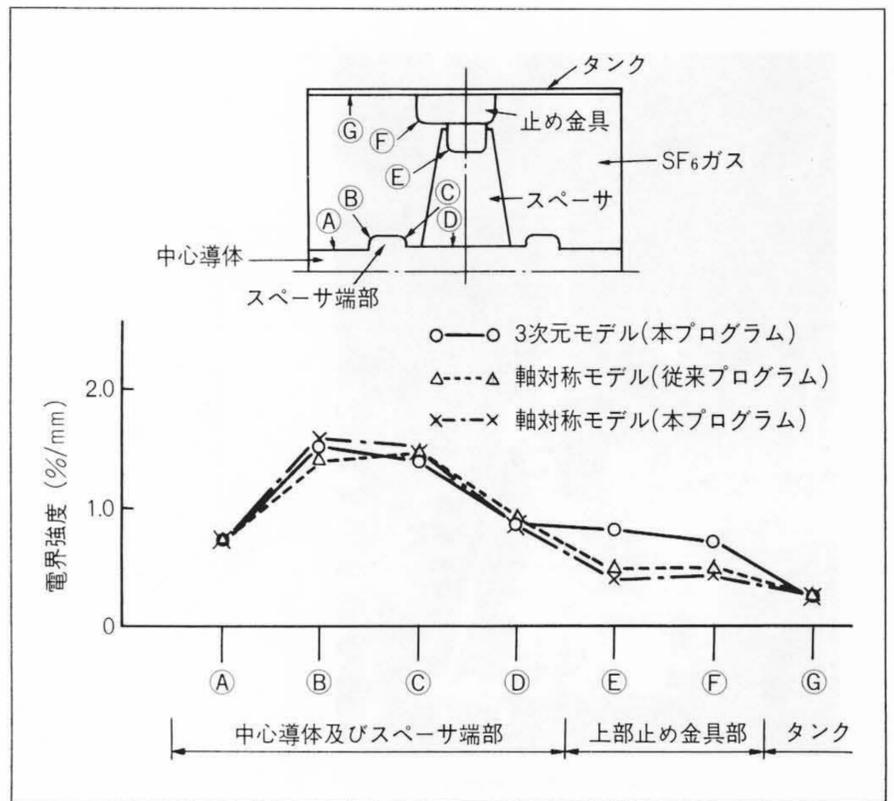


図14 軸対称モデルと3次元モデルによる計算結果の比較  
止め金具、スペーサが導体周りに軸対称性を保って広がっているととして差分法で計算した結果と、BEMによる結果の比較でE、Fの位置の電界に3次元効果が現われていることが分かる。

分方法の開発によって、計算精度の向上と計算時間の短縮が可能となり、BEMによるポテンシャル場の3次元解析を初めて実用化した。本プログラムを各種製品の特性評価と性能予測に適用した。更に、従来設計に用いられてきた領域型解法(有限要素法、差分法)と比較して、計算時間を $\frac{1}{10}$ 以下に短縮できることを実例で示し、本プログラムが設計ツールとして十分供用に耐えられることを実証した。本プログラムは、物体形状が極めて複雑な場合や物体が無限領域内にある場合、更には複数の物体が互いに接触せずに配置されているような体系の解析に特に威力を発揮する。今後とも適用製品分野の拡大を図る一方、定電流場や変動磁場への応用を図ってゆく予定である。

#### 参考文献

- 1) C. A. Brebbia, 外・神谷, 外訳: 境界要素法の基礎と応用, 培風館(昭56-6)
- 2) C. A. Brebbia編, 田中監訳: 境界要素法の応用1, 2, 企画センター(昭58-12)
- 3) 数理科学, 特集・境界要素法, サイエンス社(昭57-12)
- 4) M. A. Jaswon, 外・関谷監訳: 境界要素法(間接法と直接法), ブレイン図書(昭58-3)
- 5) 数理科学, 特集・境界要素法の新展開, サイエンス社(昭58-8)
- 6) C. A. Brebbia, et al.: Boundary Elements, Nov. 1983, Springer Verlag
- 7) D. J. Danson, et al.: Using BEASY to Solve Torsion Problems, Proc. 5th Int. Conf. BEM, 821~834 (Nov. 1983)
- 8) M. Utamura, et al.: Development of a Computer Program for Analyzing Three Dimensional Pressure Field in Pressure Suppression System, J. Nucl. Sci. Tech., to appear
- 9) M. Koizumi, et al.: Application of BEM to Unsteady Three Dimensional Heat Conduction Problems with Non-Linear Boundary Conditions, Proc. 5th Int. Conf. BEM, 143~152 (Nov. 1983)